华章数学译丛

37

HZ BOOKS

CENGAGE Learning™

Advanced Calculus
(Second Edition)

高等微积分
（原书第2版）

（美）Patrick M. Fitzpatrick 著
马里兰大学

金嘉华 顾长康 译


机械工业出版社
China Machine Press

（原书第2版）

高等微积分

数学分析已经根植于自然科学和社会科学的各个学科分支之中。微积分作为数学分析的基础，不仅要为全部数学方法和算法工具提供方法论，同时还要为人们灌输逻辑思维的方法。本书在实现这一目标中取得了引人注目的成果，读者从中不仅可以获得微积分的知识，还会受到数学科学思维的训练。

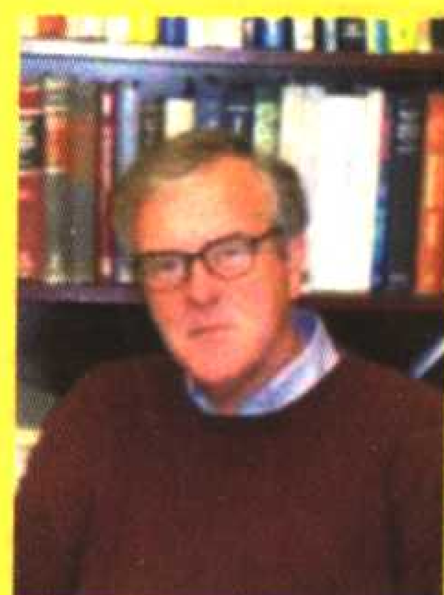
本书一方面按传统的和严格的演绎形式介绍微积分的所有主题，另一方面强调主题的相关性和统一性，从整体的、系统的高度来组织材料。书中以最清晰、最简洁的方式介绍了数学分析的基本概念，除了包含必不可少的论题（如实数、收敛序列、连续函数与极限、初等函数、积分、多元函数等）以外，还包含其他一些重要的论题（如求积分的逼近方法、魏尔斯特拉斯逼近定理、度量空间等）。另外，全书贯穿了许多具有启发性的例题以及激发求知欲的练习题。

与第1版相比，本版增加了200多道难易不等的习题，为易于读者理解进行了大量小改动，从而更清晰地阐述了基本概念。另外，为教学提纲考虑进行了许多实质性的改动，将选学材料单独放置，这样使得基本材料的叙述更简洁，过渡更自然流畅。

本书可作为数学、工程技术、自然科学、计算机科学和其他相关专业学生数学分析课程的教材或教学参考书。

作者简介

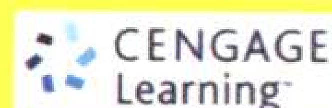
Patrick M. Fitzpatrick　拥有拉特格大学博士学位，是纽约大学科朗研究院和芝加哥大学的博士后，1975年进入马里兰大学College Park分校任教，现在是数学系教授和系主任，同时他还是巴黎大学和佛罗伦萨大学的客座教授。他的研究方向是非线性泛函分析。





Advanced Calculus

(Second Edition)



www.cengageasia.com



影印版

ISBN 7-111-19349-0
定价：76.00元



投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

封面设计·杨宇梅



ISBN 978-7-111-22790-8
定价：55.00 元

Advanced Calculus

(Second Edition)

高等微积分

（原书第2版）

（美）Patrick M. Fitzpatrick 著
马 里 兰 大 学
金嘉华 顾长康 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书以最清晰、最简洁的方式介绍了数学分析的基本概念，除了包含必不可少的论题(如实数、收敛序列、连续函数与极限、初等函数、积分、多元函数等)以外，还包含其他一些重要的论题(如求积分的近似方法、魏尔斯特拉斯逼近定理、度量空间等). 另外，全书贯穿了许多具有启发性的例题以及激发求知欲的练习题.

本书叙述严谨，逻辑性强，可作为数学、工程技术、自然科学、计算机科学和其他相关专业学生数学分析课程的教材或教学参考书，也可作为数学工作者和工程技术人员的参考用书.

Patrick M. Fitzpatrick: Advanced Calculus, Second Edition (ISBN 0-534-37603-7).

Cengage Learning Asia Pte. Ltd.
5 Shenton Way, # 01-01 UIC Building, Singapore 068808

本书封面贴有 Cengage Learning 防伪标签，无标签者不得销售.
(Thomson Learning 现更名为 Cengage Learning)

本书版权登记号：图字：01-2006-3134

图书在版编目(CIP)数据

高等微积分(原书第2版)/(美)菲茨帕特里克(Fitzpatrick, P. M.)著；金嘉华，顾长康译. —北京：机械工业出版社，2008.1
(华章数学译丛)
书名原文：Advanced Calculus, Second Edition
ISBN 978-7-111-22790-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①菲…　②金…　③顾…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第175560号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)
责任编辑：迟振春　　　王春华
北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2008年1月第1版第1次印刷
186mm × 240mm · 27.75 印张
定价：55.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

本书是由美国马里兰大学 Patrick M. Fitzpatrick 教授撰写的，可以作为高等院校数学系低年级本科生学习数学分析的教材或参考读物. 全书立意新颖，论述严谨，推理严密，表达简洁清晰而富有启发性，可以较好地培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力及空间想象能力，为后续课程的学习打下扎实的基础.

本书原著第 1 版第 1 至 15 章由金嘉华翻译，第 16 至 19 章及两个附录由顾长康翻译. 原著第 2 版出版后，全书(除前言外)由顾长康依据第 2 版改译并作校对. 由于译者水平有限，不当之处在所难免，望读者不吝指正.

金嘉华　顾长康

前　言

本书旨在以最清晰、最简洁的方式精确地陈述数学分析的基本概念，全书配有启发性的例题及有激励性的习题. 我希望学生准确地掌握学科内容，了解它的连贯和含义. 本书适合作为一学年课程，前九章关于一元函数的内容适合作为一学期课程.

我不想过分强调习题的重要性. 为真正理解书本内容，学生有必要做许多习题. 习题设计成有挑战性的，以激励学生去仔细重读相关材料. 有许多问题预示着未来的发展方向. 学生在阅读本书时，应备有笔和纸，对内容全神贯注. 最好的方法是在读证明之前试着自己去证明结论.

数学分析对许多科学分支的发展有着巨大的影响. 诚然，作为学科的一部分的计算算法在应用上的重要性，常常引发在课程中强调通晓这些算法的实现，其结果必以牺牲学科的基本思想为代价. 尽管这些技巧是非常重要的，但若对这些算法的中心概念没有真正的理解，则运用算法的能力就会很有限. 我已试图强调学科内容的统一性. 数学分析不是孤立事实与技巧的汇集，相反，它是知识的连贯体. 除了实际主题的固有重要性之外，数学分析的研究在于灌输一种思维的习惯，这对于真正理解纯粹数学和应用数学的许多领域是至关重要的.

除了绝对必不可少的论题外，一些其他重要的论题以这样一种方式安排，即它们的选用不致扰乱课程的连贯性. 那些不含有后面引用的题材的章或节都以星号“*”标明.

在这门课程的开始，就有必要证实实数的性质，它们是后续证明的基础. 这已成为我的经验，为了在规定时间内涉及内容翔实的分析，就不可能提供从集合论的严格讨论开始的实数构造的细节. 我选择把实数性质编辑成三组公理. 在“预备知识”里，算术性质及序性质编辑成域公理及正性公理. 在附录 A 中详细讨论这些公理的推论，它们自然是学生们所熟悉的. 这些公理中最不为人们所熟悉的是完备性公理，在 1.1 节中给出.

前四章的材料是最基本的. 在第 2 章，收敛序列的性质得以证实，并给出收敛序列的单调性、线性性及和与积的性质的证明. 完备公理的三条重要推论(单调有界序列的收敛性、区间套定理与列紧性定理)也得到证明. 第 2 章为后面的连续性、极限和积分法的学习奠定基础，这些题材是通过收敛序列的概念处理的. 第 3 章研究了连续函数与极限. 第 4 章讨论了微分法.

第 5 章是可选读的. 学生在此将熟悉对数函数、三角函数及其反函数的性质，虽然很可能他们看到的不是这些函数的严密的分析. 在第 5 章，自然对数函数、正弦函数和余弦函数是作为特定微分方程的唯一解，而且是在这些微分方程有解这一暂时假定下被引进来的，并且给出对这些函数以及它们的反函数的解析性质的解析推导. 尔后，在确定了由积分或幂级数所定义的可微性性质后，证明了这些微分方程确实有解，因而原先的暂时假定是可以去掉的. 我们把第 5 章视为展示的良机，在其中可以把前四章的基本理论用于微分方程解的性质的研究. 由于不需讲授本章的全部题材，并且学生们无疑已经熟悉初等函数的基本性质，因此跳过这一章是正常的.

第 6 章是关于积分的基本材料. 黎曼积分的基本性质是在探索收敛的实数序列的性质通过被称为阿基米德-黎曼定理的可积性准则而展现出来的. 第 7 章包含积分的深一层的论题，是可选读的，后继内容与第 7 章无关.

函数用泰勒多项式来逼近的研究是第 8 章的主题．在第 9 章，我们考察收敛于极限函数的函数序列，并且讨论极限函数继承函数序列中函数项的性质的方式，强调逐点收敛与一致收敛的区别．可以根据学时数以及课程的中心，对第 8、9 章的内容作适当的取舍．在这两章中仅有一个论题是以后所需要的，即多元函数的二阶泰勒逼近定理．我经常取第 8 章的前三节，以及一个或两个分析中的瑰宝，如魏尔斯特拉斯逼近定理、无穷次可微但不解析的函数的例子或者无处可微的连续函数的例子．

多元函数的研究起始于第 10 章．在第 10 章，引进了内积与范数．$\mathbb{R}^n$ 中没有哪一类子集对多元函数所起的作用能像区间对于一元函数所起的作用那样显著．正因如此，引进$\mathbb{R}^n$ 中一般的开子集与闭子集的概念，并且考察它们的基本性质，在第 11 章，我们研究如何把数列与一元函数序列的有关结果推广到$\mathbb{R}^n$ 中的点序列，以及推广到定义在欧几里得空间的子集的函数序列和这类空间之间的映射上．以$\mathbb{R}^n$ 中的集合作为定义域的函数的特殊性质为背景，考察$\mathbb{R}^n$ 的集合的列紧性、顺向连通性和连通性的概念．第 10、11 章是第 1、2 和 3 章中关于一元函数的内容对多元函数的延伸．

第 12 章度量空间是可选读的．学生将会看到一般理论的一些重要的具体实现，这就是函数序列的一致收敛概念，以及欧几里得空间子集的研究．脑子里有这些例子就能更好地品味一般理论．另外，还证明了压缩映射原理并用它来建立一元函数的非线性标量微分方程的可解性的解的存在性结果．这可以看作是简洁的一般理论为特定问题提供具体信息的有力例证．后面的任何内容都与第 12 章无关．

多元函数微分法的材料包含在第 13、14 章中，这两章的中心是具有连续偏导数的多元函数在所有方向都有方向导数，中值定理成立，因此这类函数有良好的局部逼近性质．

第 15 章研究具有连续可微分量函数的欧几里得空间之间的映射．在连续可微函数的定义域中的每一点定义了导数矩阵以及被称为微分的对应的线性映射，该章还研究用线性映射的逼近，并以映射的链式法则结束．在此处和书中其他地方，需要读者懂得一些线性代数知识．整个 15.1 节专门讨论从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^m$ 的线性映射和 $m \times n$ 矩阵之间的对应，作为为学生提供可能需要了解的知识的一种解决办法．至于涉及线性代数的其他论题，在附录 B 中描述线性代数的基本论题，其中对$\mathbb{R}^3$的线性映射与向量对应的案例，运用两个向量的向量积提供完整的证明，特别是建立了行列式与体积之间的关系．

反函数定理与隐函数定理分别是第 16、17 章的主题．我尽力清晰地描述这两个定理及相关材料，诸如研究非线性方程组的极小化原理，这不是作为一些孤立的技术成果提出的，而是作为了解映射从它的线性化中可能要求继承什么性质的主题的一部分．这两个定理确实是如下方式的最清晰表达，即非线性的对象(映射或方程组)从线性逼近中继承性质的方式．在课时数非常有限的课程中，如果决定把多元函数的积分法的重要部分包括在内，那么可以推迟讲授第 16、17 章中的材料(平面内的反函数定理除外)，而从第 15 章直接进入到第 18 章．

多元函数积分理论占据本书的最后三章．在第 18 章，首先对广义矩形上的有界函数定义积分．一元函数的大多数结果无须改变证明就可以转到多元函数．阿基米德-黎曼定理作为可积性的基本准则得到证明．我们还证明，若定义在广义矩形上的有界函数的不连续点集的若尔

当容度为0，则它也是可积的．随后，对于$\mathbb{R}^n$的有界子集上定义的有界函数，通过这种函数在包含原定义域的广义矩形上的扩张，考察它们的积分．对于多元函数的积分证实存在一元函数的积分的那些熟知的性质，如定义域上的线性性、单调性和可加性，等等．第19章证明了累次积分的富比尼定理，并证明了多元函数积分的变量替换定理．在第20章，本书以曲线与曲面积分的研究结束．我们的目标是以清晰的方式描述和证明一元函数的微积分第一基本定理能够从直线提升到平面(格林公式)，然后格林公式可以从平面提升到三维空间(斯托克斯公式)．我抵制住诱惑，没有提出流形积分法的一般理论，为使得分析思想清晰，宁可不提最一般的结果．因为把重点放在路径和曲面的参数表示的周密处理上，所以没有提及与曲面的“拼缀”相关的基本技术问题．

第1版致谢

本书的初稿被我的许多同事在课堂上使用，在他们及其他人的建议下改进形成了本书的终稿．为此，衷心地感谢James Alexander、Stuart Antman、John Benedetto、Ken Berg、Michael Boyle、Joel Cohen、Jeffrey Cooper、Craig Evans、Seymour Goldberg、Paul Green、Denny Gulick、David Hamilton、Chris Jones、Adam Kleppner、John Millson、Umberto Nero、Jacobo Pejsachowicz、Dan Rudolph、Jerome Sather、James Schafer和Daniel Sweet教授．我还要感谢以下评审者：Bruce Barnes(俄勒冈大学)、John Van Eps(加州工艺州立大学圣路易斯-奥比斯波分校)、Christopher E. Hee(东密歇根大学)、Gordon Melrose(老道明大学)、Claudio Morales(亚拉巴马大学)、Harold R. Parks(俄勒冈州立大学)、Steven Michael Seubert(博林格林州立大学)、William Yslas Velez(亚利桑那大学)、Clifford E. Weil(密歇根州立大学)和W. Thurmon Whitney(纽海文大学)．真诚地感谢Jaya Nagendra小姐对手稿的录入．还要感谢PWS出版公司的编辑和出版人员，正是由于他们周到和专业的帮助才使本书顺利出版．我特别要感谢我的老师及我的学生．我很荣幸地成为拉特格大学John Bender教授的学生，他教授我数学分析．此外，他的鼓励还促使我终生致力于数学的研究，对他的感激之情无以言表．我还要特别感谢对此书做出贡献的一位学生——Alan Preis，他在手稿的最后准备阶段给了我很大的帮助，他的协助及模拟讨论使得枯燥的工作变成了一件有趣的事．

第2版致谢

我仍要感谢上面所感谢的人．此外，还要感谢阅读本书第1版后对本书提出建议的人．特别感谢David Calvis教授，他认真地审阅了本书的第1版和第2版的初稿．

对于第2版的出版，要特别感谢我的朋友及同事James A. Yorke．在2003~2004年度，他用本书教授了一学年的课程．这是他第一次上这门课，他为这门课投入了很大的精力，并批判地思考材料组织的各个方面．我们每周都要讨论几个小时，他对本书提出了许多改进意见，小到局部的阐述(使得学生更容易理解)，大至材料的组织．是他的鼓励使我最终完成了第2版的修订工作．

感谢我的同事Bob Pirtle、Katherine Cook、Cheryll Linthicum和Merrill Peterson，他们在我准备第2版的过程中给予了我很大的帮助和理解．

Patrick M. Fitzpatrick

目　录

预备知识

集合与函数

对于集合 A，元素 x 是 A 中的元用 $x \in A$ 或 x 在 A 中表示．x 不是 A 中的元用 $x \notin A$ 表示．A 的元常称为 A 中的点．两集合相同当且仅当它们有相同的元．集合通常用大括号表示．$\{x \mid x$ 满足的条件$\}$表示的是 x 的条件得到满足的那些元素的集合．

设 A 和 B 是两集合．当且仅当 A 的每个元素都是 B 的元时，称 A 是 B 的子集，用 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 表示．两个集合 A 和 B 的并是属于 A 或属于 B 的所有元素的集合，用 $A \cup B$ 表示．即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$．这里，或一词没有相互排斥的意思．因而，既属于 A 又属于 B 的点也属于 $A \cup B$．A 和 B 的交是同时属于 A 与 B 的所有点的集合，用 $A \cap B$ 表示．即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$．给定集合 A 及 B，A 在 B 中的余(complement)是属于 B 但不属于 A 的所有点的集合，用 $B \setminus A$ 表示．特别是，对于集合 B 和点 x_0，$B \setminus \{x_0\}$ 表示 B 中不等于 x_0 的点的集合．不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示．

给定两个集合 A 与 B，由 A 到 B 的函数是指一种对应，该对应把 A 中的每个点与 B 中的某个点相联系．通常用 $f: A \to B$ 表示这样一个函数，对于 A 中的每个点 x，在 B 中与它相联系的点用 $f(x)$ 表示．称集合 A 为函数 $f: A \to B$ 的定义域，定义 $f: A \to B$ 的象是 $\{y \mid y = f(x), x \in A\}$，用 $f(A)$ 表示．如果 $f(A) = B$，则称函数 $f: A \to B$ 是映上的．如果对 $f(A)$ 中的每个点 y，在 A 中有且恰有一个点 x，使得 $y = f(x)$，则称函数 $f: A \to B$ 是一对一的．函数 $f: A \to B$ 既是一对一的又是映上的，就称之为可逆的．对于可逆函数 $f: A \to B$，B 中的每一点 y，在 A 中有且恰有一点 x，使得 $f(x) = y$，该点用 $f^{-1}(y)$ 表示．这个对应定义了函数 $f^{-1}: B \to A$，称为函数 $f: A \to B$ 的反函数．

实数的域公理

为了进行严格的分析，就有必要理解分析赖以建立的基础．这个基础就是实数集，用 $\mathbb{R}$ 表示．当然，读者十分熟悉实数的许多性质．然而，为了弄清楚我们要讨论的基本知识，把 $\mathbb{R}$ 的性质加以整理是有益的．假定实数集 $\mathbb{R}$ 满足三组公理：域公理、正性公理及完备性公理．完备性公理可能是读者最不熟悉的，将推迟到第 1 章讨论．下面描述域公理与正性公理及它们的某些推论．

对每一对实数 a 与 b，定义一实数为 a 与 b 的和，记作 $a + b$．定义一实数为 a 与 b 的积，用 ab 表示．这些运算满足下面汇集的公理．

域公理

加法的交换性：对所有实数 a 与 b，

$$a + b = b + a.$$

加法的结合性：对所有实数 a，b 及 c，

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

加法单位元：存在一实数(用 0 表示)，对所有实数 a，满足

$$0+a=a+0=a.$$

加法逆元：对每个实数 a，存在一实数 b，满足

$$a+b=0.$$

乘法的交换性：对所有实数 a 与 b，

$$ab=ba.$$

乘法的结合性：对所有实数 a，b 及 c，

$$(ab)c=a(bc).$$

乘法单位元：存在一实数(用 1 表示)，对所有实数 a，满足

$$1a=a1=a.$$

乘法逆元：对每个实数 $a(\neq 0)$，存在一实数 b，满足

$$ab=1.$$

分配性质：对所有实数 a，b 及 c，

$$a(b+c)=ab+ac.$$

非平凡性假设：

$$1\neq 0.$$

域公理只不过是实数具有的性质的一个记录，这些性质被认为在实数的加法和乘法中总是存在的.

[2] 从域公理可以推出[⊖]：具有加法单位元公理中数 0 之性质的数只有一个．进而还可以推出：对每个实数 a，

$$a0=0a=0,$$

而对于任意的实数 a 与 b，

$$\text{如果 } ab=0, \text{则 } a=0 \text{ 或 } b=0.$$

加法逆元公理断定：对每个实数 a，方程

$$a+x=0$$

存在一个解．可以证明此方程只有一个解，称它为 a 的*加法逆元*，用 $-a$ 表示．对每一对实数 a 与 b，用

$$a-b\equiv a+(-b)$$

定义它们的*差*，用 $a-b$ 表示.

域公理也蕴涵具有乘法单位元公理中数 1 之性质的数只有一个．对每个数 $a\neq 0$，乘法逆元公理断定方程

$$ax=1$$

有一个解．可以证明只存在一个解，称它为 a 的*乘法逆元*，用 a^{-1} 表示．于是，对每一对实数 a 与 $b\neq 0$，定义它们的商为

⊖ “预备知识”中的这些论断以及后面的一些论断的验证将在附录 A 中给出.

$$\frac{a}{b} \equiv ab^{-1},$$

用 a/b 表示. 验证前面提到的域公理所蕴涵的结论及这些公理的下列为人们所熟知的推论是一种冗长乏味的代数练习：对任意的实数 a 及 $b \neq 0$，

$$-(-a) = a, \quad (b^{-1})^{-1} = b, \quad (-b)^{-1} = -b^{-1}.$$

实数的正性公理

在实数中存在着序的自然概念：大于、小于，等等. 通过说明正数集所满足的一组公理来界定有关的性质是较简便的方法.

正性公理

存在一实数集，称为正数集，用$\mathcal{P}$表示，它具有下列两条性质：

P1 如果 a 和 b 为正，则 ab 和 $a+b$ 也为正.

P2 对于实数 a，下列三个选项中只有一项成立：

$$a \text{ 为正}, \quad -a \text{ 为正}, \quad a = 0.$$

3

正性公理以自然的方式产生实数的序：对于实数 a 与 b，定义 $a>b$ 意味着 $a-b$ 为正，而 $a \geqslant b$ 意味着 $a>b$ 或者 $a=b$. 定义 $a<b$ 意味着 $b>a$，而 $a \leqslant b$ 意味着 $b \geqslant a$.

运用域公理及正性公理，可以证实以下人们熟知的不等式的性质(见附录 A)：

i. 对每个实数 $a \neq 0$，$a^2>0$. 特别地，由于 $1 \neq 0$ 且 $1=1^2$，因而 $1>0$.

ii. 对每个正数 a，它的乘法逆元 a^{-1}也是正数.

iii. 如果 $a>b$，则

$$ac > bc, \text{若 } c > 0,$$
$$ac < bc, \text{若 } c < 0.$$

区间记号

对每一对满足 $a<b$ 的实数 a 及 b，定义

$$(a,b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a,b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a,b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\},$$

以及

$$[a,b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}.$$

另外，以下列的方式使用符号∞及$-\infty$是方便的. 定义

$$[a,\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty,b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\},$$
$$(a,\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty,b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$

以及

$$(-\infty,\infty) \equiv \mathbb{R}.$$

读者应格外留意下列事实：虽然已定义了比如说$[a, \infty)$，但并未定义符号∞及$-\infty$. 特

别是，并未将∞及$-\infty$作为另外的数加到$\mathbb{R}$中.

为方便起见，规定$[a, a] \equiv \{a\}$. 通常，当我们写$[a, b]$或(a, b)等时，除非特别声明，一般都假定a与b是满足$a<b$的实数.

以上列出的每一个集合都称为一个区间. 在分析函数$f: A \to \mathbb{R}$(其中A为实数集)时，以区间作为其定义域A的函数扮演着特别的角色. 特别地，形如(a, b)的区间(称为开区间)或形如$[a, b]$的区间(称为闭区间)常作为我们所研究的函数的定义域.

第1章　分析的工具

1.1　完备性公理和它的某些推论

对数学分析的准确理解必须建立在对实数集真正理解的基础上. 本章的目的在于证实实数集$\mathbb{R}$的基本性质，并描述一些实数的特殊子集(自然数、整数及有理数与无理数等)所具有的性质，同时建立一些基本不等式与代数恒等式.

实数的加法与乘法的性质已在“预备知识”中的域公理中列出. 对实数集也提出序的概念，序及不等式的性质也已在预备知识中作为正性公理列出. 实数的许多有趣性质可以作为域公理与正性公理的推论. 然而，一个附加的公理是必要的. 为说明这一点，我们现在引进一些$\mathbb{R}$的特殊子集.

我们从定义自然数开始，当然这些是读者所熟知的. 自然数是数1，2，3，等等. 但为使陈述更加精确，我们引进归纳集(inductive set)这一概念.

定义　实数的集合S称为归纳的，如果

i. 数1在S内.

ii. 若数x在S内，则数$x+1$也在S内.

整个实数集$\mathbb{R}$是归纳的. 同样，运用数1大于数0这一事实，集$\{x$在$\mathbb{R}$内$\mid x\geqslant 0\}$是归纳的，集$\{x$在$\mathbb{R}$内$\mid x\geqslant 1\}$也是归纳的. 自然数集(记作$\mathbb{N}$)定义为$\mathbb{R}$中所有归纳子集的交集. 集$\mathbb{N}$自身是归纳的. 为说明这一点，注意到由于数1属于每一个归纳集，故数1属于$\mathbb{N}$. 更进一步，如果数k属于$\mathbb{N}$，则k属于每一个归纳集，这样$k+1$属于每一个归纳集，因此$k+1$属于$\mathbb{N}$. 因此$\mathbb{N}$是归纳的，由定义知，它包含在每一个其他的归纳集中. 这样，

$$\text{如果 } A \text{ 是归纳的自然数集,则 } A=\mathbb{N}. \tag{1.1}$$

基于这一性质的论证经常出现，可以形式化如下.

数学归纳法原理　对每个自然数n，令$S(n)$是某个数学断言. 假设$S(1)$是正确的. 同时，假设k是使$S(k)$正确的自然数，则$S(k+1)$也是正确的. 那么，$S(n)$对任一自然数n是正确的.

证明　定义$A\equiv\{k$在$\mathbb{N}$中$\mid S(k)$是正确的$\}$. 精确地说，这样的假设意味着A是$\mathbb{N}$的归纳子集. 按照(1.1)，$A=\mathbb{N}$. 这样，$S(n)$对每个自然数n是正确的. ■

例1.1　对每个自然数n，

$$\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}.$$

我们用数学归纳法原理证明它. 对自然数n，令$S(n)$表示上述公式成立. 显然$S(1)$正确. 假设k是自然数且使得$S(k)$是正确的，即

$$\sum_{j=1}^{k} j=\frac{k(k+1)}{2}.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \left[\sum_{j=1}^{k} j\right] + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

即 $S(k+1)$ 是正确的. 由数学归纳法原理，上述求和公式对所有自然数 n 是成立的. ■

正如所期待的，对于自然数 m 与 n，

- 和 $m+n$ 是自然数，
- 积 $m \cdot n$ 是自然数.

6

我们把它作为练习留给读者，要求用数学归纳法原理证明自然数的和与积仍是自然数(习题 6).

定义整数集(记为$\mathbb{Z}$)为由自然数和它们的负数以及数 0 组成的数集. 正如我们期待的，对整数 m 与 n，

- 和 $m+n$ 是整数，
- 差 $m-n$ 是整数，
- 积 $m \cdot n$ 是整数.

仍把这些留给读者作为习题，要求用自然数的和与积的性质证实整数的上述三个性质(习题 9).

有理数集(记为$\mathbb{Q}$)定义为整数的商的集合，即具有形式 $x=m/n$(其中 $n \neq 0$，m，n 是整数)数 x 的集合. 一个实数如果不是有理的，则称为*无理数*. 目前我们没有存在任何无理数的证据.

由于整数的和、差与积仍是整数，所以现在证明有理数集$\mathbb{Q}$满足域公理略显乏味，但实际上并不困难(习题 10). 然而，尽管有理数集具有逻辑上衔接的代数结构，但仅用有理数来建立微积分是不可能的. 例如，若一多项式既能取正值又能取负值，应该可以推出它也能取到数值 0 这一结论. 而如果只考虑有理数的话，上述结论就不能成立. 例如，考虑对所有实数 x，由 $p(x)=x^2-2$ 所定义的多项式，则 $p(0)<0$ 及 $p(2)>0$. 但自古以来人们都知道，不存在有理数 x 满足 $x^2=0$，即不存在有理数 x 满足 $p(x)=0$. 在给出这个断言的经典证明之前，先注意整数的如下两个性质：

i. 每个有理数 x 可以表示为 $x=m/n$，其中 m，n 是整数且 m 或 n 是奇数.

ii. 对一个整数 n，若 n^2 是偶数，则 n 是偶数.

整数的基本性质(包括上面这两条)的证明，在 1.3 节的习题 26 给出了概要.

命题 1.2 *不存在平方等于 2 的有理数.*

证明 这个证明依赖于上面提到的整数的两个性质. 设命题为假，然后推出一个矛盾. 假设存在有理数 x 使得 $x^2=2$. 由上述性质(i)知可将 x 表示为 $x=m/n$，其中 m 和 n 是整数且两者必有一个为奇数. 由 $m^2/n^2=2$ 得 $m^2=2n^2$，于是 m^2 是偶数，所以由性质(ii) m 也是偶数. 现将 m 表示为 $m=2k$，其中 k 为整数，则由 $m^2=2n^2$ 得 $4k^2=2n^2$，因而 n^2 是偶数，所以由上面的性质(ii)知 n 也是偶数. 这样 m 与 n 就都是偶数. 但我们最初是选择它们之中至少应有一个为奇数.

7

命题为假这一假设导致一个矛盾，所以命题必为真. ■

于是，不存在使得 $x^2=2$ 的有理数，因此如果我们一定让自己只限于有理数，那么甚至连一个最简单的几何结果(即多项式的图形与 x 轴有交点，也就是 $x^2-2=0$ 的点)都不能证明. 还有更糟糕的，如果我们只限于有理数，甚至连毕达哥拉斯(Pythagorean)定理也不成立：设 r 是直角三角形的斜边的长，而它的另外两条直角边的长度为1，则 $r^2=2$，这样斜边的长度不是有理数. 如图1.1所示.

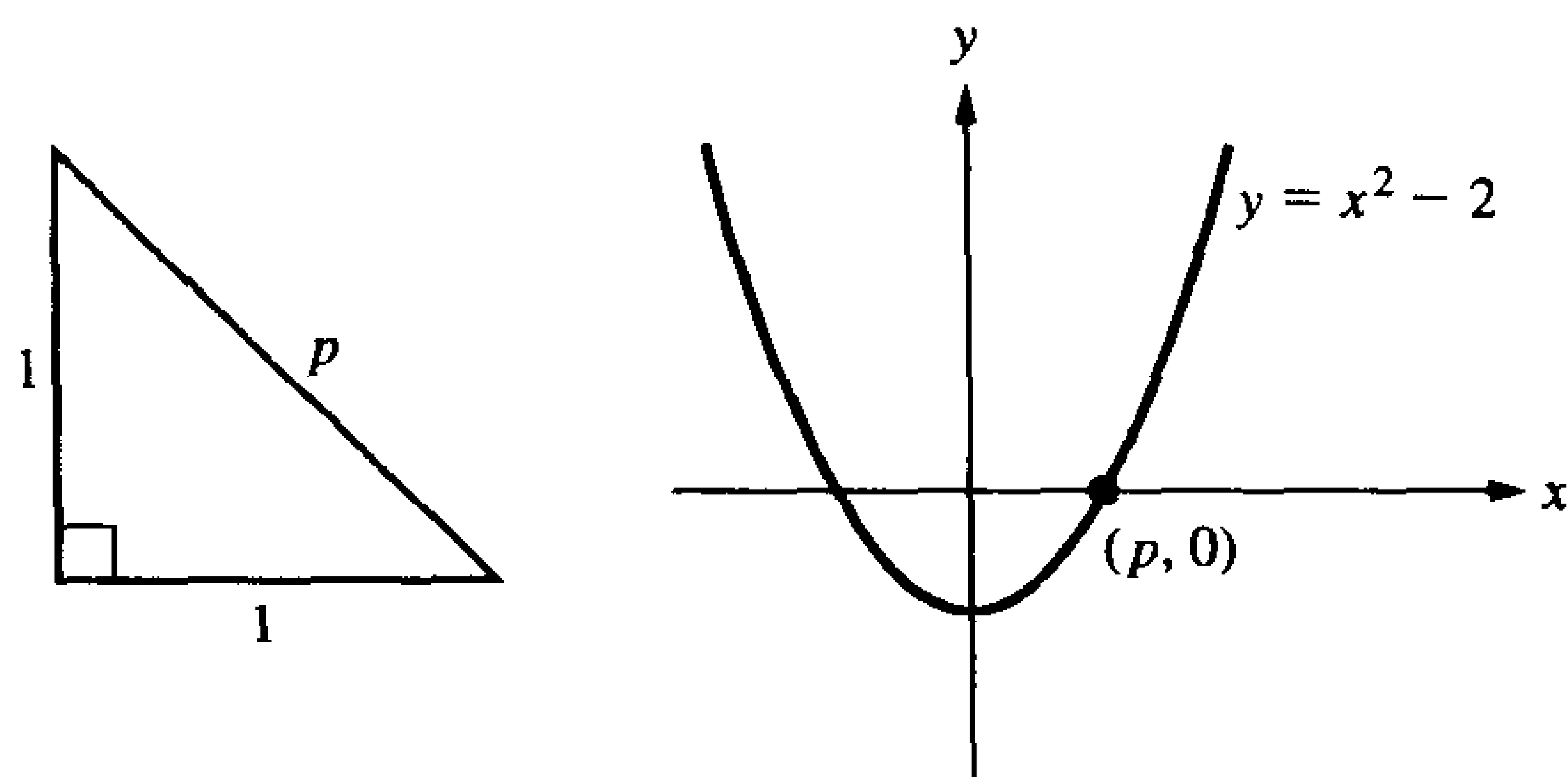


图1.1 $p^2=2$ 及 p 不是有理数

为了至少确保存在平方等于2的实数，我们需要另外的公理，即完备性公理. 为陈述这一公理，需要引入界的定义.

定义 非空实数集 S 称为有上界，如果存在具有如下性质的数 c：

$$\text{对一切 } x \in S, \quad x \leqslant c.$$

这样的数 c 称为 S 的一个上界(upper bound).

显然，如果数 c 是集 S 的一个上界，则每个大于 c 的数也是该集的上界. 对于有上界的非空实数集 S 来说，在其所有上界之中应当存在一个最小上界的理由并不明显. 事实上，存在这样一个最小上界的断言是实数的最后一个公理.

完备性公理 设 S 是一个有上界的非空实数集，则在 S 的上界集之中存在最小上界(least upper bound).

对于有上界的非空实数集 S，S 的最小上界(其存在性由完备性公理推出)将用 l. u. b. S 表示. 有时 S 的最小上界也称为 S 的上确界(supremum)，用 sup S 表示，这样，

sup S 或 l. u. b. S 表示集 S 的最小上界.

[8]

值得注意的是，如果 b 是集 S 的一个上界，则为了验证 $b=\sup S$，就有必要证明 b 是小于 S 的任何其他的上界，这等价于证明每个小于 b 的数都不是 S 的上界.

初看起来，完备性公理对研究数学分析没有多大用处. 事实上，完备性公理在数学分析的发展上是必不可少的. 作为其重要性的一个实例，命题1.2断言不存在平方等于2的有理数，而完备性公理保证存在这样一个必定是无理数的数，它的平方是2. 事实上，集

$$S \equiv \{x \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 内} \mid x \geqslant 0, x^2 < 2\}$$

是非空的. 此外，S 也是有界的，这是由于，如果 $x\geqslant 0$ 及 $x^2<2$，则 $x\geqslant 0$ 及 $x^2<2^2$，所以 $x<2$. 这样2是 S 的上界. 完备性公理保证集 S 有最小上界 b. 事实上，$b^2=2$，虽然这并不明显. 在习题17中给出了上述断言的证明概要. 此外，有下述关于平方根存在性的一般命题.

命题 1.3 令 c 是一个正数，则存在一个(唯一的)正数，它的平方是 c，即方程

$$x^2 = c, \quad x > 0$$

有唯一解.

我们把这个命题的存在性部分的证明概要写于习题 17 中. 在第 3 章中将会看到存在性部分是一个称为中值定理的更为一般结果的推论. 命题的唯一性部分的证明如下：若 a，b 是两个正数，每一个的平方是 c，则 $0 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. 由于 $a+b>0$，这就得到 $a=b$. 通常用$\sqrt{c}$表示其平方是 c 的正数. 定义$\sqrt{0}\equiv 0$[⊖].

定义 非空实数集 S 称为有下界，如果存在具有如下性质的数 b：

$$\text{对一切}\ x \in S, \quad b \leqslant x.$$

这样的数 b 称为 S 的一个下界(lower bound). 集合 S 称为是有界的，如果它既有下界又有

9

上界.

显然，如果数 b 是集 S 的一个下界，则每个小于 b 的数也是 S 的下界. 可用完备性公理证明对于有下界的非空实数集来说，在其所有下界之中存在一个最大下界，用 g. l. b. S 表示. 有时 S 的最大下界称为 S 的下确界(infimum)，用 $\inf S$ 表示.

定理 1.4 设 S 是一个有下界的非空实数集，则在 S 的下界集之中存在最大下界.

证明 考虑集 S 关于数 0"反射"而得到的集，即考虑集 $T\equiv\{x\in\mathbb{R} \mid -x\ \text{在}\ S\ \text{中}\}$. 如图 1.2 所示.

对任意数 x，$b\leqslant x$ 当且仅当 $-x\leqslant -b$. 因而数 b 是 S 的下界当且仅当数 $-b$ 是 T 的上界. 由于已假定集 S 有下界，所以集 T 有上界. 完备性公理断定集 T 存在最小上界，用 c 表示. 因为 S 的下界是作为 T 的上界的负数出现的，所以 $-c$ 是 S 的最大下界.

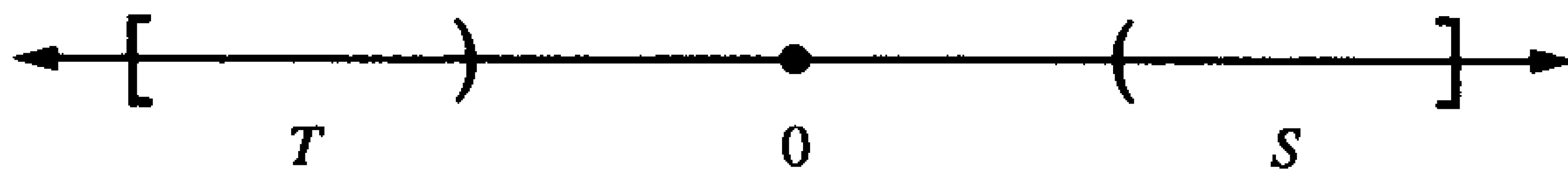


图 1.2 集 S 关于 0 的反射 ■

习题

1. 对以下每一个陈述，确定它们的真假并说明理由.
   a. 无理数集是归纳的.
   b. 有理数的平方组成的集是归纳的.
   c. 无理数的和是无理数.
   d. 无理数的积是无理数.
   e. 若 n 是自然数且 n^2 是奇数，则 n 是奇数.
2. 对以下每一个陈述，确定它们的真假并说明理由.
   a. 实数的每一个非空集如有上界，则它有一个最大数.
   b. 若 S 是一个非空正实数集，则 $0\leqslant\inf S$.

⊖ 我们已证明$\sqrt{2}$是无理数. 事实上，下面更一般的结果成立：对任意自然数 n 与 m，若 n 的 m 次根$\sqrt[m]{n}$不是自然数，则它一定是无理数. 这一事实的证明依赖于素因子分解定理：任一自然数可唯一地表示成素数幂的乘积. 这个定理的证明可参见 I. N. Herstein 的书《Topics in Algebra, 3rd. ed.》(New York: John Wiley and Sons, 1996).

c. 若 S 是一个上有界实数集，B 是 S 的一个非空子集，则 $\sup B \leqslant \sup S$.

3. 用数学归纳法原理证明：对自然数 n，

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10

4. 令 n 是自然数. 对和 $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)$ 寻找一个公式.

5. 令 n 是自然数. 证明

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

6. 令 m，n 是自然数.

   a. 证明和 $m+n$ 是自然数.（提示：固定 m，定义 $S(n)$ 是陈述：$m+n$ 是自然数.）

   b. 证明积 mn 是自然数.（提示：固定 m，定义 $S(n)$ 是陈述：mn 是自然数.）

7. 证明：如果 n 是大于 1 的自然数，则 $n-1$ 也是自然数.（提示：证明集 $\{n \mid n=1$ 或 n 与 $n-1$ 在 $\mathbb{N}$ 中$\}$ 是归纳的.）

8. 证明：如果 n 与 m 是自然数，满足 $n>m$，则 $n-m$ 也是自然数.（提示：对 m 用归纳法证明，利用习题 7.）

9. 利用习题 8 证明整数的和、差及积仍是整数.

10. 运用习题 9 证明有理数满足域公理.

11. a. 证明一个有理数与一个无理数的和必是无理数.

    b. 证明两个非零数(其中之一是有理数，另一个是无理数)的积是无理数.

12. 运用命题 1.2 证明不存在平方等于 2/9 的有理数.

13. 设 S 为实数的一个非空集且有界. 证明 $\inf S \leqslant \sup S$.

14. 假设 S 是实数的一个非空集且有界，$\inf S = \sup S$. 证明集 S 仅由一个元组成.

15. 对数集 S，S 的元 c 称为 S 的极大元(maximum)，如果 c 是 S 的一个上界，证明：数集 S 具有极大元当且仅当 S 上有界且 $\sup S$ 属于 S. 给出数集 S 的一个例子，它是非空数集且有上界，但没有极大元.

16. 证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.（提示：运用命题 1.2 的证明思路.）

17. (命题 1.3 的证明概要)定义

$$S \equiv \{x \mid x \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 内}, x \geqslant 0, x^2 < c\}.$$

   a. 证明 $c+1$ 是 S 的一个上界，因而由完备性公理，S 有最小上界，记为 b.

   b. 证明：如果 $b^2 > c$，则可选取适当小的正数 r，使得 $b-r$ 仍是 S 的上界，这样与 b 是最小上界的选取相矛盾.

   c. 证明：如果 $b^2 < c$，则可选取适当小的正数 r，使 $b+r$ 属于 S. 这样与 b 是 S 的上界的选取相矛盾.

   d. 利用(b)与(c)及 $\mathbb{R}$ 的正性公理推出结论 $b^2 = c$.

11

18. 证明存在正数 x 满足 $x^3 = 5$.（提示：参考习题 17 的证明概要.）

19. 定义 $S \equiv \{x \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 中} \mid x^2 < x\}$. 证明 $\sup S = 1$.

20. a. 对实数 a 与 b. 假设 x 是方程

$$(x-a)(x-b) = 0$$

   的解. 证明：$x=a$ 或 $x=b$.

   b. 对正数 c，证明：若数 x 满足 $x^2 = c$，则 $x=\sqrt{c}$ 或 $x=-\sqrt{c}$.

   c. 令 a，b，c 是实数，且 $a \neq 0$，考虑二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

证明：数 x 是这个方程的解当且仅当

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

假设 $b^2-4ac>0$. 证明二次方程恰有两个解

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

d. 在(c)中假设 $b^2-4ac<0$，证明此时二次方程无实数解.

1.2 整数与有理数的分布

本节的主要目的在于建立以下两个定理，它们是关于整数与有理数在实数中的分布的.

整数的分布 对任意数 c，

$$在区间[c,c+1)内存在唯一的整数. \tag{1.2}$$

有理数的分布 对任意数 a 与 b，若 $a<b$，

$$在区间(a,b)内存在有理数. \tag{1.3}$$

实数有一个性质称为阿基米德性质，它是(1.2)与(1.3)的基础. 我们的方法是先证明阿基米德性质，随后用这个性质去构造(1.2)与(1.3)的证明.

[12]

定理 1.5(阿基米德性质[⊖]) 下述两个等价的性质是成立的：

i. 对任一正数 c，有自然数 n 满足 $n>c$.

ii. 对任一正数 ε，有自然数 n 满足 $1/n<\varepsilon$.

证明 首先，我们观察到上述两个性质是等价的. 事实上，设有由

$$\varepsilon=1/c$$

关联的两个正数 c 与 ε，对自然数 n，

$$n>c \quad 当且仅当 1/n<\varepsilon.$$

这样，性质(i)成立当且仅当性质(ii)成立.

现在来证明性质(i). 假设这个性质不成立，然后得出一个矛盾. 所以假设有一正数 c，不存在大于 c 的自然数. 由正性公理可推知

$$n\leqslant c \quad 对任一自然数.$$

这样，自然数集 $\mathbb{N}$ 上有界. 由完备性公理知 $\mathbb{N}$ 有最小上界，记为 b.

由于 b 是 $\mathbb{N}$ 的最小上界，数 $b-1/2$ 不是 $\mathbb{N}$ 的上界. 这样，可选取一个自然数 $n>b-1/2$，因而

$$n+1>(b-1/2)+1>b.$$

所以自然数 $n+1$ 大于 b. 这与 b 是 $\mathbb{N}$ 的上界的选取相矛盾. 这个矛盾证明了该结果. ■

命题 1.6 对任一整数 n，

$$在开区间(n,n+1)内不存在任何整数.$$

证明 先考虑情况 $n=0$. 集 $\{k \mid k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 1\}$ 是自然数的归纳集，它即是 $\mathbb{N}$，因此对任意自然数 k，$k\geqslant 1$. 由于每个正整数是自然数，可知开区间(0，1)不含有整数. 现在考虑一般

[13]

⊖ 我们遵从传统，把这一性质称为阿基米德性质，然而在手稿中，阿基米德坦言此性质归功于另一个希腊数学家伍多克沙斯(Eudoxos)，他早于阿基米德100年. 而且，这一性质在欧几里得的几何书上明确地表达成命题. 这个命题如下：对任意两个正数 a 与 b，存在自然数 n 使得 $na>b$.

整数 n，我们采用反证法．假设有整数 $k\in(n,\ n+1)$，则

$$n<k<n+1,\quad 所以\quad 0<k-n<1.$$

正如我们已经知道的，两个整数的差仍是整数．这样，$k-n$ 在区间$(0,\ 1)$内是整数．但刚刚证明这是不可能的．因此，$(n,\ n+1)$含有整数的假设导致矛盾．这样，区间$(n,\ n+1)$不包含任何整数． ■

命题 1.7 假设整数的非空集合 S 是上有界的，则 S 有最大元.

证明 按完备性公理，集 S 有最小上界．定义

$$a\equiv\sup S.$$

因为数 a 是集 S 的最小上界，所以 $a-1$ 不是 S 的上界，故 S 中有数 m 满足 $a-1<m$．因此 $a<m+1$，又因为 a 是 S 的上界，所以有包含式

$$S\subset(-\infty,m+1).$$

因为 S 是整数集，m 是整数以及由命题 1.6，区间$(m,\ m+1)$中无 S 的元．因此得到改进的包含式

$$S\subset(-\infty,m].$$

这样，m 是 S 的最大元． ■

应该清晰地注意到，上面的定理是关于整数集的．一般说来，完备性公理断言上有界的非空实数集有上确界：这样的集未必有最大元，因为集的上确界不一定是此集的元素．

定理 1.8 对任一数 c，在区间$[c,\ c+1)$内恰存在一个整数 k.

证明 定义

$$S\equiv\{n\mid n\in\mathbb{Z},n<c+1\}.$$

首先证明集 S 是非空的．如果 $c+1\geqslant0$，则 0 属于 S．如果 $c+1<0$，则阿基米德性质断言存在自然数 n 满足 $n>-(c+1)$，所以 $-n<c+1$，且 $-n$ 是整数．因此 $-n$ 属于 S．这样，集 S 非空．由定义知 $c+1$ 是 S 的上界，所以 S 是上有界的．由前述命题知 S 有最大元．令 k 是 S 的最大元．因此 $k\geqslant c$，否则 $k<c$，从而 $k+1<c+1$，这与 k 是小于 $c+1$ 的最大整数相矛盾．这样，k 属于区间$[c,\ c+1)$. [14]

这样的整数在区间$[c,\ c+1)$中只有一个．事实上，否则会有两个整数 k 与 k'同属区间$[c,\ c+1)$，设 $k<k'$，则

$$0<k'-k,$$

而

$$因为\ k'<c+1\ 及\ k\geqslant c,k'-k<[c+1]-c=1.$$

这就得出 $k'-k$ 是$(0,\ 1)$内的一个整数，这与命题 1.6 相矛盾．这样，在区间$[c,\ c+1)$中恰有一个整数． ■

定义 $\mathbb{R}$ 中的实数集 S 称为稠密的(dense)，如果每一区间 $I=(a,\ b)$(其中 $a<b$)包含 S 的元.

定理 1.9 有理数集在$\mathbb{R}$ 内是稠密的.

证明 令 a，b 为实数且 $a<b$．我们需证明区间$(a,\ b)$包含有理数．由阿基米德性质，可

选取一自然数 n，满足

$$1/n < b - a,$$

所以 $1/n$ 小于区间(a, b)的长度. 由定理1.8，应用于 $c \equiv nb - 1$，在区间$[nb-1, nb)$中存在整数 m. 这样，

$$nb - 1 \leqslant m < nb,$$

对此式两边除以 n，给出

$$b - 1/n \leqslant m/n < b. \tag{1.4}$$

但 $1/n < b - a$，所以

$$a = b - (b - a) < b - 1/n. \tag{1.5}$$

由不等式(1.4)及(1.5)可得有理数 m/n 属于区间(a, b). ■

推论 1.10 *无理数集在$\mathbb{R}$内稠密.*

证明 无理数的稠密性可由有理数的稠密性及正无理数的存在性得出. 事实上，给定区间 15 (a, b)，选取一个正的无理数 z，例如取 $z = \sqrt{2}$. 由有理数的稠密性知，存在一个有理数 x 位于区间$(a/z, b/z)$内，所以 zx 位于区间(a, b)内. 因为 zx 是一个无理数与一个有理数的积，所以 zx 是无理数. ■

习题

1. 对以下陈述，确定它的真与假并说明理由.
   a. 整数集$\mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$内稠密.
   b. 正实数集在$\mathbb{R}$内稠密.
   c. 全体有理数但不是整数组成的集$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$内稠密.
2. 假设 S 是整数的一个非空集合且有下界. 证明 S 有最小元. 特别地，可得出自然数的每一个非空集合有最小元.
3. 设 S 是实数的一个非空集合且有下界. 证明此集有最小元当且仅当 $\inf S$ 属于 S.
4. 对下述两个集中的每一个求出最大元、最小元、下确界及上确界(如果它们是可定义的)，并验证你的结论.
   a. $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$
5. 假设数 a 具有性质：对每个自然数 n，$a \leqslant 1/n$. 证明 $a \leqslant 0$.
6. 给定一个实数 a，定义 $S \equiv \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < a\}$. 证明 $a = \sup S$.
7. 对任一实数 c，证明在区间$(c, c+1]$内恰存在一个整数.
8. 证明阿基米德性质是以下论断的一个推论：对任一实数 c，在区间$[c, c+1)$内存在一个整数.
9. 证明阿基米德性质是以下论断的一个推论：每一区间(a, b)含有一个有理数.

1.3 不等式与恒等式

对实数 x，回忆它的绝对值(记为$|x|$)定义为

$$|x| \equiv \begin{cases} x & \text{当 } x \geqslant 0 \\ -x & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

由此定义及$\mathbb{R}$的正性公理直接可得：如果 c 与 d 是任意两个数，且 $d \geqslant 0$，则

$$|c| \leqslant d \quad \text{当且仅当} \quad -d \leqslant c \leqslant d. \tag{1.6}$$

16

此外，对任意数 x，有

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|. \tag{1.7}$$

给定一对实数 a 与 b，常需估计 $|a+b|$ 的大小. 下面的不等式是基本工具.

定理 1.11（三角不等式） 对任意一对数 a 与 b，有

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

证明 运用(1.6)可知，三角不等式等价于

$$-|a|-|b| \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|. \tag{1.8}$$

但在(1.7)中令 $x=a$，随后再令 $x=b$，可得到

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \quad \text{及} \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

由此及加法即得到(1.8)式，从而得到三角不等式. ■

下述命题是十分有用的.

命题 1.12 对数 a 及正数 r，下述关于数 x 的三个论断是等价的：

i. $|x-a| < r$.

ii. $a-r<x<a+r$.

iii. x 属于开区间 $(a-r, a+r)$.

证明 (i)与(ii)的等价性来自于(1.6)，而(ii)与(iii)的等价性来自于区间 $(a-r, a+r)$ 的定义. ■

在分析中许多论证的中心是对诸如商、差及和进行大小估计及对诸多的代数表达式进行简化. 作为三角不等式的一个相伴的工具，我们将建立三个有用的代数恒等式.

17

对自然数 n 及任意数 a，通常用 a^n 表示 a 自乘 n 次的积.

注意，下面平方差与立方差的公式：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad \text{及} \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

它们是下述公式的特殊情况.

幂差公式 对任意自然数 n 及任意数 a 与 b，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

把右边部分展开很容易验证这个公式. 事实上，

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\\
&=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}\\
&\quad -a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-\cdots-a^2b^{n-2}-ab^{n-1}-b^n\\
&=a^n-b^n.
\end{aligned}$$

在幂差公式中，如取 $a\equiv 1$，令 $b\equiv r\neq 1$，用 $n+1$ 代替 n，随后两边除以 $1-r$ 便得下述重要恒等式.

几何和公式 对任意自然数 n 及任意数 $r\neq 1$，

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

这个公式在第8、9章里把函数表示成幂级数时是经常要使用到的. 它在验证许多算法时扮演着重要的角色.

若有一个用数 a 的幂与 b 的幂表示的 a 与 b 的和的幂公式是十分有用的. 为陈述这一公式，需要引进阶乘记号. 对每个自然数 n，定义 n 的阶乘(factorial)如下：定义 $1!\equiv 1$，若对自然数 k 已定义了 $k!$，则定义 $(k+1)!\equiv(k+1)\cdot k!$. 由数学归纳法原理，符号 $n!$ 是对所有自然数 n 定义的. 为方便起见，定义 $0!\equiv 1$. 现在，我们对每一对非负整数 n 及 k(其中 $n\geqslant k$)引进二项式系数(binomial coefficient)$\binom{n}{k}$，由下式定义：

$$\binom{n}{k}\equiv\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

18

我们有 $(a+b)^n$ 的下述公式，在习题21与22中给出了证明概要.

二项式公式 对每个自然数 n 及每一对数 a 与 b，

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

我们通过回忆求和记号来结束关于代数恒等式的讨论. 对自然数 n 及数 a_0，a_1，$\cdots$，a_n，定义

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\equiv a_0+a_1+\cdots+a_n.$$

这个记号可以缩短许多公式. 例如，运用这个求和记号，三个代数公式可以描述如下.

幂差公式

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k.$$

几何和公式

$$\sum_{k=0}^{n}r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\quad 若\ r\neq 1.$$

二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

习题

1. 对 $n=4$，5，明确写出幂差公式.
2. 对 $n=2$，3及4，明确写出二项式公式.
3. 证明：若 a，b 有相同符号，则三角不等式变成一等式.
4. 令 $a>0$，证明：如果 x 满足 $|x-a|<a/2$，则 $x>a/2$.
5. 令 $b<0$，证明：如果 x 满足 $|x-b|<|b|/2$，则 $x<b/2$.
6. 下述不等式中哪一个对所有数 a，b 皆成立？验证你的结论.
   a. $|a+b|\geqslant|a|+|b|$.
   b. $|a+b|\leqslant|a|-|b|$.

7. 由 $a=(a+b)+(-b)$，运用三角不等式得出 $|a|-|b|\leq|a+b|$. 随后，交换 a 与 b 证明

$$||a|-|b||\leq|a+b|.$$

19

接着以 $-b$ 代替 b 得出

$$||a|-|b||\leq|a-b|.$$

8. 设 a 与 b 满足 $|a-b|\leq 1$. 证明 $|a|\leq|b|+1$.

9. 对自然数 n 及任意两个非负数 a 与 b，用幂差公式证明

$$a\leq b \quad 当且仅当 \quad a^n\leq b^n.$$

10. 对自然数 n 及数 a 与 b，其中 $a\geq b\geq 0$，证明

$$a^n-b^n\geq nb^{n-1}(a-b).$$

11. (伯努利(Bernoulli)不等式)对自然数 n 及非负数 b，证明

$$(1+b)^n\geq 1+nb.$$

(提示：在二项式公式中令 $a=1$.)

12. 用数学归纳法原理对伯努利不等式且在 $b>-1$ 而不是 $b\geq 0$ 时恒有

$$(1+b)^n\geq 1+nb$$

作直接的证明.

13. 对任一自然数 n 及非负数 b，证明

$$(1+b)^n\geq 1+nb+\frac{n(n-1)}{2}b^2.$$

14. (柯西不等式)用实数的平方非负的事实证明对任意数 a 与 b 有

$$ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

15. 用柯西不等式证明，如果 $a\geq 0$ 及 $b\geq 0$，则

$$\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}(a+b).$$

16. 用柯西不等式证明，对任意数 a 与 b 及自然数 n，

$$ab\leq\frac{1}{2}\left(na^2+\frac{1}{n}b^2\right).$$

(提示：在柯西不等式中以 $\sqrt{n}a$ 代替 a 及 $b/\sqrt{n}$ 代替 b.)

17. 设 a，b 及 c 为非负数. 证明下列不等式：

  a. $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$.

  b. $8abc\leq(a+b)(b+c)(c+a)$.

  c. $abc(a+b+c)\leq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

20

18. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为**严格递增的**，倘若对满足 $u>v$ 的数 u 及 v 有 $f(u)>f(v)$.

  a. 对一切 x，定义 $p(x)=x^3$. 证明多项式 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是严格递增的.

  b. 固定数 c，对一切 x，定义 $q(x)=x^3+cx$. 证明多项式 $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 严格递增当且仅当 $c\geq 0$. (提示：对于 $c<0$，为理解为什么多项式 $q(x)$ 不严格递增，可考虑其曲线图，然后证明它不递增.)

19. 设 n 是自然数而 a_1，a_2，…，a_n 是正数. 证明：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

及

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1})\geq n^2.$$

20. 用几何和公式对下述式子求公式.

  a. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

b. 若 $a\neq 0$，证明

$$\frac{1}{a}=1+(1-a)+(1-a)^2+\frac{(1-a)^3}{a}.$$

21. 证明：如果 n 与 k 是满足 $k\leqslant n$ 的自然数，则

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}.$$

22. 用上题中的公式给出二项式公式的一个归纳法证明.

23. 设 a 是非零数而 m 与 n 是整数. 证明下列等式：

a. $a^{m+n}=a^m a^n$.

b. $(ab)^n=a^n b^n$.

24. 自然数 n 称为偶数，如果可将它写成 $n=2k$，其中 k 是某个另外的自然数；而 n 称为奇数，如果 $n=1$ 或者 $n=2k+1$，其中 k 是某个另外的自然数.

a. 证明每个自然数 n 或者是奇数或者是偶数.

b. 证明：如果 m 是自然数，则 $2m>1$.

c. 证明自然数 n 不能既是奇数又是偶数.（提示：运用(b).）

d. 假设 k_1，k_2，ℓ_1 及 ℓ_2 是自然数，其中 ℓ_1 与 ℓ_2 是奇数. 证明：若 $2^{k_1}\ell_1=2^{k_2}\ell_2$，则 $k_1=k_2$ 且 $\ell_1=\ell_2$.

25. a. 证明：如果 n 是自然数，则 $2^n>n$.

b. 证明：如果 n 是自然数，则

21

$$n=2^{k_0}\ell_0,$$

其中 ℓ_0 是某个奇自然数而 k_0 为某个非负整数.（提示：如果 n 为奇数，令 $k=0$ 及 $\ell=n$；如果 n 是偶数，由(a)，令 $A=\{k\in\mathbb{N}\mid n=2^k\ell,\ 其中\ \ell\in\mathbb{N}\}$，$A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$. 选择 k_0 是 A 的最大值.）

26. 证明上述两道习题足以证明在 $\sqrt{2}$ 的无理性证明之前关于整数的两条性质(i)与(ii)的有关推断.

22

27. 形如 $m/2^n$（其中 m 与 n 为整数）的实数称为二进有理数. 证明二进有理数的数集在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的.

第2章 收敛序列

2.1 序列的收敛

在实变量的实值函数分析中，两个中心论题是以实数区间为定义域的函数的微分法与积分法. 但是，实数序列也是重要的. 要理解数的与函数无穷级数，序列的研究是必不可少的. 此外，序列的性质在一般函数的连续性、微分法以及积分法的研究中起着重要作用. 本章将研究实数序列的性质，以便为后面讨论一般函数的连续性、微分法与积分法奠定基础.

定义 *实数序列是定义域为自然数集的实值函数.*

由于在前九章中只考虑实数序列，所以把实数序列简写为序列. 此外，习惯上使用 a_n 取代 $f(n)$ 来表示序列，而不用标准的函数记号(如 f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$)表示序列，即用 $\{a_n\}$ 表示序列. 自然数 n 称为序列的下标(index)，与下标 n 相伴的数 a_n 称为序列的第 n 项(term).

序列的例子

通常序列用显式公式定义. 例如 $\{1/n\}$ 表示于每个下标 n 的第 n 项是 $1/n$ 的序列. 而序列 $\{1+(-1)^n\}$ 则表示对于每个下标 n 的第 n 项是 $1+(-1)^n$，所以当下标 n 为奇数时，该序列的第 n 项等于0，当 n 是偶数时，第 n 项等于2.

序列也常以非显式的方式定义，如下面例子所示.

例 2.1 对每个下标 n，定义 a_n 是小于或等于 $\sqrt{n^3}$ 的最大自然数. 在1.2节中已证明，任一有上界的非空整数集有最大元. 所以对每个自然数 n，存在小于或等于 $\sqrt{n^3}$ 的最大自然数. 因此序列 $\{a_n\}$ 是完全定义了的. 我们将求此序列的前四项留给读者作为练习. ■

现在给出一个*递归地*定义序列 $\{a_n\}$ 的例子. 即序列先定义第一项 a_1，然后对自然数 n，在其第 n 项 a_n 已定义的情况下，定义它的第 $n+1$ 项 a_{n+1}. 根据数学归纳法原理，对每个下标 n，定义了序列的第 n 项 a_n，于是序列 $\{a_n\}$ 是被完全定义的.

例 2.2 定义 $a_1=1$. 若 n 是使得 a_n 已得到定义的下标，则定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1/n & 若\ a_n^2\leqslant 2\\ a_n-1/n & 若\ a_n^2>2.\end{cases}$$

这一公式归纳地定义了序列. 把求这个序列的前四项留给读者作为练习. ■

例 2.3 考虑一个序列，它的前几项表示如下[⊖]：

$$\{a_n\}=\{1,1/2,2/2,1/3,2/3,3/3,1/4,2/4,3/4,4/4,1/5,\cdots\}. \qquad (2.1)$$

这个序列的前11项如上所示，它可以以下述方式形式地定义. 因为对每个自然数 j，

⊖ 一个不能通过前几项的值形式定义的序列，就像在本例中那样，有时可以用这种方式把序列的结构清楚地表示出来.

$$1+2+\cdots+j=\frac{j(j+1)}{2},$$

对一个下标 n，如 $n=j(j+1)/2+k$，其中 $1\leqslant k\leqslant j+1$，

$$a_n=\frac{k}{j+1}.$$

我们把确定 a_{20} 及 a_{30} 留作习题，同时要求证明这个序列中存在无穷多个下标 n，使得 $a_n=1/2$. ■

24

例 2.4 令 r 是任意一个数，对每一个下标 n，定义序列 $\{s_n\}$ 为

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}r^k.$$

如果 $r=1$，则 $s_n=n$. 如果 $r\neq 1$，用几何和公式，s_n 可表示为

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}r^k=\frac{r-r^{n+1}}{1-r}.$$ ■

例 2.5 对每一个下标 n，定义序列 $\{s_n\}$ 为

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

s_n 是否可如上例那样由下标 n 的一个简单的显式函数表达是不清楚的. ■

上述两个序列是由下述方式构成的：给定序列 $\{c_n\}$，对每一个下标 n，用公式

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$$

定义了一个新的序列 $\{s_n\}$. 以这种方式形成的序列称为无穷级数(infinite series). 它的第 n 项 s_n 称为级数的第 n 个部分和. 我们将在第8、9章研究无穷级数.

收敛的定义

我们将关注具有下列性质的序列："随着 n 变大，a_n 趋近一固定数 a"，或另一个相当的概念："随着 n 变大，a_n 与 a 之间的差变成任意小". 这里陈述加有引号是因为它们是不精确的、含糊的，除了有直观性外无多大意义. 对于"趋近"与"任意小"，它们在数学上的意义是什么？尽管不精确，但其概念还是很重要的，下面是使这些概念精确化的一种方式[1].

25

定义 序列 $\{a_n\}$ 称为收敛到数 a，如果对每一个正数 ε，存在一下标 N，使得对所有下标 $n\geqslant N$ 有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

注意[2]，给定数 ℓ 及正数 r，对任意数 x，

$$|x-\ell|<r \quad \text{当且仅当} \quad \ell-r<x<\ell+r.$$

---

[1] 为了理解为什么下面的定义抓住了"随着 n 变大，a_n 与 a 之间的差变成任意小"的概念，需要作某些思考. 这不应令人沮丧，因为事实上，在形成序列收敛的精确定义之前，人们用了几乎两个世纪的时间才得到这一概念.

[2] 回忆当且仅当的含义. 给定两个数学陈述 A 与 B，论断"A 当 B"意指 B 蕴涵 A，而论断"A 仅当 B"意指 A 蕴涵 B. 这样"A 当且仅当 B"意指 A 蕴涵 B 且 B 蕴涵 A.

这样，序列$\{a_n\}$定义为收敛于数a，如果对每一个正数ε，存在一下标N，使得对所有下标$n \geq N$有

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

它的意思是当下标$n \geq N$时，a_n位于区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 如图2.1所示.

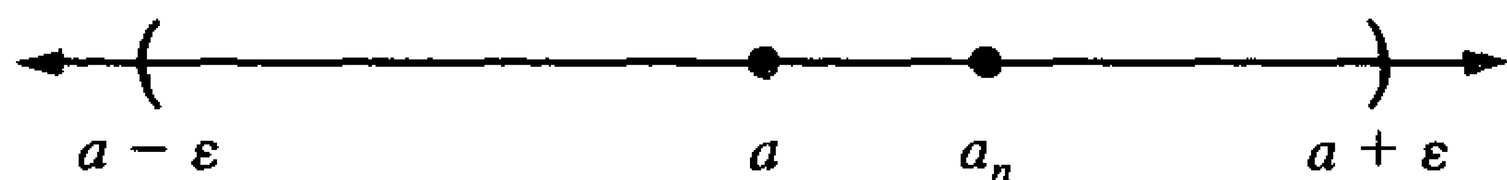


图2.1 对任一下标$n \geq N$, $|a_n - a| < \varepsilon$

一个给定序列可以收敛，也可以不收敛. 但如果序列确实收敛，则它不可能收敛到多于一个的点. 事实上，假设序列$\{a_n\}$收敛到a及a'，且$a < a'$，选取一正数ε小于a与a'的距离的一半，则$a + \varepsilon < a' - \varepsilon$，所以区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$与$(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$是不相交的. 如图2.2所示.



图2.2 当$a \neq a'$时，一序列不可能收敛于a与a'

但是，因为序列$\{a_n\}$收敛于a，有一下标N_1，使得当$n \geq N_1$时，a_n属于区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 另一方面，由于序列$\{a_n\}$收敛于$a'$，又有一下标$N_2$使得当$n \geq N_2$时，$a_n$属于区间$(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$. 选取一下标$n$既大于$N_1$又大于$N_2$，则$a_n$应同时属于区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$及区间$(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$. 这与这两个区间是不相交的相矛盾. 这样，一个收敛序列不能收敛于两个不同的数.

如果序列$\{a_n\}$收敛于数a，称a为序列$\{a_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

26

命题 2.6 序列$\{1/n\}$收敛于0，即

$$\lim_{n \to \infty} 1/n = 0.$$

证明 令$\varepsilon > 0$. 需要求一下标N，使得对所有下标$n \geq N$有

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

即若$n \geq N$，则$1/n < \varepsilon$. 但由$\mathbb{R}$的阿基米德性质，可以选取满足$1/N < \varepsilon$的下标N，因而对所有下标$n \geq N$有

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

这样，在如此选定N后，所要求的不等式(2.2)成立. ■

例 2.7 序列$\{(-1)^n\}$不收敛. 为此用反证法. 假设序列$\{(-1)^n\}$收敛于a. 取任意正数ε且$\varepsilon < 1$，则区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$的长度小于2，因此这个区间内不可能有此序列$\{(-1)^n\}$的奇数项与偶数项. 这样，序列$\{(-1)^n\}$不可能收敛于$a$，此矛盾证明了序列$\{(-1)^n\}$不收敛. ■

例 2.8 序列$\{2/n^2+4/n+3\}$收敛于3，即

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}+3\right]=3.$$

为证实这一论断，选取$\varepsilon>0$，则需求得下标N，使得对所有下标$n\geqslant N$有

$$\left|\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}+3-3\right|<\varepsilon. \tag{2.3}$$

注意，对每一下标n有

$$\left|\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}+3-3\right|=\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}\leqslant\frac{6}{n}.$$

现在由$\mathbb{R}$的阿基米德性质，由于$\varepsilon/6$为正，故可选一下标N使得$1/N<\varepsilon/6$，所以$6/N<\varepsilon$，因此对所有下标$n\geqslant N$，

$$\left|\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}+3-3\right|\leqslant\frac{6}{n}\leqslant\frac{6}{N}<\varepsilon.$$

27 这样不等式(2.3)对所选N成立. ■

收敛的比较准则

我们现在来建立判定一序列收敛的非常有用的判别法，它在本书的后面经常用到，称之为比较引理.

引理 2.9(比较引理) 令序列$\{a_n\}$收敛于a. 对序列$\{b_n\}$及数b，如果存在一非负数C及下标N_1满足

$$|b_n-b|\leqslant C|a_n-a| \quad 对所有 n\geqslant N_1, \tag{2.4}$$

则序列$\{b_n\}$收敛于b.

证明 令$\varepsilon>0$，需找出下标N，使得对所有下标$n\geqslant N$有

$$|b_n-b|<\varepsilon. \tag{2.5}$$

但是，我们已有估计式(2.4). 如果$C=0$，则估计式(2.4)蕴涵当$N=N_1$时，不等式(2.5)成立. 所以设$C>0$. 由于序列$\{a_n\}$收敛于a及$\varepsilon/C>0$，故可选取下标N_2使得对所有下标$n\geqslant N_2$，

$$|a_n-a|<\varepsilon/C. \tag{2.6}$$

定义$N\equiv\max\{N_1,N_2\}$，则由估计式(2.4)与(2.6)可得，对所有下标$n\geqslant N$，

$$|b_n-b|\leqslant C|a_n-a|<C\cdot\varepsilon/C=\varepsilon.$$

这样，不等式(2.5)对选定N成立. ■

收敛序列的和、积及商

现在转向证明关于收敛序列的加法、乘法及除法的性质的一般结果. 我们证明收敛序列的和收敛于极限的和，收敛序列的积收敛于极限的积，当所有的商是有定义时，序列的商收敛于极限的商.

定理 2.10(和的性质) 假设序列$\{a_n\}$收敛于a，序列$\{b_n\}$收敛于b，则和序列$\{a_n+b_n\}$收敛于和$a+b$，即

$$\lim_{n\to\infty}[a_n + b_n] = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 令 $\varepsilon>0$，需找到一下标 N，使得对所有下标 $n\geq N$，

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

[28]

为此，先观察到对每一下标 n，

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|,$$

因此由三角不等式，

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|. \tag{2.8}$$

由于序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 及 $\varepsilon/2$ 是正的，可选 N_1 使得对所有 $n\geq N_1$，有

$$|a_n - a| < \varepsilon/2.$$

同样因序列 $\{b_n\}$ 收敛于 b 及 $\varepsilon/2$ 是正的，可选 N_2 使得对所有 $n\geq N_2$，有

$$|b_n - b| < \varepsilon/2.$$

定义 $N\equiv\max\{N_1, N_2\}$. 从 N_1，N_2 的选取及不等式(2.8)可知，当 $n\geq N$ 时，

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这样，所要求的不等式(2.7)对选定 N 是成立的. ■

为了简化收敛序列的积收敛于极限的积的证明，方便的办法是先证明一个序列是常数的特殊情况，然后证明这两个序列都收敛于 0 的特殊情况.

引理 2.11 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则对任意数 α，序列 $\{\alpha a_n\}$ 收敛于 αa.

证明 证明直接来自于比较引理. 事实上，对每一下标 n，

$$|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha||a_n - a| \leq |\alpha||a_n - a|.$$

这样，当 $N_1 = 1$ 及 $C = |\alpha|$ 时，所要求的比较不等式(2.4)成立.

引理 2.12 假设序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛于 0，则积序列 $\{a_nb_n\}$ 也收敛于 0.

证明 令 $\varepsilon>0$，需寻找下标 N，使得对所有下标 $n\geq N$，

$$|a_nb_n| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

[29]

由于 $\sqrt{\varepsilon}>0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，故存在下标 N_1 使得对所有下标 $n\geq N_1$ 有

$$|a_n| < \sqrt{\varepsilon}.$$

类似地，存在下标 N_2，使得对所有下标 $n\geq N_2$ 有

$$|b_n| < \sqrt{\varepsilon}.$$

定义 $N\equiv\max\{N_1, N_2\}$，则当 $n\geq N$ 时有

$$|a_nb_n| = |a_n||b_n| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

这样，不等式(2.9)在选定 N 后成立. ■

我们可以清楚地看到，收敛序列的下述性质是十分有用的，把它的证明留给读者作为习题. 对序列 $\{c_n\}$ 及数 c，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad 当且仅当 \quad \lim_{n\to\infty}[c_n - c] = 0.$$

定理 2.13（积的性质） 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 及序列 $\{b_n\}$ 收敛于 b，则积序列 $\{a_nb_n\}$ 收敛

于积 ab，即

$$\lim_{n\to\infty}[a_nb_n] = \lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n.$$

证明 需证明

$$\lim_{n\to\infty}[a_nb_n - ab] = 0. \tag{2.10}$$

为此，对每一下标 n，定义

$$\alpha_n \equiv a_n - a \quad 及 \quad \beta_n \equiv b_n - b.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0. \tag{2.11}$$

此外，对每一下标 n，因为 $a_n = a + \alpha_n$ 及 $b_n = b + \beta_n$，

$$\begin{aligned} a_nb_n - ab &= (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab \\ &= a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n. \end{aligned}$$

由极限(2.11)、收敛序列的和性质及前面两个引理，我们得出结论：

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}[a_nb_n - ab] &= \lim_{n\to\infty}[a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n] \\ &= \lim_{n\to\infty}[a\beta_n] + \lim_{n\to\infty}[b\alpha_n] + \lim_{n\to\infty}[\alpha_n\beta_n] \\ &= a\lim_{n\to\infty}\beta_n + b\lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}[\alpha_n\beta_n] \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

30 这样，需要的极限式(2.10)成立. ■

命题 2.14 假设序列 $\{b_n\}$ 是非零的，且收敛于非零数 b，则序列 $\{1/b_n\}$ 收敛于 $1/b$.

证明 我们的策略是用比较引理. 这样，需找出一个非负数 C 及下标 N_1，使得对所有下标 $n \geqslant N_1$ 满足

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant C|b_n - b|. \tag{2.12}$$

但是可以看到，对每一个下标 n，

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| = \frac{1}{|b_n||b|}|b_n - b|.$$

假设存在一下标 N_1，使得对所有下标 $n \geqslant N_1$ 有

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}, \tag{2.13}$$

则对所有下标 $n \geqslant N_1$ 有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|}|b_n - b| \leqslant \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|. \tag{2.14}$$

这样，需要的比较不等式(2.12)在如上选定 N_1 及 $C = 2/|b|^2$ 后成立. 于是序列 $\{1/b_n\}$ 收敛于$1/b$ 可直接由比较引理得出.

为完成这一证明，需要证明存在下标 N_1 使得不等式(2.13)成立. 事实上，由于数 $|b|/2$ 是正的，可取 $\varepsilon = |b|/2$ 以及运用序列收敛的定义来选取下标 N_1 使得对所有 $n \geqslant N_1$，

$$b_n \text{ 属于区间}(b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

观察到如果 $b>0$，则 $\varepsilon=b/2$，所以$(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)=(b/2,\ 3b/2)$，因此对所有 $n\geqslant N_1$ 有 $b_n>b/2$. 另一方面，如果 $b<0$，则 $\varepsilon=-b/2$，所以$(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)=(3b/2,\ b/2)$，因而对所有 $n\geqslant N_1$ 有 $b_n<b/2$. 因为 $b<0$，对选取的 N_1，不等式(2.13)成立. ■

定理 2.15(商的性质) *假设$\{a_n\}$收敛于数 a，序列$\{b_n\}$收敛于数 b. 再假设对所有下标 n，$b_n\neq 0$ 且 $b\neq 0$. 则商序列$\{a_n/b_n\}$收敛于商 a/b，即*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_n}\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

31

证明 由前面的命题以及收敛序列的积的性质，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[a_n\cdot\frac{1}{b_n}\right]=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$ ■

我们现在已建立了收敛序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的和、积与商的性质，收敛序列的另外两个有用的性质可从上述三个基本性质得出.

线性性质与多项式性质

从收敛序列的和的性质及引理 2.11 可直接得到下述有用的性质.

命题 2.16(线性性质) *对任意两个数 α 与 β，*

$$\lim_{n\to\infty}[\alpha a_n+\beta b_n]=\alpha\lim_{n\to\infty}a_n+\beta\lim_{n\to\infty}b_n.$$

还有一个关于收敛序列的进一步的性质. 对非负整数 k 及数 c_0，c_1，…，c_k，函数 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$p(x)=\sum_{i=0}^{k}c_ix^i,\quad \text{对}\mathbb{R}\text{中所有 } x,$$

称为多项式. 如果 $c_k\neq 0$，p 称为是 k 次多项式.

我们把下述命题的证明留给读者，这个证明可从收敛序列的和及积的性质及基于多项式的次数的归纳论证得到.

命题 2.17(多项式性质) *如果序列$\{a_n\}$收敛于 a，则对任一多项式 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，*

$$\lim_{n\to\infty}p(a_n)=p(a).$$

习题

1. 对以下陈述，试确定它们的真与假，并给出理由.

  a. 如果序列$\{a_n^2\}$收敛，则序列$\{a_n\}$也收敛.

  b. 如果序列$\{a_n+b_n\}$收敛，则序列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$也收敛.

32

  c. 如果序列$\{a_n+b_n\}$及$\{a_n\}$收敛，则序列$\{b_n\}$也收敛.

  d. 如果序列$\{|a_n|\}$收敛，则序列$\{a_n\}$也收敛.

2. 仅用$\mathbb{R}$的阿基米德性质，对下述极限给出直接的"ε-N"验证.

  a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ **b.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+5}=0$

3. 仅用$\mathbb{R}$的阿基米德性质，对下述序列收敛给出直接的“ε-N”验证.

a. $\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+3\right\}$ **b.** $\left\{\frac{n^2}{n^2+n}\right\}$

4. 对例2.3中定义的序列$\{a_n\}$：

a. 求出a_{10}，a_{20}，a_{30}.

b. 找出第二个下标n使得$a_n=1/4$及第四个下标n使得$a_n=1$.

c. 对奇自然数j，设

$$n=\frac{j(j+1)}{2}+\frac{j+1}{2},$$

证明$a_n=1/2$.

d. 证明$\{a_n\}$是不收敛的.

5. 对例2.3中定义的序列$\{a_n\}$及区间$(0, 1]$中的任一个有理数，证明有无穷多个下标n，使得$a_n=x$.

6. 假设序列$\{a_n\}$收敛于a且$a>0$. 证明：存在一下标N，使得对所有$n\geqslant N$有$a_n>0$.

7. 假设序列$\{a_n\}$收敛于ℓ，序列$\{b_n\}$具有性质：存在一下标N，对所有$n\geqslant N$，有$a_n=b_n$. 证明$\{b_n\}$也收敛于ℓ.（建议：用比较引理可得一个快速的证明.）

8. 证明序列$\{c_n\}$收敛于c当且仅当序列$\{c_n-c\}$收敛于0.

9. 证明$\mathbb{R}$的阿基米德性质等价于$\lim_{n\to\infty}1/n=0$.

10. 证明

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1.$$

33

（提示：定义$\alpha_n=n^{1/n}-1$，再利用二项式公式证明$n=(1+\alpha_n)^n\geqslant 1+[n(n-1)/2]\alpha_n^2$.）

11. 我们已证明序列$\{1/n\}$收敛于0而不收敛于任意其他的数. 根据这一点证明下面的任意一个论断都与序列$\{a_n\}$收敛到数a的定义不等价.

a. 对某个$\varepsilon>0$存在下标N使得

$$\text{对所有}\geqslant N\text{的下标}n,\quad |a_n-a|<\varepsilon.$$

b. 对每个$\varepsilon>0$及每个下标N,

$$\text{对所有}\geqslant N\text{的下标}n,\quad |a_n-a|<\varepsilon.$$

c. 存在下标N使得对每个$\varepsilon>0$,

$$\text{对所有}\geqslant N\text{的下标}n,\quad |a_n-a|<\varepsilon.$$

12. 对例2.2中定义的序列，证明对每个下标n，$|a_n-\sqrt{2}|<2/n$. 利用这一性质证明该序列收敛于$\sqrt{2}$.

13. 利用基于多项式次数的归纳法证明收敛序列的多项式性质.

14. 序列$\{s_n\}$定义如下：

$$\text{对每一个下标}n,\quad s_n=\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1.$$

15. 设$\{a_n\}$是实数序列. 假定对每个正数c存在下标N使得

$$\text{对所有}\geqslant N\text{的下标}n,\quad a_n>c.$$

在此情形下，序列$\{a_n\}$称为收敛到无穷大，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty.$$

证明：

a. $\lim_{n\to\infty}[n^3-4n^2-100n]=\infty$ **b.** $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}-\frac{1}{n^2}+4\right]=\infty$

16. 讨论下列每一个序列到无穷大的收敛性：

a. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ **b.** $\{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}\}$ **c.** $\{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n\}$

17. 对正数序列证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad 当且仅当 \quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a_n}\right] = 0.$$

34

18. (切萨罗(Cesaro)平均收敛)假设序列$\{a_n\}$收敛于a，序列$\{\sigma_n\}$定义如下：

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad 对每一个下标 n.$$

证明序列$\{\sigma_n\}$也收敛于a.

2.2 序列与集合

收敛序列的有界性

数的集合S定义为有界的，如果它是上下有界的. 这等价于论断：存在非负数M使得对S中所有元x，有

$$|x| \leqslant M.$$

定义 *序列$\{a_n\}$称为有界，如果存在数M，使得对每一下标n，有*

$$|a_n| \leqslant M.$$

定理 2.18 *每个收敛序列是有界的.*

证明 令$\{a_n\}$是收敛于数a的序列. 取$\varepsilon=1$，由收敛的定义推出可以选择下标N，使得对所有$n \geqslant N$有

$$|a_n - a| < 1.$$

观察到$a_n=(a_n-a)+a$，所以由三角不等式，

$$|a_n| = |(a_n-a)+a| \leqslant |a_n-a| + |a|.$$

这样，由下标N的选择，对所有$n \geqslant N$有

$$|a_n| \leqslant 1+|a|.$$

定义$M \equiv \max\{1+|a|, |a_1|, \cdots, |a_{N-1}|\}$，则对每一个下标$n$有

$$|a_n| \leqslant M.$$

这样，序列$\{a_n\}$是有界的. ■

有理数的序列稠密性

数集S定义为在$\mathbb{R}$中是稠密的，如果每一个开区间(a, b)都含有S中的点. 利用收敛序列可对稠密性作一有用的刻画.

35

定义 *对于数集S，我们称序列$\{x_n\}$在S内，只要对每一下标n，项x_n属于S.*

命题 2.19 *集S在$\mathbb{R}$中稠密，当且仅当每一个数x是S中序列的极限.*

证明 首先，假设S在$\mathbb{R}$中是稠密的. 对每一个数x，令n是一个下标，由S在$\mathbb{R}$中的稠密性，区间$(x, x+1/n)$中必有S的元. 选取属于这个区间的S的元，记为s_n，这样定义了一个序列$\{s_n\}$，具有性质

$$|s_n - x| < 1/n, \quad 对每一个下标 n.$$

因为序列$\{1/n\}$收敛于0，根据比较引理知序列$\{s_n\}$收敛于x，由上述的选取，$\{s_n\}$是S中的序列.

接下来证明其逆. 假设集S具有性质：每一个数是S中序列的极限. 我们要证明S在$\mathbb{R}$内稠密. 事实上考虑任一区间(a, b)，必须证明它包含S中的点. 考虑区间中点$x=(a+b)/2$，由假设，存在收敛于s的S中的点序列$\{s_n\}$. 定义$\varepsilon \equiv (b-a)/2$，则$\varepsilon>0$. 由收敛序列的定义，有下标$N$，使得对每一下标$n \geqslant N$，$s_n$属于区间$(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$，但

$$(s-\varepsilon, s+\varepsilon) = (a, b).$$

点s_N既属于S又属于(a, b). 这样，S在$\mathbb{R}$中稠密. ■

定理 2.20(有理数的序列稠密性) *每个数都是有理数的序列的极限.*

证明 定理1.9断言有理数集在$\mathbb{R}$中是稠密的. 由上述命题知，每个数是有理数序列的极限. ■

闭集

引理 2.21 *假定序列$\{d_n\}$收敛于数d且对每个自然数n，$d_n \geqslant 0$，则$d \geqslant 0$.*

证明 我们将假设其结论是错的，然后得出矛盾. 事实上，假定$d<0$. 令$\varepsilon \equiv -d/2$，有$\varepsilon>0$及$d+\varepsilon=d/2<0$. 这样，区间$(d-\varepsilon, d+\varepsilon)$整个由负数构成，所以$\{d_n\}$的项不属于这个区间. 因此序列$\{d_n\}$不能收敛于$d$. 由此得出矛盾. 故$d \geqslant 0$. ■

36

定理 2.22 *设$\{c_n\}$是区间$[a, b]$的序列，如果$\{c_n\}$收敛于数c，则c也属于$[a, b]$.*

证明 由收敛序列的线性性质，

$$\lim_{n\to\infty}[b-c_n] = b-c.$$

但是，对每一下标n，c_n属于区间$[a, b]$，所以$b-c_n \geqslant 0$. 上述引理蕴涵$b-c \geqslant 0$. 类似地可证$c-a \geqslant 0$. 这样，c属于区间$[a, b]$. ■

区间$[a, b]$具有的如上述定理所述的性质是很重要的，因此它有一个命名.

定义 *$\mathbb{R}$的子集S称为闭的，如果S的任一序列$\{a_n\}$收敛于数a，则极限a也是属于S的.*

运用这个新名词，引理2.21可重述为非负数集是闭的. 可以看到，正数集不是闭的，因为$\{1/n\}$是正数序列，但它的极限却不是正数. 定理2.22可重述为区间$[a, b]$是闭的.

例 2.23 有理数集$\mathbb{Q}$不是闭的，因为由有理数的序列稠密性(定理2.20)知，存在有理数序列$\{r_n\}$收敛于数$\sqrt{2}$，但$\sqrt{2}$不是有理数. ■

例 2.24 区间$(0, 1]$也不是闭的，因为$\{1/n\}$是这个区间的序列，但它收敛于不属于这个区间的一点. ■

习题

1. 对下列每一个陈述，确定其真或假，并说出你的理由.

a. 每个有界序列是收敛的.

b. 正数的收敛序列有正极限.

c. 序列$\{n^2+1\}$是收敛的.

d. 有理数的收敛序列有有理数极限.

e. 区间(a, b)中收敛序列的极限仍属于(a, b).

2. 证明集$(-\infty, 0]$是闭的.
3. 证明每一个数是无理数序列的极限.
4. 证明无理数集不是闭的.
5. 证明序列$\{a_n\}$是有界的，当且仅当存在一区间$[c, d]$使得$\{a_n\}$是$[c, d]$中的序列.

37

2.3 单调收敛定理

在2.1节中我们证明了$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. 显然常数序列收敛到它们的常数值. 运用收敛序列的和、积及商的性质，可以将这些例子组合起来得到更多的收敛序列的例子. 重要的是分析更一般的序列. 现在我们转而提供足以确定序列收敛的准则，而不需要所讨论的极限的具体知识.

定义 *序列$\{a_n\}$称为单调递增的，倘若*

$$\text{对每一个下标 } n, \quad a_{n+1} \geqslant a_n.$$

序列$\{a_n\}$称为单调递减的，倘若

$$\text{对每一个下标 } n, \quad a_{n+1} \leqslant a_n.$$

序列$\{a_n\}$称为单调的，如果它或者单调递增或者单调递减.

在上一节证明了如果序列收敛，它必定有界. 当然，如序列$\{(-1)^n\}$所示，有界的序列未必收敛. 然而在单调序列的情形下，有下述重要的定理.

定理 2.25(单调收敛定理) *单调序列收敛当且仅当它有界. 其次，有界的单调序列$\{a_n\}$收敛于*

i. $\sup\{a_n \mid n \text{ 在}\mathbb{N}\text{ 中}\}$，*如果$\{a_n\}$是单调递增的，*

ii. $\inf\{a_n \mid n \text{ 在}\mathbb{N}\text{ 中}\}$，*如果$\{a_n\}$是单调递减的.*

证明 我们已经证明了收敛序列是有界的，所以只需证明如果单调序列$\{a_n\}$有界，则它收敛于由(i)或(ii)所确定的极限. 首先假设序列$\{a_n\}$单调递增. 那么如果定义$S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$，则由假设，$S$是上有界的. 由完备性公理. S有最小上界. 定义$\ell \equiv \sup S$. 我们断言序列$\{a_n\}$收敛于ℓ. 事实上，令$\varepsilon > 0$，需要找出下标N，使得对所有$n \geqslant N$，有

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

即对所有$n \geqslant N$，有

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon. \tag{2.15}$$

因为数ℓ是集S的上界，所以对每一个下标n，有

$$a_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon. \tag{2.16}$$

38

另一方面，因为ℓ是S的最小上界，数$\ell - \varepsilon$不是S的上界，所以有下标N使得$\ell - \varepsilon < a_N$. 但由于序列$\{a_n\}$是单调递增的，所以对所有$n \geqslant N$，

$$\ell - \varepsilon < a_N \leqslant a_n. \tag{2.17}$$

由不等式(2.16)与(2.17)可得所需不等式(2.15). 这样，序列$\{a_n\}$收敛于ℓ.

我们把单调递减序列的相似证明留给读者. ■

例 2.26 对每一个下标n，定义

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2^k}.$$

显然序列$\{s_n\}$是单调递增的. 按照单调收敛定理, $\{s_n\}$收敛当且仅当它是有界的. 下面证明它有界. 事实上, 运用几何和公式可知, 对每一个下标n,

$$s_n \leqslant \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} \leqslant \frac{1/2 - 0}{1 - 1/2} = 1.$$

因此单调递增序列$\{s_n\}$是上有界的且为1, 所以它收敛于极限ℓ, 其中$\ell \leqslant 1$. 注意我们在没有确切地认定极限值的情况下证明了$\{s_n\}$收敛. ■

例 2.27 对每一个下标n, 定义

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

级数$\{s_n\}$称为调和级数. 而且, 序列$\{s_n\}$是单调递增的. 我们断言它不是有界的, 因而不收敛. 事实上, 注意到

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \geqslant 1 + \frac{1}{2}$$

及

39

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geqslant s_4 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}.$$

一般地, 我们断言

$$\text{对每一个下标 } n, \quad s_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}. \tag{2.18}$$

事实上, 对每一下标$k \geqslant 1$, 存在2^{k-1}个下标i使得

$$2^{k-1} < i \leqslant 2^k,$$

并且对每一个这样的下标, $1/i \geqslant 1/2^k$. 因此,

$$\sum_{2^{k-1} < i \leqslant 2^k} \frac{1}{i} \geqslant \frac{1}{2}.$$

这样,

$$s_{2^n} = 1 + \sum_{2 \leqslant i \leqslant 2^n} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{2^{k-1} < i \leqslant 2^k} \frac{1}{i} \right] \geqslant 1 + \frac{n}{2}.$$

由此, 运用$\mathbb{R}$的阿基米德性质可得序列$\{s_n\}$没有界. 因而由定理2.18, 该序列不收敛. ■

现在考虑一类特殊但却重要的序列, 此序列具有形式$\{c^n\}$, 其中c是固定数. 当$c=1$时, 此序列是常数序列, 所以它收敛于1. 当$c=-1$时, 我们早已知道它是不收敛的. 我们把$|c|>1$这种情况留给读者作为习题, 证明此时序列不是有界的, 因此由定理2.18可知它不收敛. 对$|c|<1$有下述重要结果.

命题 2.28 令c为满足$|c|<1$的数, 则

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0.$$

证明 当$c=0$时是显然的, 因为此时考虑的是常数序列, 每一项是0. 此外, 由于$|c^n| = |(-c)^n|$, 故$c<0$的情况可由$c>0$的情况得出. 所以假设$c>0$. 因为$0<c<1$, $\{c^n\}$是单调递减序列且以0为下界. 由单调收敛定理知序列$\{c^n\}$收敛于数ℓ, 其中

$$\ell = \inf\{c^n \mid n 在\mathbb{N}内\}.$$

必有 $\ell=0$，否则的话，由于 $c>0$，对每一下标 n 有

$$c^n = \frac{c^{n+1}}{c} \geqslant \frac{\ell}{c}.$$

40.

这样，ℓ/c 是此序列的一个下界，且它大于 ℓ(因 $0<c<1$)．因此 ℓ 不是序列的最大下界．这一矛盾证明 $\ell=0$. ■

我们以单调收敛定理的几何推论来结束本节，该推论可以不严格地解释成一个陈述，即实数集$\mathbb{R}$上没有“洞”.

定理 2.29(区间套定理)　对每一个自然数 n，令 a_n 与 b_n 是满足 $a_n<b_n$ 的数．考虑区间 $I_n\equiv[a_n, b_n]$．假定

$$对每一个下标 n,\quad I_{n+1}\subseteq I_n, \tag{2.19}$$

还假定

$$\lim_{n\to\infty}[b_n-a_n]=0, \tag{2.20}$$

则对所有的 n，恰存在一点 x 属于区间 I_n，并且序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛到这一点．如图 2.3 所示.

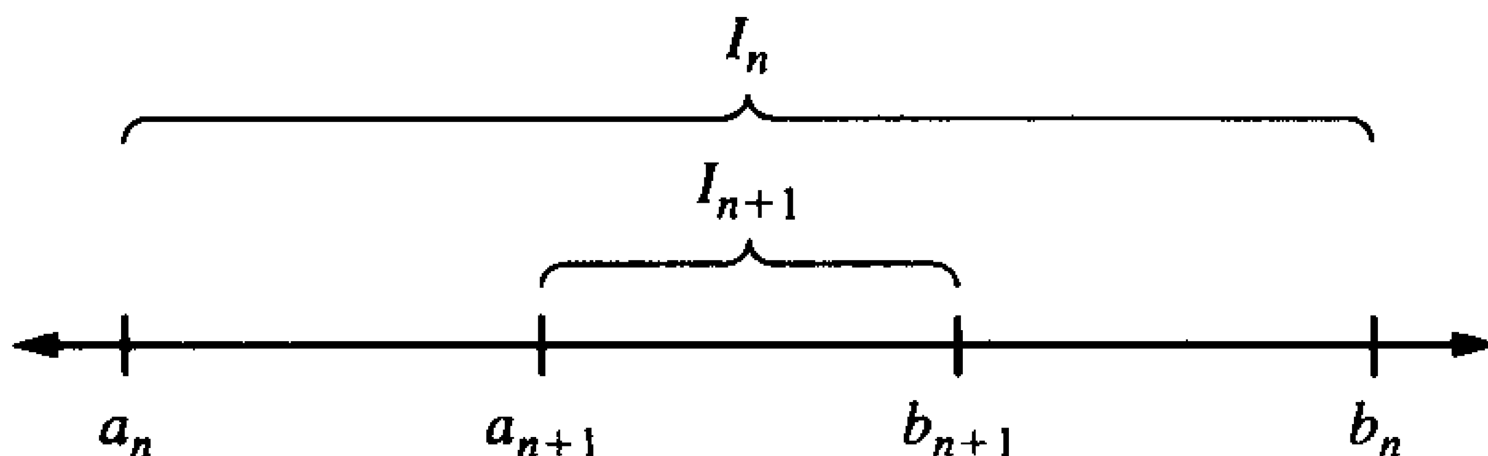


图 2.3　端点序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛于 c

证明　所假定的(2.19)式也就是对每一个下标 n,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

特别地，序列 $\{a_n\}$ 是以 b_1 为上界的单调递增序列．单调收敛定理蕴涵序列 $\{a_n\}$ 收敛于数 a 且对每个下标 n，$a_n\leqslant a$．类似的论证表明单调递减序列 $\{b_n\}$ 收敛到某个数(用 b 表示)，且对每个下标 n，$b\leqslant b_n$．这样，

$$对每个下标 n,\quad a_n\leqslant a 且 b\leqslant b_n. \tag{2.21}$$

由(2.20)式的假设及收敛序列的差的性质可以推出

$$0=\lim_{n\to\infty}[b_n-a_n]=b-a.$$

41

于是 $a=b$．置 $x=a=b$．从(2.21)可得对每个自然数 n，点 x 属于 I_n．仅存在一个这样的点，这是因为存在两个这样的点将与区间的长度收敛到 0 的假设(2.20)相矛盾. ■

习题

1. 对以下每一个陈述，确定它的真假，并说明你的理由.
   - **a.** 单调序列的和仍是单调的.
   - **b.** 单调序列的积仍是单调的.

c. 每个有界序列是收敛的.

d. 每个单调序列是收敛的.

2. 下列序列中哪一个是单调的？说出你的理由.

a. $\left\{n+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$　　　b. $\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right\}$

3. 假设序列$\{a_n\}$是单调的. 证明$\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_n^2\}$收敛. 说明这一结果在没有单调性这一假设下是不成立的.

4. 假设序列$\{a_n\}$收敛于a且$|a|<1$，证明序列$\{(a_n)^n\}$收敛于0.

5. 令c是满足$|c|<1$的数. 证明$|c|$可以表示成$|c|=1/(1+d)$，其中$d>0$，然后用二项式公式证明：对每一下标n，有

$$|c^n|\leqslant\frac{1}{1+nd}\leqslant\frac{1}{dn}.$$

6. a. 用习题5及比较引理(引理2.9)得出$|c|<1$时$\lim\limits_{n\to\infty}c^n=0$的另一个证明.

b. 运用习题5及比较引理证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}c^n=0$. 序列$\{\sqrt{n}c^n\}$是单调的吗？

7. 证明：若$0<c<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}nc^n=0.$$

(提示：定义$a\equiv\sqrt{c}$，可看到$nc^n=(\sqrt{n}a^n)(\sqrt{n}a^n)$并运用习题6中的(b)).

8. 设$\{b_n\}$是有界的非负序列而r是满足$0\leqslant r<1$的任意数. 对每一个下标n，定义

$$s_n=b_1r+b_2r^2+\cdots+b_nr^n.$$

用单调收敛定理证明级数$\{s_n\}$收敛.

9. 对每个自然数n，令a_n，b_n为满足$a_n<b_n$的数，考虑区间$I_n=[a_n,b_n]$，假定对每个下标n有

$$I_{n+1}\subseteq I_n.$$

用单调收敛定理证明$\{a_n\}$收敛于a及$\{b_n\}$收敛于b，其中$a\leqslant b$及区间$[a,b]$包含在每个I_n中.

42

10. 对一对正数α与β，数$\sqrt{\alpha\beta}$称为α与β的几何平均，而数$(\alpha+\beta)/2$称为α与β的算术平均. 通过考虑$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\geqslant 0$，证明$(\alpha+\beta)/2\geqslant\sqrt{\alpha\beta}$.

11. 对一对正数a与b，递归地定义序列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$如下：定义$a_1=a$及$b_1=b$. 若对下标n，已定义了a_n与b_n，定义

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\quad 及\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

a. 用上一题证明对每一个下标$n\geqslant 2$，

$$a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant b_{n+1}\geqslant b_n.$$

b. 证明序列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$收敛，然后证明$\{a_n\}$与$\{b_n\}$有相同的极限. 这一共同的极限称为a与b的高斯算术–几何平均. 它作为涉及a与b的重要的椭圆积分的值出现.

2.4 列紧定理

本节我们讨论一个定理——列紧定理，它是分析研究中最重要的一个定理. 这个定理是实数集合中的重要性质，在函数的连续性与可微性的基本性质的证明中是必需的. 为描述这个定理，首先需要引进子序列的概念.

定义 考虑序列$\{a_n\}$，令$\{n_k\}$是自然数的一个严格增加的序列，即

$$n_1<n_2<n_3<\cdots.$$

对每个下标 k，序列 $\{b_k\}$ 定义为

$$b_k = a_{n_k},$$

它称为序列 $\{a_n\}$ 的子序列.

通常 $\{a_n\}$ 的子序列简单地表示为 $\{a_{n_k}\}$，这里隐式地理解 $\{n_k\}$ 是严格递增的自然数序列，而它的第 k 项是 a_{n_k} ㊀.

下面的结果虽然并不奇特但却十分有用.

43

命题 2.30 令序列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a，则 $\{a_n\}$ 的每一个子序列也收敛于 a.

证明 令 $\varepsilon>0$，需找到一个下标 N，使得对所有 $k \geq N$ 有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon. \tag{2.22}$$

因为整个序列 $\{a_n\}$ 是收敛于 a 的，故可选定下标 N，使得对所有 $n \geq N$，

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{2.23}$$

因为 $\{n_k\}$ 是严格递增的自然数序列，故对每个下标 k 有

$$n_k \geqslant k.$$

这样，所需不等式(2.22)来自于(2.23). ■

序列 $\{a_{n+1}\}$ 是序列 $\{a_n\}$ 的子序列. 因此

$$\text{若} \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{则} \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

这一简单的讨论对于用递归定义的序列的分析是十分有用的.

例 2.31 定义 $a_1 = 1$. 若 n 是下标，a_n 已定义，则定义

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2 + a_n}. \tag{2.24}$$

用归纳法可证明 $\{a_n\}$ 是一个正数序列. 其次由这个序列的定义知，对每一个下标 n，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{(2 + a_n)(2 + a_{n+1})}.$$

因为 $a_2 < a_1$，上面的等式以及归纳论证表明 $\{a_n\}$ 是单调递减的. 由单调收敛定理，序列 $\{a_n\}$ 收敛. 用 a 表示它的极限. 由极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 及收敛序列的和、积及商的性质知(2.24)式右边的序列收敛于 $(1+a)/(2+a)$. 另一方面，由于 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$，(2.24)式左边的序列收敛于 a. 这样，

$$a = \frac{1 + a}{2 + a}.$$

由二次公式可得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$ ■

44

㊀ 作为直观而不精确的想法，可以认为子序列 $\{a_{n_k}\}$ 是由原序列 $\{a_n\}$ 中删去一些项后重新编排它的余项使得删除后序列的第 k 项是原序列的第 n_k 项而得到的.

给定的序列可以是单调的也可以不是单调的，但事实上每个序列都有一个单调的子序列. 这一点相当出人意外并且一点都不明显[⊖].

定理 2.32 每个序列都有单调的子序列.

证明 考虑序列$\{a_n\}$. 称下标m是序列$\{a_n\}$的峰值下标，倘若对所有$\geq m$的下标n，$a_n \leq a_m$. 如图 2.4 所示. 此序列要么只有有限多个峰值下标，要么有无穷多个峰值下标.



图 2.4 若m是峰值下标，$n \geq m$，则$a_n \leq a_m$

情形 1：只有有限多个峰值下标. 可选择下标N使得不存在大于N的峰值下标. 我们将递归地定义$\{a_n\}$的单调递增子序列. 事实上，定义$n_1 = N+1$. 现假设k是一个下标使得正整数

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$$

的选取满足

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k}.$$

由于$n_k > N$，所以下标n_k不是峰值下标. 于是存在下标$n_{k+1} > n_k$使得$a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. 于是递归地定义了一个严格递增的正整数序列$\{n_k\}$，它具有子序列$\{a_{n_k}\}$是单调递增的性质.

情形 2：有无穷多个峰值下标. 对每个自然数k，设n_k是第k个峰值下标. 直接由峰值下标的定义可得子序列$\{a_{n_k}\}$是单调递减的. ■

定理 2.33 每个有界序列都有收敛的子序列.

证明 设$\{a_n\}$是有界序列. 按照上述定理，可选取单调的子序列$\{a_{n_k}\}$. 由于$\{a_n\}$是有界的，因此它的子序列$\{a_{n_k}\}$也是有界的. 于是$\{a_{n_k}\}$是有界的单调序列. 由单调收敛定理，$\{a_{n_k}\}$收敛. ■

45

关于定理 2.33，我们发现有一个非常有用的稍有改进的表述.

定义 实数集S称为是列紧的，如果S的每个序列$\{a_n\}$有一个子序列收敛于属于S的一个点.

例 2.34 定义$S \equiv [0, \infty)$，则S不是列紧的. 事实上，对每个下标n，令$a_n = n$，则$\{a_n\}$是S的序列. 但是由$\mathbb{R}$的阿基米德性质，$\{a_n\}$的每一子序列是无界的，因此由定理 2.18 知它们不收敛. 这样，集S不是列紧的. ■

例 2.35 定义$S \equiv (0, 2]$，则S不是列紧的. 事实上$\{1/n\}$是S的序列，它收敛于 0，因此它的每一子序列也收敛于 0. 但 0 不属于S，这样$\{1/n\}$中无子序列收敛于S中的点. 所以集S不是列紧的. ■

定理 2.36(列紧定理) 设a，b是满足$a<b$的数. 则区间$[a, b]$是列紧的，即$[a, b]$的每一序列有子序列收敛于$[a, b]$中的点.

证明 这个证明分成两个部分. 首先有必要证明$[a, b]$的一个序列有收敛的子序列，然后必须证明子序列的极限属于区间$[a, b]$. 令$\{x_n\}$是$[a, b]$的序列，则$\{x_n\}$是有界的. 因此由前述定理知，存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$收敛. 但是$\{x_{n_k}\}$是$[a, b]$的序列，因此由定理 2.22 知，它的极限也在$[a, b]$内. ■

⊖ 我们知道 $\sin x$ 是以无理数为周期的周期函数，而序列$\{\sin n\}$有单调子序列是令人困惑的.

上面的列紧定理通常称为波尔查诺-魏尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理.

习题

1. 对以下每一个陈述，确定其真假，并说出理由.

a. 有界序列的子序列是有界的.

b. 单调序列的子序列是单调的.

c. 收敛序列的子序列是收敛的.

d. 一个序列，如果它有收敛子序列，则此序列收敛.

2. 对以下每一个陈述，确定其真假，并说出理由.

a. 区间(0, 1)的每个序列有收敛子序列.

b. 区间(0, 1)的每个序列有收敛于(0, 1)中点的子序列.

c. 每个有理数序列有收敛的子序列.

d. 若一非负数序列收敛，则其极限也是非负的.

e. 每个非负数序列有收敛子序列.

46

3. 考虑序列$\{a_n\}$，其中对每个下标 n，$a_n=1/n$. 写出下面所列子序列的前五项：

a. $\{a_{3k+1}\}$ **b.** $\{a_{k+5}\}$ **c.** $\{a_{k^2}\}$

4. 对下述序列，寻找其峰值下标，并证实你的结论.

a. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ **b.** $\{(-1)^n\}$ **c.** $\{(-1)^n n\}$ **d.** $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

5. 证明严格增加序列无峰值下标.

6. 证明单调递减序列的每一个下标都是峰值下标.

7. 证明如果单调序列有一个有界子序列，则此单调序列本身也是有界的.

8. 假设单调序列$\{a_n\}$有一收敛子序列，证明序列$\{a_n\}$收敛.

9. 序列$\{a_n\}$称为有界，如果存在数 M，使得对每一下标 n 有

$$|a_n|\leqslant M.$$

证明：序列$\{a_n\}$有界当且仅当存在 $a<b$ 的数 a，b 使得$\{a_n\}$是$[a, b]$的序列.

10. 证明：序列$\{a_n\}$不收敛于数 a 当且仅当存在某个 $\varepsilon>0$ 及子序列$\{a_{n_k}\}$使得对每一下标 k 有

$$|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon.$$

11. 对例 2.3 中定义的序列$\{a_n\}$：

a. 证明：区间(0, 1]中每一有理数 x 是$\{a_n\}$的某个常值子序列的项值.

b. 证明：区间[0, 1]中每一数 x 是序列$\{a_n\}$的一个子序列的极限.

12. 对 $c>0$，考虑二次方程

$$x^2-x-c=0,\quad x>0.$$

固定 $x_1>0$，递归地定义序列$\{x_n\}$，然后对于下标 n，当 x_n 已定义时，定义

$$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}.$$

证明序列$\{x_n\}$单调收敛于上述方程的解.

*2.5 集合的覆盖性质

在对分析的讨论中，本节可算是一段小小弯路，其目的在于对列紧性提出一个令人诧异的不同的观点，这一观点在数学的许多不同领域是有用的. 后面的材料与本节是独立的. 我们从证明有界闭集是列紧的开始.

47

命题 2.37 令 S 是$\mathbb{R}$的有界闭子集，则 S 是列紧的.

证明 我们简单地顺着列紧定理的证明. 令$\{x_n\}$是 S 的一个序列. 则$\{x_n\}$是有界序列，因为 S 是有界的. 因此由定理 2.33 知，存在子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于数 x. 但序列$\{x_{n_k}\}$是 S 的序列且收敛于 x，因此由假设 S 是闭的，故极限 x 也属于 S. 因此集 S 是列紧的. ■

现在我们转而考虑闭区间$[a, b]$所具有的性质. 假设对每个自然数 n，S_n 是实数集. 我们用$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$表示这些集的全体. 对实数集 S，称集族$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$是 S 的一个*覆盖*(cover)，倘若对 S 的每个元 x，存在一个下标 n，使得 x 是 S_n 的元. 用集合并及包含记号，可写为

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

如果存在一个下标 N，使得

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} S_n,$$

则有限集族$\{S_1, \cdots, S_N\}$称为$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$对集 S 的一个*有限子覆盖*. 集的一个覆盖可以有也可以没有有限子覆盖.

例 2.38 令 S 是非负实数集$[0, \infty)$. 对每个下标 n，定义

$$I_n \equiv (-n, n).$$

由阿基米德性质知

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

所以开区间族$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$覆盖 S. 但任一有限族不能覆盖 S，这是因为不论下标 N 如何选定，$\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ 不包含数 $N+1$. ■

48

例 2.39 取区间$[a, b]$并在(a, b)内移动点 c，于是 $S \equiv \{x \mid a \leqslant x \leqslant b,\ x \neq c\}$. 定义

$$I_n \equiv (c-n, c-1/n) \quad \text{当 } n \text{ 是奇数}$$
$$I_n \equiv (c+1/n, c+n) \quad \text{当 } n \text{ 是偶数}.$$

如图 2.5 所示.

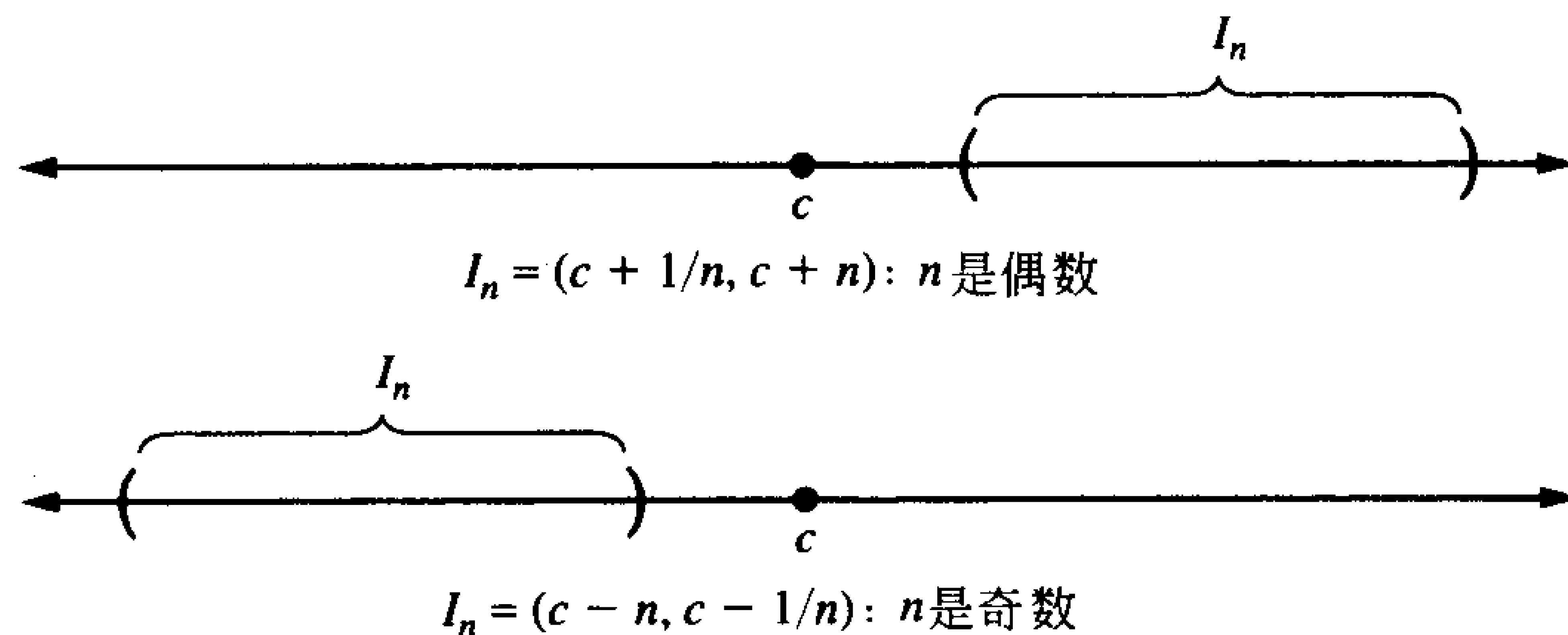


图 2.5 I_n：当 n 是偶数及奇数

由$\mathbb{R}$的阿基米德性质及$\{1/n\}$收敛于 0，得出开区间集$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$覆盖了除 c 外的所有实数，所以它亦覆盖了集 S. 但任一有限子集$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$不覆盖 S，这是因为一旦取定下标 N，$\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ 不

含有 S 中离 c 的距离小于 $1/N$ 的那些点. ■

因此，对于一般集 S，开区间集 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对 S 的覆盖不一定有有限子覆盖.

定义 $\mathbb{R}$ 的子集 S 称为是紧的(compact)，如果任一开区间集 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对 S 的覆盖有有限子覆盖，即对每个下标 n，I_n 是开区间及

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

则存在一下标 N，使得

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n.$$

由例 2.38 及例 2.39，我们下面证明紧集必须是既有界又是闭的[⊖].

49

命题 2.40 令 S 是 $\mathbb{R}$ 的列紧子集，则 S 是有界及闭的.

证明 对每个下标 n，定义 $I_n \equiv (-n, n)$. 由 $\mathbb{R}$ 的阿基米德性，$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是覆盖 $\mathbb{R}$ 的开区间集，所以它当然也覆盖集 S. 因为 S 是紧的，故存在一下标 N，使得

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n,$$

所以对 S 中的所有 x，有

$$|x| < N.$$

这样集 S 是有界的. 剩下的是证明 S 是闭的. 令 $\{a_n\}$ 是 S 的序列，它收敛于数 a，我们必须证明 a 也属于 S. 用反证法. 假设 a 不属于集 S，如同在例 2.38 中那样，定义

$$J_n \equiv (a - n, a - 1/n) \quad \text{当 } n \text{ 是奇数},$$
$$J_n \equiv (a + 1/n, a + n) \quad \text{当 } n \text{ 是偶数}.$$

由 $\mathbb{R}$ 的阿基米德性质及 $\{1/n\}$ 收敛于 0，可以看到 $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是覆盖除去数 a 的整个实数集的开区间集。但我们已假设 a 不属于 S，因此 $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 S 的覆盖. $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任一有限子集不能覆盖 S. 因为不论如何选取下标 N，由于 $\{a_n\}$ 是 S 中收敛于 a 的序列，故 S 中有点与 a 的距离小于 $1/N$. 这与 S 的紧性相矛盾，这样证明了 a 是属于 S 的，即 S 是闭的. ■

下面的命题断言列紧集是紧的. 这是十分奇怪的，因为这两个概念看起来是不相关的，除了名字的选取外. 这个命题的证明是相当精巧的.

命题 2.41 设 S 是 $\mathbb{R}$ 的列紧子集，则 S 是紧的.

证明 假设 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是开区间的集合且是 S 的一个覆盖. 我们将证明存在一下标 N 使得

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n. \tag{2.25}$$

由于 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 覆盖 S，故对 S 中的点，我们可定义它的覆盖下标是最小下标 k，使得 x 属于 I_k，这一覆盖下标记为 cover index(x). 可以看到

$$\text{cover index}(x) \leqslant k \quad \text{当且仅当} \quad x \text{ 属于 } \bigcup_{n=1}^{k} I_n.$$

⊖ 这里提到的紧性的概念有时指可数紧性，紧性与可数紧性稍有不同，但在实数系范围，这两个概念是等价的.

(2.25)式成立当且仅当对 S 中的所有 x,

50

$$\text{cover index}(x) \leqslant N. \tag{2.26}$$

现在观察到给定 S 中的点 x, x 属于 I_n, 其中 n 是 x 的覆盖下标. 因为 I_n 是开区间, 因此有以 x 为中心的开区间 J 使得 $J \subseteq I_n$. 这就得出 $S \cap J$ 的每一点的覆盖下标至多是 n(如图 2.6 所示), 即对所有 z 属于 $S \cap J$, 有

$$\text{cover index}(z) \leqslant \text{cover index}(x). \tag{2.27}$$

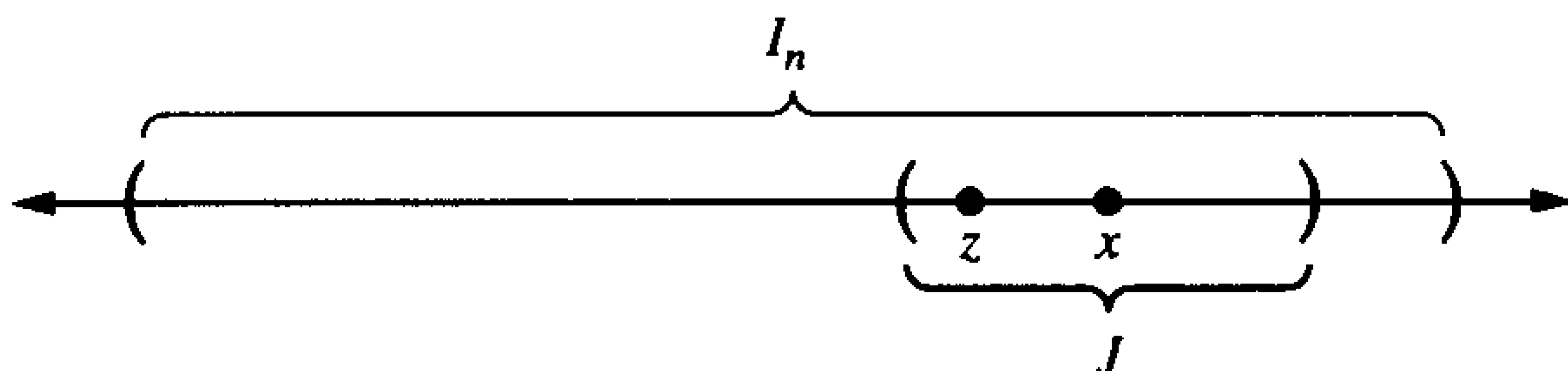


图 2.6 当 z 属于 J 时 cover index$(z) \leqslant n$

如果满足(2.26)的自然数 N 不存在, 则对每一个自然数 n, 在 S 中有一点其覆盖下标大于 n, 选取这样的点并记为 x_n, 这样, $\{x_n\}$ 是 S 的序列, 使得对每一个下标 n,

$$\text{cover index}(x_n) > n. \tag{2.28}$$

但是, 由假设, 集 S 是列紧的, 故存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于点 x_0 且也属于 S. 如同上面已注意到的, 可选取一开区间 J 以 x_0 为中心, 使(2.27)成立. 但是 x_0 是序列 $\{x_{n_k}\}$ 的极限, 所以有下标 K, 使得对每个 $k \geqslant K$ 有

$$x_{n_k} \text{ 属于 } J.$$

这样, 对每个 $k \geqslant K$,

$$\text{cover index}(x_{n_k}) \leqslant \text{cover index}(x_0).$$

但由(2.28), 对所有下标 k,

$$\text{cover index}(x_{n_k}) \geqslant n_k \geqslant k,$$

因此得出矛盾. 所以假设无有限子覆盖导致矛盾, 因而可得存在有限子覆盖. 这样, 列紧集 S 是紧的. ■

定理 2.42 对$\mathbb{R}$ 的子集 S, 下述三个论断是相互等价的:

i. S 是闭及有界的.

ii. S 是列紧的.

iii. S 是紧的.

证明 命题 2.37 断言(i)蕴涵(ii). 命题 2.41 断言(ii)蕴涵(iii). 最后命题 2.40 断言(iii)蕴涵(i). ■

51

$\mathbb{R}$ 的闭且有界的子集紧的论断通常称为海涅-博雷尔(Heine-Borel)定理. $\mathbb{R}$ 的闭且有界的子集是列紧的论断通常称为波尔查诺-魏尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理.

习题

1. 对以下每一个陈述, 确定其真假, 并给出理由.

a. 每个有界集是闭的.

b. 每个闭集是有界的.

c. 每个闭集是紧的.

d. 每个有界集是紧的.

e. 紧集的子集也是紧的.

2. 对以下每一个陈述，确定其真假，并给出理由.

a. 无理数集是闭的.

b. 位于区间[0, 1]的有理数是紧的.

c. 负数集是闭的.

3. 令 a, b 是满足 $a<b$ 的数. 定义 $S\equiv[a, b)\equiv\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

a. 用列紧定义证明 S 不是列紧的.

b. 用紧性定义证明 S 不是紧的.

c. 用闭的定义证明 S 不是闭的.

4. 令 S 是区间[0, 2]中的有理数集.

a. 用列紧定义证明 S 不是列紧的.

b. 用紧性定义证明 S 不是紧的.

c. 用闭的定义证明 S 不是闭的.

5. 若 S 是由单个点组成的集合，证明 S 是紧的.

6. 若 $S=[0, 1]\cup[3, 4]$，证明 S 是紧的.

7. 若 A, B 是紧集，证明并 $A\cup B$ 及交 $A\cap B$ 也都是紧的.

8. 令 A, B 是 $\mathbb{R}$ 的集，若并 $A\cup B$ 是紧的，那么"A 与 B 都必是紧的"的结论正确吗?

9. 在列紧蕴涵紧性的证明中，什么样的单个点需要借助于开区间覆盖的下标来确定?

10. 对每个自然数 n，令 I_n 是闭的有界区间. 假定 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 覆盖由闭的有界区间[0, 1]组成的紧集，那么"覆盖 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有有限子覆盖"这一结论正确吗?

11. 检查一下列紧蕴涵紧性的定理的证明，并证明我们运用的覆盖中集 I_n 的仅有性质是：如果一点 x 位于 I_n，则有一个开区间 J 以 x 为中心，且也位于 I_n 内，具有这一性质的集称为是开的.

12. 对列紧集必须是有界且闭的给出一个直接证明，而不借助于紧性这一概念.

52

第3章 连续函数

3.1 连续性

在第 2 章我们考察了以自然数集为定义域的实值函数，也就是实数序列. 现在开始研究以 $\mathbb{R}$ 的一般子集为定义域的实值函数. 有一个标准的记法：对于实数集 D，用

$$f:D \to \mathbb{R}$$

表示以 D 为定义域的函数，对 D 中的每一点 x 用 $f(x)$ 表示赋予 x 的函数值. 当我们写 $f:D \to \mathbb{R}$ 时，除非特别申明，否则总假定 D 是实数集.

描述函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 的两个基本概念是连续性与可微性，本章前五节讨论连续性，最后一节研究极限，为第 4 章开始的可微性的讨论作准备.

定义 *函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 称为在 D 中的点 x_0 处连续，倘若每当 D 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 时，都有象序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_0)$. 函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 称为连续的，倘若它在 D 中的每一点都是连续的.*

函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 在 D 中点 x_0 连续的定义可以精确直观地表达为：“如果 D 中的点 x 趋向于 x_0，则它的象 $f(x)$ 趋向于 $f(x_0)$”. 这一性质同样可用“如果 D 中的点 x 充分地接近 x_0，差 $f(x)-f(x_0)$ 就会变得任意小”来描述. 这些陈述加上引号是因为我们不能把“任意小”与“接近”表达成数学上精确的概念. 在 3.4 节中还将以不同方式来重述连续性这一概念.

53

三个例子

例 3.1 对每个数 x，定义 $f(x)=x^2-2x+4$，则函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的. 为验证这一点，取 $\mathbb{R}$ 中的点 x_0，需证明函数在 x_0 是连续的. 令 $\{x_n\}$ 是收敛到 x_0 的序列. 由收敛序列的和与积的性质，

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}[x_n^2 - 2x_n + 4] = x_0^2 - 2x_0 + 4 = f(x_0).$$

因此，$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 x_0 是连续的. ■

上面的例子是多项式连续性的一个特例. 2.1 节中叙述过的收敛序列的多项式性质就是多项式的连续性的一个陈述.

例 3.2 定义函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \geqslant 0 \\ 2 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

如图 3.1 所示. 函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 除 $x_0=0$ 外是处处连续的. 首先考虑 $x_0=0$，序列 $\{-1/n\}$ 收敛于 0，但 $\{f(-1/n)\}$ 是常值序列，每项都等于 2，这样，

$$\lim_{n\to\infty} f(-1/n) = 2 \neq 1 = f(0),$$

所以 f 在 $x_0=0$ 处不连续. 现在考虑 $x_0 \neq 0$，如果序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，则存在下标 N，使得对所有 $n>N$ 有 $f(x_n)=f(x_0)$，这样，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

即 f 在点 x_0 处是连续的. ■ [54]

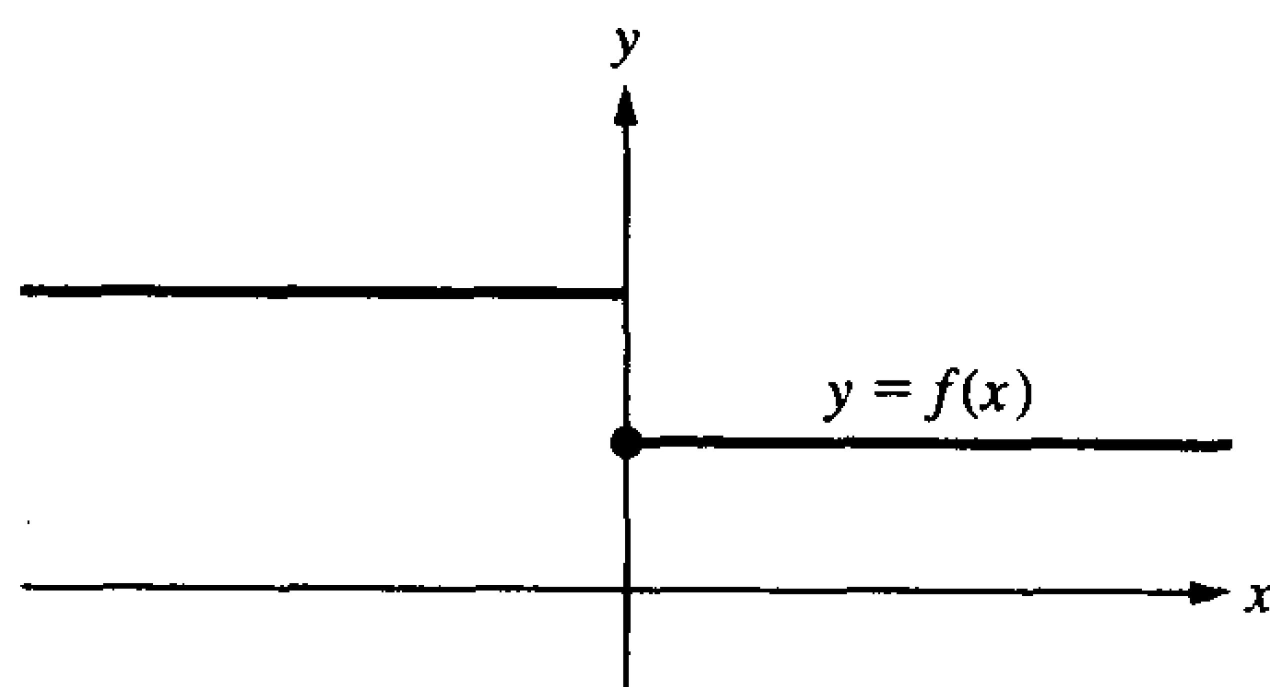


图 3.1 函数 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在点 $x=0$ 处不连续

例 3.3 定义函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 是有理数} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

此函数称为狄利克雷(Dirichlet)函数. 狄利克雷函数在 $\mathbb{R}$ 中任何一点都不连续. 事实上，在 $\mathbb{R}$ 上给定点 x_0，根据有理数及无理数的序列稠密性(回顾定理 2.20)，存在收敛于 x_0 的有理数的序列 $\{u_n\}$，也存在收敛于 x_0 的无理数的序列 $\{v_n\}$. 但 $\{f(u_n)\}$ 是所有项等于 1 的常数序列，而 $\{f(v_n)\}$ 是所有项等于 0 的常数序列. 这样，

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(v_n).$$

由于序列 $\{u_n\}$ 和序列 $\{v_n\}$ 都收敛到 x_0，所以函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 x_0 不可能是连续的. 注意，狄利克雷函数的不连续性质的一种表达方式是无法画出它的图形. ■

连续函数的和、积及商

给定两个函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 及 $g:D \to \mathbb{R}$，定义和 $f+g:D \to \mathbb{R}$ 与积 $fg:D \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\text{对 } D \text{ 中的所有 } x, (f+g)(x) \equiv f(x)+g(x) \text{ 与 } (fg)(x) \equiv f(x)g(x).$$

此外，若对 D 中所有的 x，$g(x) \neq 0$，定义商 $f/g:D \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\text{对 } D \text{ 中的所有 } x, (f/g)(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)}.$$

下面是与收敛序列的和、积与商的性质类似的定理，也是它们的一个推论.

定理 3.4 假定函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 与 $g:D \to \mathbb{R}$ 在 D 中的点 x_0 是连续的. 那么和

$$f+g:D \to \mathbb{R} \text{ 在点 } x_0 \text{ 是连续的,} \tag{3.1}$$

积

$$fg:D \to \mathbb{R} \text{ 在点 } x_0 \text{ 是连续的,} \tag{3.2}$$

以及如果对 D 中所有的 x，$g(x) \neq 0$，则商

$$f/g:D \to \mathbb{R} \text{ 在点 } x_0 \text{ 是连续的.} \tag{3.3}$$

证明 令 $\{x_n\}$ 是 D 中收敛到 x_0 的序列. 由连续性的定义，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{及} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0).$$ [55]

收敛序列的和的性质蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+g(x_n)]=f(x_0)+g(x_0),\tag{3.4}$$

而收敛序列的积的性质蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)g(x_n)]=f(x_0)g(x_0).\tag{3.5}$$

如果对 D 中所有的 x，$g(x)\neq 0$，收敛序列的商的性质蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.\tag{3.6}$$

根据连续性的定义，由(3.4)、(3.5)及(3.6)可分别得到(3.1)、(3.2)及(3.3). ■

2.1 节所述的收敛序列的多项式性质精确地断言：多项式是连续的，这样由连续函数的商的性质，我们有描述一类一般连续函数的如下推论.

推论 3.5 令 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及 $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是多项式，则商 $p/q:D\to\mathbb{R}$ 是连续的，其中 $D=\{x$ 在$\mathbb{R}$内 $\mid q(x)\neq 0\}$.

连续函数的复合

除了形成函数的和、积、商之外，还存在另一种有用的方法组合函数：函数可以复合.

定义 对于函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 $g:U\to\mathbb{R}$，其中 $f(D)$ 包含在 U 中，定义 $f:D\to\mathbb{R}$ 与 $g:U\to\mathbb{R}$ 的复合(用 $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ 表示)为

$$\text{对 } D \text{ 中的所有 } x,(g\circ f)(x)\equiv g(f(x)).$$

对连续函数，有下列的复合性质.

定理 3.6 对于函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 $g:U\to\mathbb{R}$，其中 $f(D)$ 包含在 U 中，假定 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 D 中的点 x_0 连续且 $g:U\to\mathbb{R}$ 在点 $f(x_0)$ 连续，则复合函数

$$g\circ f:D\to\mathbb{R}$$

56 在点 x_0 是连续的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 D 中收敛到 x_0 的序列. 由函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 的连续性，序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_0)$. 另一方面 $\{f(x_n)\}$ 是 U 中收敛到 $f(x_0)$ 的序列，所以由 $g:U\to\mathbb{R}$ 在点 $f(x_0)$ 的连续性，序列 $\{g(f(x_n))\}$ 收敛到 $g(f(x_0))$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n)=(g\circ f)(x_0).$$

于是复合函数 $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 是连续的. ■

习题

1. 对以下每一个陈述，确定它的真假，并给出理由.

a. 如果函数 $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，则函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 也是连续的.

b. 如果 f^2：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，则函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

c. 如果 $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，则 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

d. $\mathbb{N}$ 是自然数集，每个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

2. 定义

$$f(x)=\begin{cases}11 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x & \text{当 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

函数 f：$[0,2]\to\mathbb{R}$ 在哪些点上是连续的？说出理由.

3. 定义

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 若\ x\leqslant 0\\ x+1 & 若\ x>0.\end{cases}$$

函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在哪些点连续？给出理由.

4. 对于函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 D 中的一点 x_0，定义 $A=\{x 在 D 中 \mid x\geqslant x_0\}$ 及 $B=\{x 在 D 中 \mid x\leqslant x_0\}$. 证明 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处连续当且仅当 $f:A\to\mathbb{R}$ 与 $f:B\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续.

5. 定义

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 若\ x\geqslant 0\\ x & 若\ x<0.\end{cases}$$

证明函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.（提示：用习题 4.）

6. 定义函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & 若\ x\ 是有理数\\ -x^2 & 若\ x\ 为无理数.\end{cases}$$

此函数在哪些点是连续的？给出理由.

7. 假设函数 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的，且当 $0\leqslant x<1$ 时有

$$f(x)\geqslant 2,$$

证明 $f(1)\geqslant 2$.

[57]

8. 假设函数 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的，且当 $0\leqslant x<1$ 时有

$$f(x)>2,$$

问必定存在 $f(1)>2$ 这种情况吗？

9. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续且 $f(x_0)>0$. 证明存在区间 $I\equiv(x_0-1/n,\ x_0+1/n)$（其中 n 是自然数），使得对 I 中所有 x 有 $f(x)>0$.（提示：反证法.）

10. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续，证明存在区间 $I\equiv(x_0-1/n,\ x_0+1/n)$（其中 n 是自然数），使得对 I 中所有 x，有 $f(x)<n$.（提示：反证法.）

11. 假设函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，且当 x 是有理数时 $g(x)=0$. 证明对 $\mathbb{R}$ 中所有 x 有 $g(x)=0$.

12. 假设函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是连续的. 对于 D 中的 x，定义函数 $|f|:D\to\mathbb{R}$ 为 $|f|(x)=|f(x)|$. 证明 $|f|:D\to\mathbb{R}$ 也是连续的.

13. 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为利普希茨(Lipschitz)函数，如果存在一个非负数 C，使得对 D 内所有 u，v，

$$|f(u)-f(v)|\leqslant C|u-v|.$$

用 2.1 节的比较引理证明利普希茨函数是连续的.

14. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有如下性质：

$$对\ \mathbb{R}\ 中所有\ u\ 及\ v,\quad f(u+v)=f(u)+f(v).$$

a. 定义 $m\equiv f(1)$，证明

$$对所有有理数\ x,\quad f(x)=mx.$$

b. 用(a)证明：如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，则

$$对\ \mathbb{R}\ 中所有\ x,\quad f(x)=mx.$$

3.2 极值定理

对函数 $f:D\to\mathbb{R}$，定义

$$f(D)\equiv\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

称集 $f(D)$ 是函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 的象. 我们说函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 达到一个极大值(maximum value)，倘若它的象 $f(D)$ 有极大值；也就是说，在 D 中存在点 x_0，使得

$$\text{对 } D \text{ 中所有点 } x, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

称 D 中这样的点为函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 的一个极大化点(maximizer). 类似地，函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为达到一个极小值(minimum value)，倘若它的象 $f(D)$ 有极小值. D 中能取到这个极小值的点称为 $f:D\to\mathbb{R}$ 的一个极小化点(minimizer).

58

一般来讲，一个非空集合有极大值，如果集合是有上界的并包含它的上确界. 这样，对于函数 f: $D\to\mathbb{R}$，当象 $f(D)$ 有上界且象的上确界是函数值时，它确实有极大值.

通常，不能作出函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 的极小值或极大值存在的推断.

例 3.7 定义函数 f: $(0, 1)\to\mathbb{R}$ 为对 $(0, 1)$ 中所有 x 有 $f(x)=2x$. 如图 3.2 所示. 这个函数没有极大值，这是因为不论在 $(0, 1)$ 内选定什么样的 x_0，区间 $(x_0, 1)$ 上所有点的函数值都是大于 $f(x_0)$ 的. 注意，这个函数的象有上界，且上确界是 2，但 2 不是函数的值.

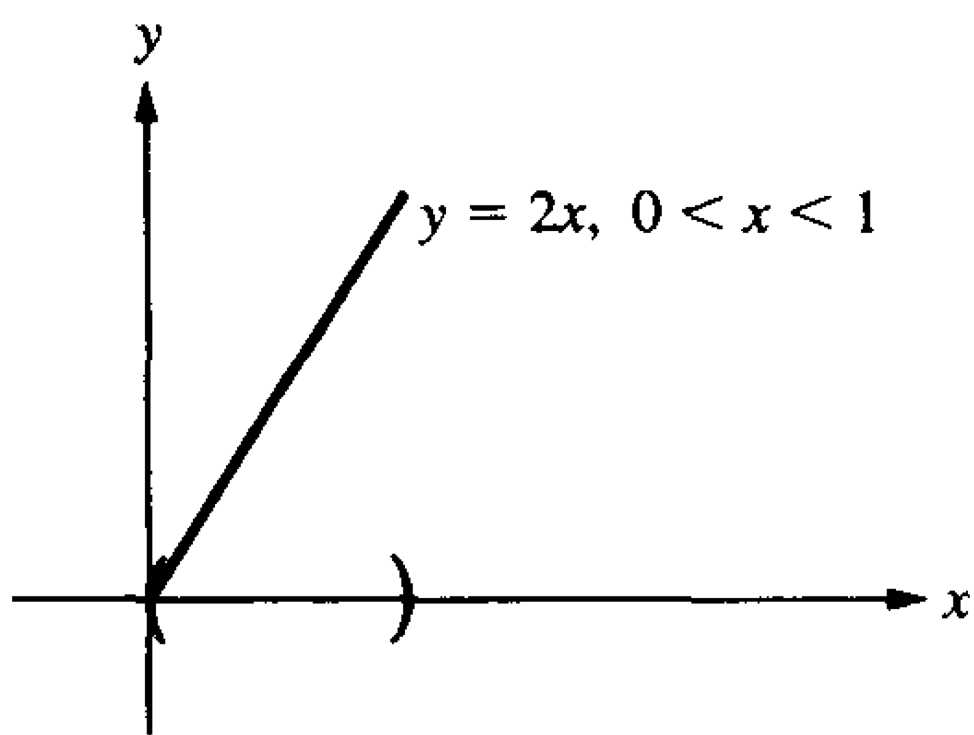


图 3.2 象的上确界不是函数值 ■

例 3.8 定义函数 f: $(0, 1)\to\mathbb{R}$ 为对 $(0, 1)$ 内所有 x，$f(x)=1/x$. 对每个自然数 n，$f(1/n)=n$，所以它的象甚至没有上界，这样函数自然不能取得极大值.

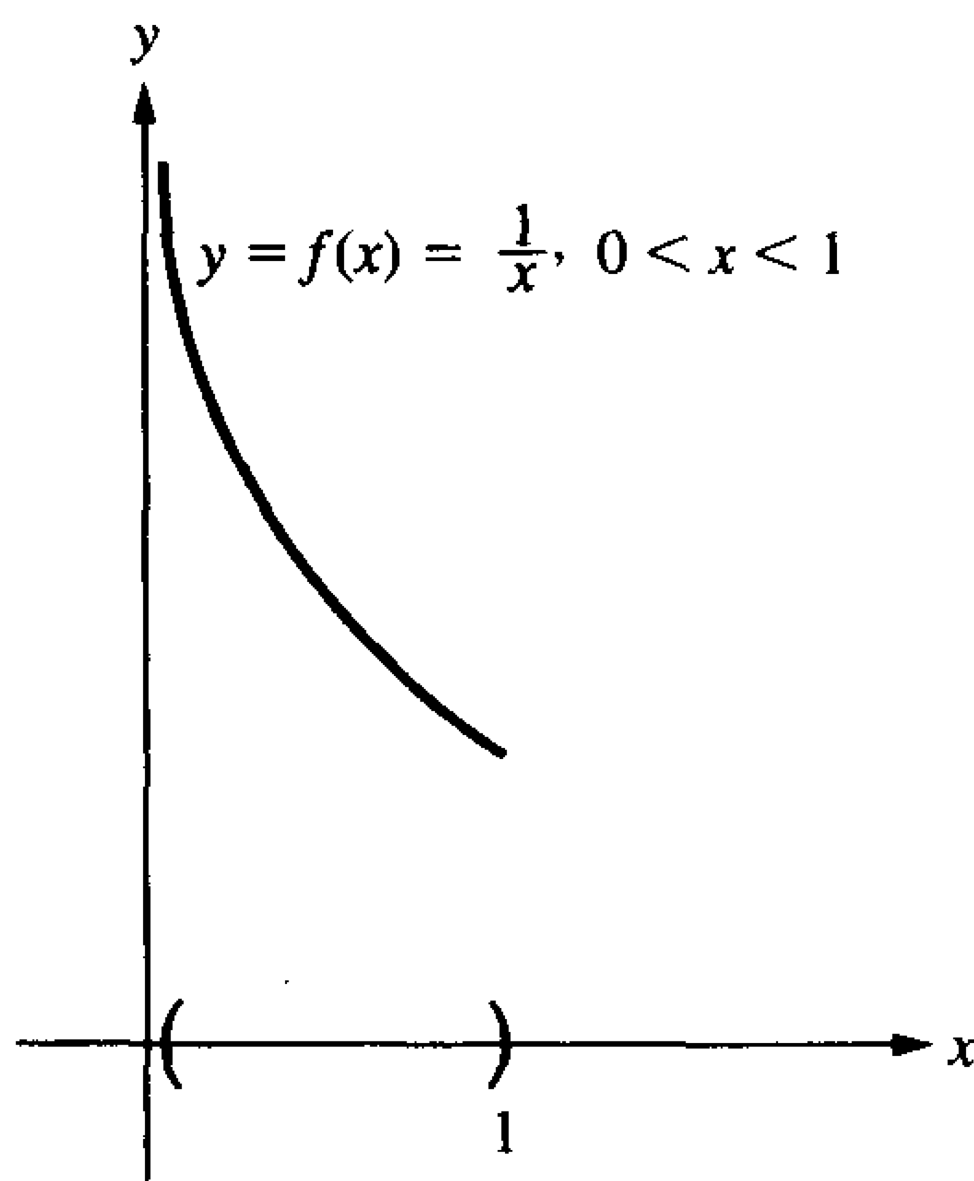


图 3.3 函数 $f(x)=1/x$ 在 $(0, 1]$ 上的象无上界 ■

但是，当定义域 D 是有界闭区间 $[a, b]$ 及函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 连续时，我们有下述重要结果.

59

定理 3.9(极值定理) 有界闭区间上的连续函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 既能达到极小值也能达到极大值.

为证明函数$f:D\to\mathbb{R}$有极大值，一个理性的策略是证明

- 象$f(D)$有上界，
- 数$\sup f(D)$是函数的值.

下面引理是用上面第一个策略来证明极值定理.

引理 3.10 *假定函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在有界闭区间上是连续的，则f: $[a, b]\to\mathbb{R}$的象有上界，即存在数M使得*

$$\text{对}[a,b]\text{中的所有}x,\quad f(x)\leqslant M.$$

证明 用反证法论证. 假定不存在上述这样的数M. 设n为自然数，则

$$\text{对}[a,b]\text{中的所有}x,\quad f(x)\leqslant n$$

不成立. 这样，在$[a, b]$上存在点x使得$f(x)>n$. 选取一个这样的点并将它标记为x_n，这就定义了$[a, b]$中的一序列$\{x_n\}$，满足对每个下标n，$f(x_n)>n$. 可以用列紧定理(定理2.36)选取$\{x_n\}$的一子序列$\{x_{n_k}\}$收敛到$[a, b]$中的点x_0. 由于函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在点x_0是连续的，象序列$\{f(x_{n_k})\}$收敛到$f(x_0)$. 但收敛序列是有界的(定理2.18)，所以序列$\{f(x_{n_k})\}$是有界的. 这与性质

$$\text{对所有下标}k,\quad f(x_{n_k})>n_k\geqslant k$$

相矛盾. 这一矛盾证明了函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$的象是有上界的. ■ 60

极值定理的证明 定义$S\equiv f([a, b])$. 则S是非空实数集，根据上述引理，S是有上界的. 按照完备性公理，S有上确界. 定义$c\equiv\sup S$. 有必要在$[a, b]$中求得一点x_0. 使得$c=f(x_0)$.

设n是自然数. 则数$c-1/n$是小于c的数，因而不是集S的上界. 于是在$[a, b]$中存在一点x使得$f(x)>c-1/n$. 选取这样的一个点并标记为x_n. 由这一取法及c为S的上界的事实可知，对每一个下标n，$c-1/n<f(x_n)\leqslant c$. 因此序列$\{f(x_n)\}$收敛到c.

列紧定理(定理2.36)断定存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$收敛到$[a, b]$中的点x_0. 由于f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在x_0是连续的，$\{f(x_{n_k})\}$收敛到$f(x_0)$. 但$\{f(x_{n_k})\}$是$\{f(x_n)\}$的子序列，所以$c=f(x_0)$. 点x_0是函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$的一个极大值点.

为完成定理的证明，注意到函数$-f$: $[a, b]\to\mathbb{R}$也是连续的. 因而，由上面所证可在$[a, b]$中选取一点，让$-f$: $[a, b]\to\mathbb{R}$在这一点达到极大值，于是函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在这一点达到极小值. ■

习题

1. 对下述每一个陈述，确定其真假，说出理由.

a. 每一个函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$有极大值.

b. 每一个连续函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$有极小值.

c. 每一个连续函数f: $(0, 1)\to\mathbb{R}$有极大值.

d. 每一个连续函数f: $(0, 1)\to\mathbb{R}$有有界的象.

e. 如果连续函数f: $(0, 1)\to\mathbb{R}$的象下有界，则函数有极小值.

2. 求下列每一个函数的极大值点：

a. f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$，其定义为$f(x)=\sqrt{x}+x^{10}+4$，$0\leqslant x\leqslant 1$.

b. g: $[-1, 1]\to\mathbb{R}$，其定义为 $g(x) = -x^{10}(x-1/4)^{24}$， $-1\leqslant x\leqslant 1$.

c. h: $[-1, 1]\to\mathbb{R}$，其定义为 $h(x)=4-2x^3$， $-1\leqslant x\leqslant 1$.

3. 设 a 与 b 是满足 $a<b$ 的实数，求一个象无上界的连续函数 f: $(a, b)\to\mathbb{R}$. 再求一个象有上界但不能取到极大值的函数 f: $(a, b)\to\mathbb{R}$.
4. 假设 S 是实数的一个非空集且是非列紧的. 证明下述二者之一成立：(i) S 中存在无界序列；(ii) S 中存在一个序列收敛于不属于 S 的点 x_0.
5. 如果集 S 含有一无界的序列，证明由 $f(x)=x$ 定义的函数 f: $S\to\mathbb{R}$ 连续但无界，其中 $x\in S$. 如果集 S 包含一个收敛于非 S 中的点 x_0 的序列，则由 $f(x)=1/|x-x_0|$ 定义的 f: $S\to\mathbb{R}$ 是连续但无界的，其中 $x\in S$.

61

6. 用习题4与5证明：如果 S 是$\mathbb{R}$的一个非列紧的非空子集，则存在一函数 f: $S\to\mathbb{R}$ 是连续但无界的.
7. 假定函数 f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ 是连续的，$f(0)>0$ 且 $f(1)=0$. 证明在 $(0, 1]$ 中存在数 x_0，对 $0\leqslant x<x_0$，满足 $f(x_0)=0$ 且 $f(x)>0$，即在区间 $[0, 1]$ 中存在一个最小点使得函数 f 取值 0.

3.3 介值定理

我们要证的连续函数的图形的第二个重要的几何性质是：如果连续函数的定义域由一个区间组成，并且它的图形包含线 $y=c$ 之上与之下的点，则函数的图形与直线 $y=c$ 相交.

定理 3.11（介值定理） *假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，令 c 是严格地介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 间的数(如图 3.4 所示)，即*

$$f(a)<c<f(b) \text{ 或 } f(b)<c<f(a).$$

则在开区间 (a, b) 中存在点 x_0 满足 $f(x_0)=c$.

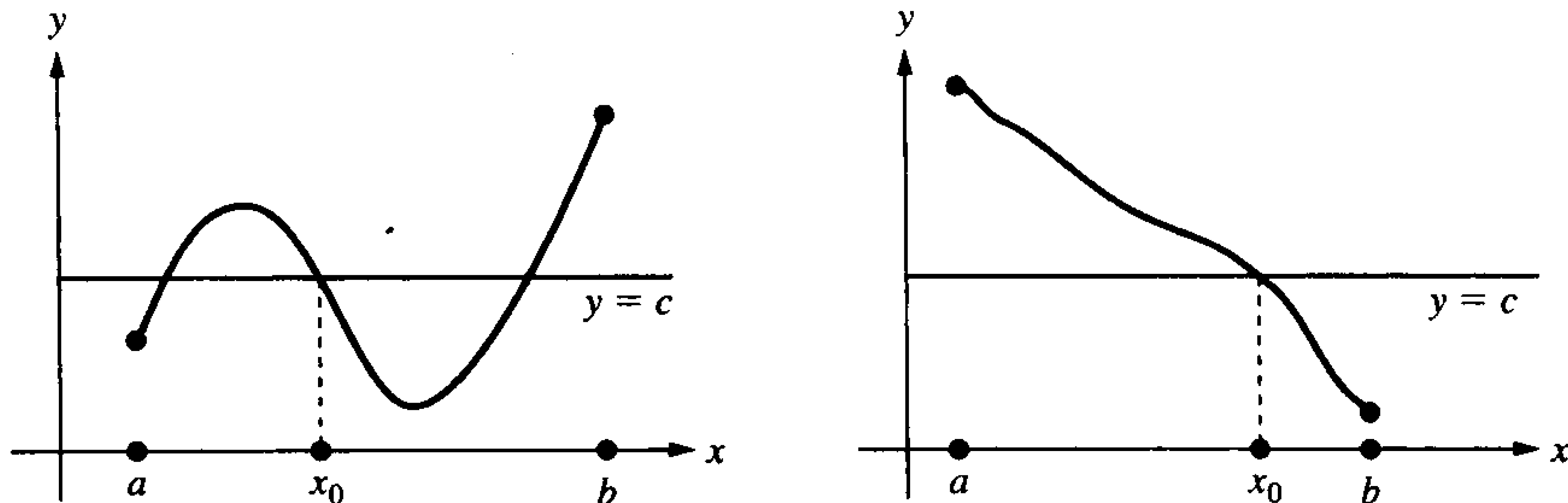


图 3.4 介于两个函数值之间的数仍是函数的值

证明(二分法) 我们仅考虑这样的情况：$f(a)<c$ 及 $f(b)>c$. 至于其他情况可以根据这个情况用 $-f$ 来代替 f 及 $-c$ 代替 c 得出. 我们递归地定义区间 $[a, b]$ 的闭子区间套序列，这些区间的端点收敛到 $[a, b]$ 中的一点 x，在该点 $f(x)=c$.

62

令 $a_1=a$ 及 $b_1=b$. 对自然数 n，假设含于 $[a, b]$ 中的区间 $[a_n, b_n]$ 已经定义，满足 $f(a_n)\leqslant c$ 且 $f(b_n)>c$，考虑中点 $m_n=(a_n+b_n)/2$.

- 如果 $f(m_n)\leqslant c$，定义 $a_{n+1}=m_n$ 及 $b_{n+1}=b_n$.
- 如果 $f(m_n)>c$，定义 $a_{n+1}=a_n$ 及 $b_{n+1}=m_n$.

注意到对每个自然数 n，

$$a\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant b,$$
$$f(a_{n+1})\leqslant c \quad 且 \quad f(b_{n+1})>c,$$

以及

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

由此可得对所有 n，$(b_n - a_n) = (b-a)/2^{n-1}$. 于是序列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$满足区间套定理(定理2.29)的假设条件，所以在区间$[a, b]$中存在点x_0，使得$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛到这一点. 由于f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在点x_0是连续的，所以象序列$\{f(a_n)\}$及$\{f(b_n)\}$收敛到$f(x_0)$. 对每个下标n，由于$f(a_n)\leqslant c$，可得$f(x_0)\leqslant c$，同样由于$f(b_n)\geqslant c$，可得$f(x_0)\geqslant c$. 由此得$f(x_0)=c$. 二分法如图3.5所示.

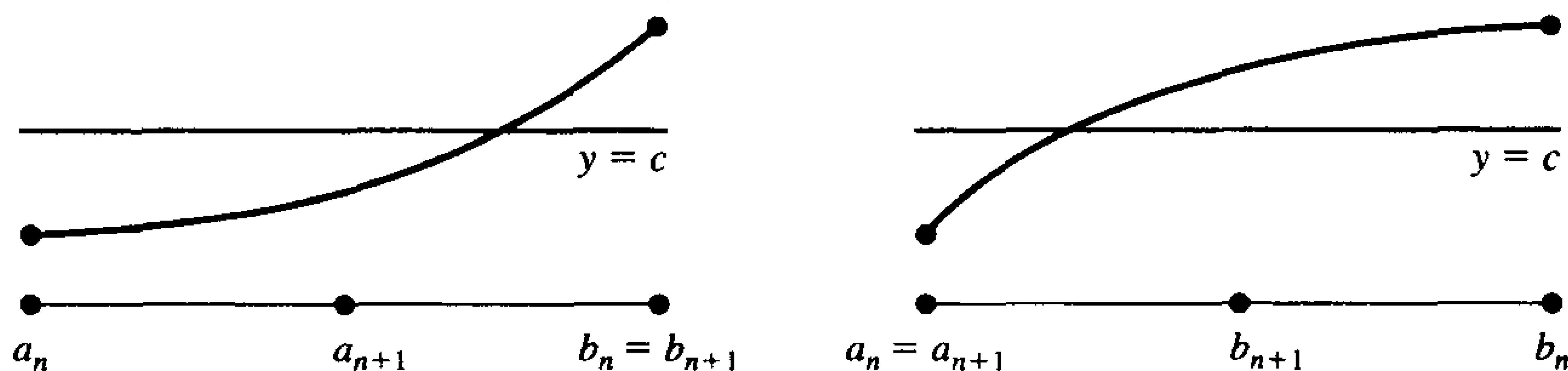


图3.5 二分法

■

例3.12 对任一正数 c，下述方程有解.

$$x^2 = c, x > 0. \tag{3.7}$$

事实上，考虑函数f: $[0, c+1]\to\mathbb{R}$定义为

$$f(x) = x^2, 0 \leqslant x \leqslant c + 1.$$

这个函数是连续的，因为它是多项式，且

$$f(0) = 0 < c \text{ 而 } f(c+1) = c^2 + 2c + 1 > c.$$

由介值定理推得方程(3.7)有解. ■

63

对自然数 k 及实数 a_0，a_1，…，a_k，考虑方程

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

一般说来，这个方程可能没有任何解. 例如，方程

$$1 + x^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

没有解，这是因为$1>0$且$x^2\geqslant 0$. 对$k=1$，(3.8)式很容易分析. 对$k=2$，例3.12保证正数的平方根是严格定义的，(3.8)式可用二次公式分析. 对$k=3$及$k=4$，存在与二次公式相类似但稍为复杂的显式公式确定(3.8)的解. 然而，对$k\geqslant 5$，对系数a_0，a_1，…，a_k任意选取的方程(3.8)，不存在确定其解的公式. 这可以从漂亮的伽罗瓦定理推出，很可惜，这超出了本书的范围[⊖]. 于是，哪怕函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$只是多项式，只要它的次数大于4，通常就不能十分明确地确定方程

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

的解. 所以可以想象，当函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是用例如三角函数或指数函数定义的话，要确定方程(3.9)的解十分困难.

但是介值定理对于研究方程(3.9)是十分有用的. 如果$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的且若能找到数$a$，

⊖ 见 I. N. Herstein 的《Topics in Algebra》.

b 满足 $a<b$ 及 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程(3.9)在开区间(a,b)内有解．此外，定理3.11的证明方法称为二分法，该方法提供一个递归方法，经过 n 步，确定$[a,b]$的一个子区间，其长度是$(b-a)/2^{n-1}$，它含有方程(3.9)的一个解．

例3.13 设 x 在$\mathbb{R}$内，考虑方程

$$x^5+x+1=0.$$

我们说这个方程是有解的．事实上，对所有 x，定义 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $h(x)=x^5+x+1$．注意到 $h(-2)<0$ 及 $h(0)>0$．这样，对限制 $h:[-2,0]\to\mathbb{R}$ 可用介值定理来得出结论：在开区间$(-2,0)$中存在一点 x_0，它是方程的一个解． ■

介值定理有一个稍为一般化的形式，它之所以令人感兴趣，是因为它可以适用于有多个实变量的实值函数．

定义 *$\mathbb{R}$的子集 D 称为是凸的(convex)，只要点 u，v 在 D 内且 $u<v$，则区间$[u,v]$整个包含在 D 内．*

64

在习题11中我们给出了$\mathbb{R}$的凸子集就是区间的证明概要．把区间这一凸的性质表现出来是有用的，因为这是下述介值定理的稍为一般的推广的证明中的精髓．

定理3.14 *令 I 是一区间并假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是连续的，则它的象 $f(I)$ 也是区间．*

证明 我们证明象 $f(I)$ 是一个凸集．令 y_1 与 y_2 是 $f(I)$ 的点且 $y_1<y_2$．我们必须证明闭区间$[y_1,y_2]$也包含在 $f(I)$ 内．事实上，令 $y_1<c<y_2$．由于 y_1 与 y_2 是 $f(I)$ 中的点，故存在 x_1 与 x_2 是 I 的点使得 $f(x_1)=y_1$ 及 $f(x_2)=y_2$．如果令 J 是以 x_1，x_2 为端点的闭区间，则 J 包含在 I 内，因为由假设集 I 是一区间，因此它是凸的．这样，可以应用介值定理到函数 $f:J\to\mathbb{R}$，推出 J 内存在一点 x_0 使得 $f(x_0)=c$．这样，x_0 属于 I 及 $f(x_0)=c$．这就得到$[y_1,y_2]$包含在 $f(I)$ 内． ■

习题

1. 对以下每一个陈述，确定它的真假，并给出理由．

a. 若函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，则 $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$．

b. 对任一函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$，它的象 $f([0,1])$ 是一个区间．

c. 对任一连续函数 $f:D\to\mathbb{R}$，它的象 $f(D)$ 是一区间．

d. 对一个连续且严格递增的函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$，它的象是区间$[f(0),f(1)]$．

2. 证明下面的方程有解：

$$x^9+x^2+4=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

3. 证明下面的方程有解：

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}+x^2-2x=0,\quad x>0.$$

4. 对函数 $f:D\to\mathbb{R}$，方程

$$f(x)=x,\quad x\in D$$

的解称为 $f:D\to\mathbb{R}$ 的不动点．不动点对应于函数 f 的图形与直线 $y=x$ 的交点．如果 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的，$f(-1)>-1$，且 $f(1)<1$，证明 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 有一个不动点．

5. 假定函数 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 与 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的．注意到方程

$$h(x)=g(x),\quad x\in[a,b]$$

65

的解对应于图形的交点．证明：如果 $h(a)\leqslant g(a)$ 且 $h(b)\geqslant g(b)$，则该方程有解．

6. 假定$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的，它的象$f(\mathbb{R})$是有界的．证明下面的方程有解：

$$f(x)=x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

7. 假定函数f：$[a,b]\to\mathbb{R}$是连续的．对自然数k，令$x_1,\cdots,x_k$是$[a,b]$中的点．证明在$[a,b]$中存在点z，使得

$$f(z)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_k)}{k}.$$

8. 定理3.11的证明有一个构造性步骤：在第n阶段分离出一个长度为$(b-a)/2^{n-1}$的区间$[a_n,b_n]$，它含有方程

$$f(x)=c,\quad x\in[a,b]$$

的解．求含有方程

$$x^7+2x^3=2,\quad x>0$$

的解的长度小于1/8的区间．

9. 设$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个奇次多项式．证明方程

$$p(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}$$

有解．

10. 假设函数f：$[0,1]\to\mathbb{R}$是连续的且它的象全部由有理数组成．证明f：$[0,1]\to\mathbb{R}$是常值函数．

11. 设I为$\mathbb{R}$的非空凸子集．如果I是上有界的，定义$b=\sup I$；如果I下有界，定义$a=\inf I$，证明以下结果：

a. 如果I既没有上界也没有下界，则$I=\mathbb{R}$．

b. 如果I有下界但无上界，则$I=(a,\infty)$或$I=[a,\infty)$．

c. 如果I有上界但无下界，则$I=(-\infty,b]$或$I=(-\infty,b)$．

d. 如果I有界，则I是集合$[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$之中的一个．

3.4 一致连续性

对函数$f:D\to\mathbb{R}$及其定义域的一点x_0，我们已定义f在x_0连续，即倘若D内一序列$\{x_n\}$收敛于x_0，象序列$\{f(x_n)\}$收敛于$f(x_0)$．函数$f:D\to\mathbb{R}$定义为连续的，倘若它在定义域D的每一点上是连续的．函数$f:D\to\mathbb{R}$的一致连续性的概念一般说来比在定义域上每一点连续的要求更多些．一致连续性在第6章积分的讨论起着重要作用．

定义 *函数$f:D\to\mathbb{R}$称为是一致连续的，倘若D中的序列$\{u_n\}$，$\{v_n\}$满足*

$$\lim_{n\to\infty}[u_n-v_n]=0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n)-f(v_n)]=0.$$

66

注意在上述一致连续性的定义中，对于序列$\{u_n\}$收敛到f定义域的什么点是没有任何信息的．f在D上一致连续的概念仅仅根据这样一个直观概念而形成，即"对D内任意两点u与v，只要它们彼此充分地接近，其差$f(u)-f(v)$就变成任意小，而不论此两点在D内何处"．

若函数$f:D\to\mathbb{R}$是一致连续的，则它是连续的．事实上，对D内的点x_0，令$\{x_n\}$是D内收敛于x_0的序列．对每一个下标n，定义$u_n=x_n$及$v_n=x_0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}[u_n-v_n]=\lim_{n\to\infty}[x_n-x_0]=0,$$

从而由$f:D\to\mathbb{R}$的一致连续性，

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}[f(u_n)-f(v_n)]=0;$$

即象序列$\{f(x_n)\}$收敛于$f(x_0)$. 这样，f在x_0处连续.

一般说来，连续性并不蕴涵一致连续性，这可由下述两例见证.

例 3.15 定义$f(x)=x^2$，$x\in\mathbb{R}$. 则函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的，这是因为它是多项式. 但这个函数不是一致连续的. 事实上，对每个下标n，设

$$u_n = n \quad 及 \quad v_n = n + 1/n.$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty}[u_n - v_n] = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0.$$

但是，对每个下标n，$f(u_n)-f(v_n)=2+1/n^2$，所以

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n) - f(v_n)] \neq 0. \qquad ■$$

例 3.16 定义$f(x)=1/x$，$x\in(0,1)$. 函数f: $(0,1)\to\mathbb{R}$是连续的，这是因为它是在定义域上不为0的多项式的倒数. 但该函数不是一致连续的. 事实上，对每个下标n，令

$$u_n = 1/n \quad 及 \quad v_n = 1/2n.$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty}[u_n - v_n] = \lim_{n\to\infty} 1/2n = 0.$$

但是，对每个下标n，$f(u_n)-f(v_n)=-n$，所以

67

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n) - f(v_n)] \neq 0. \qquad ■$$

上面两个例子中连续函数的定义域不是有界闭区间，下述定理断言：若连续函数的定义域是有界闭区间，则函数是一致连续的.

定理 3.17 有界闭区间上的连续函数

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

是一致连续的.

证明 令$\{u_n\}$及$\{v_n\}$是$[a,b]$的两个序列，满足

$$\lim_{n\to\infty}[u_n - v_n] = 0. \tag{3.10}$$

需证

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n) - f(v_n)] = 0. \tag{3.11}$$

我们将使用反证法. 假设序列$\{f(u_n)-f(v_n)\}$不收敛于0，则(见习题12)存在某个$\varepsilon>0$及一个子序列使得对每个下标n有

$$|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon. \tag{3.12}$$

现在应用f的定义域是有界闭区间的假设. 依照列紧定理(定理2.36)，存在$\{u_n\}$的一个子序列$\{u_{n_k}\}$及$[a,b]$中一点x_0，使得

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = x_0.$$

由这个收敛式及(3.10)，可推出

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = x_0.$$

但是f在x_0处连续，这样

$$\lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = f(x_0) \quad 及 \quad \lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = f(x_0),$$

因此，

$$\lim_{k\to\infty}[f(u_{n_k})-f(v_{n_k})]=0.$$

但是，由(3.12)，对每一个下标 k

$$|f(u_{n_k})-f(v_{n_k})|\geq\varepsilon.$$

从这个矛盾可知 f 在 $[a, b]$ 上一致连续. ■ 68

习题

1. 对以下每一个陈述，确定其真假，并给出理由.
   a. 每一个连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.
   b. 每一个连续函数 f: $[0, 1)\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.
   c. 每一个连续函数 f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.
   d. 每一个一致连续函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是连续的.
2. 若函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是一致连续的且 α 为任一数，证明函数 $\alpha f:D\to\mathbb{R}$ 也是一致连续的.
3. 证明：若 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 $g:D\to\mathbb{R}$ 是一致连续的，则和 $f+g:D\to\mathbb{R}$ 也是一致连续的.
4. 对所有 x，定义 $f(x)=mx+b$. 证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.
5. 对所有 x 定义 $f(x)=x^3$. 证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 不是一致连续的.
6. 若 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 $g:D\to\mathbb{R}$ 都是一致连续的，则其积 $fg:D\to\mathbb{R}$ 也是一致连续的. 说明这一情况并非必要的.
7. 假设函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 $g:D\to\mathbb{R}$ 一致连续且有界. 证明其积 $fg:D\to\mathbb{R}$ 也是一致连续的(提示：
   $$f(u)g(u)-f(v)g(v)=f(u)[g(u)-g(v)]+g(v)[f(u)-f(v)].)$$
8. 对任一开区间 $I=(a, b)$，求一不是一致连续的连续函数 $f:I\to\mathbb{R}$.
9. 对于实数的非有界的非空子集 D，是否存在一个不是一致连续的连续函数 $f:D\to\mathbb{R}$？
10. 假设函数 f: $(a, b)\to\mathbb{R}$ 是一致连续的，证明 f: $(a, b)\to\mathbb{R}$ 是有界的.
11. 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为利普希茨函数，如果存在一非负数 C，使得对 D 中所有点 u, v 有
    $$|f(u)-f(v)|\leqslant C|u-v|.$$
    证明：若 $f:D\to\mathbb{R}$ 是利普希茨函数，则它是一致连续的.
12. 假设函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是非一致连续的，则由定义知在 D 中存在序列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ 使得
    $$\lim_{n\to\infty}[s_n-t_n]=0 \quad 但\lim_{n\to\infty}[f(s_n)-f(t_n)]\neq 0.$$
    a. 证明存在 $\varepsilon>0$ 及一个严格递增的下标序列 $\{n_k\}$，使得对每个下标 k 有 $|f(s_{n_k})-f(t_{n_k})|\geq\varepsilon$.
    b. 对每个下标 k，定义 $u_k=s_{n_k}$ 及 $v_k=t_{n_k}$. 证明：对每一个下标 n，有
    $$\lim_{n\to\infty}[u_n-v_n]=0,但|f(u_n)-f(v_n)|\geq\varepsilon.$$

69

3.5 连续性的 ε-δ 准则

我们用收敛序列定义函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 D 的点 x_0 处的连续性，其目的在于把直观上的概念"若 D 中点 x 接近于 x_0，则它的象 $f(x)$ 接近于 $f(x_0)$"精确化. 但也有另一种方法来抓住这一思想，它等价于序列收敛准则，但它看起来是相当不同的. 从另一个角度讲，连续函数的某些性质可以看得更为清楚. 这一替代的连续性准则如下.

定义（在一点处的 ε-δ 准则） 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为在定义域 D 的点 x_0 满足 ε-δ 准则，如果对

每一正数 ε 存在一正数 δ，使得对 D 中满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 x 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{3.13}$$

用函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 的图形来描述，在 D 的点 x_0 处的 ε-δ 准则可重述如下：对关于直线 $y=f(x_0)$ 的每一个宽为 2ε 的对称带(不管它的宽度多么小)，存在以 x_0 为中心的区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，其直径 $2\delta>0$，当把 f 限制在这个区间里时，函数的图形位于上述的带状区域里. 如图 3.6 所示.

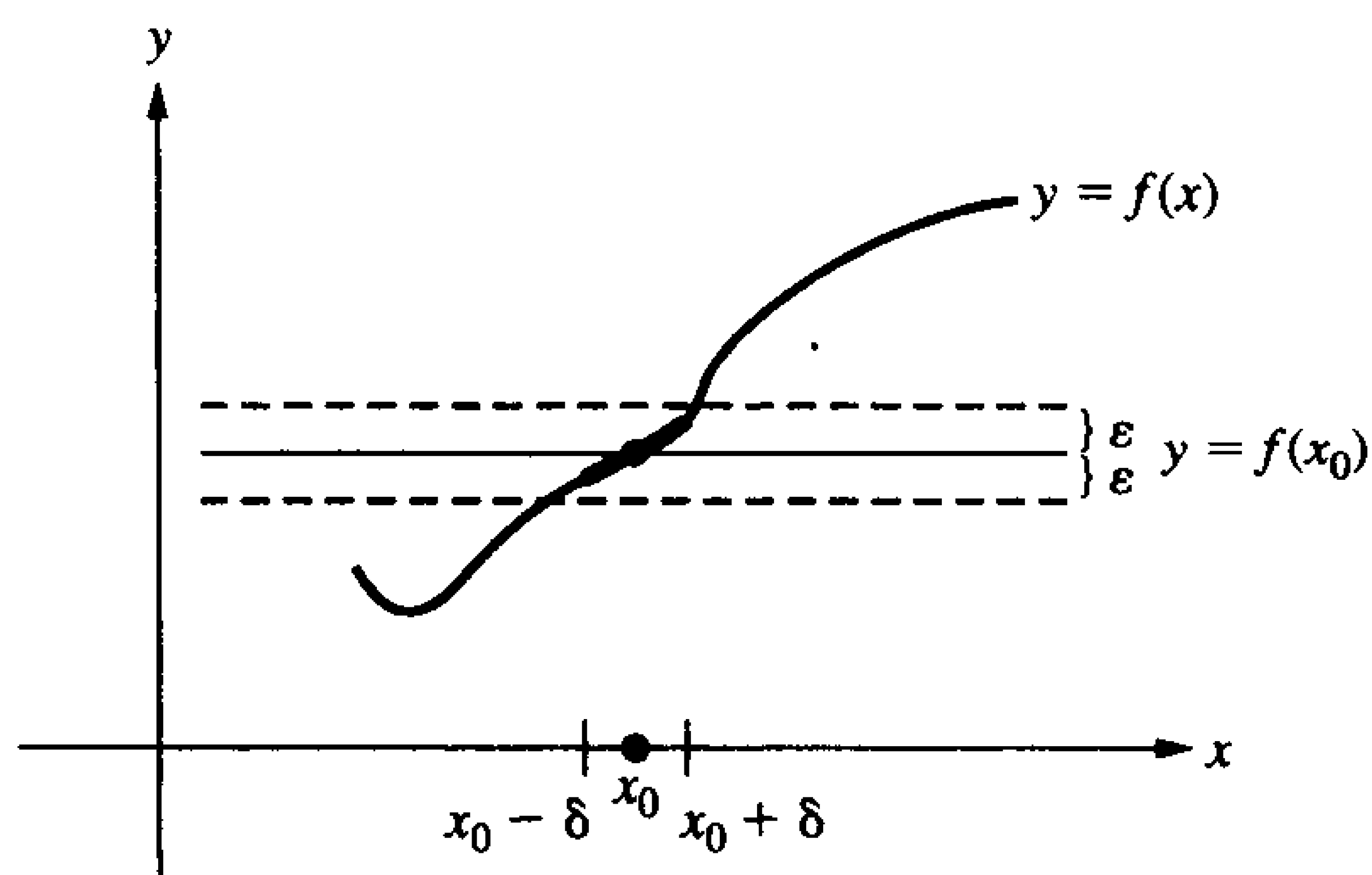


图 3.6 在点 x_0 处连续的 ε-δ 准则

例 3.18 对所有 x，定义 $f(x)=x^3$. 我们断言函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在点 $x_0=2$ 处满足 ε-δ 准则. 令 $\varepsilon>0$，我们需找到 $\delta>0$ 使得当 $|x-2|<\delta$ 时，有

$$|x^3-8|<\varepsilon. \tag{3.14}$$

可以看到所有 x，上述立方差公式和三角不等式蕴涵

70

$$|x^3-8|=|(x^2+2x+4)(x-2)|\leqslant[|x|^2+2|x|+4]|x-2|.$$

但是当 $1<x<3$ 时，

$$|x|^2+2|x|+4\leqslant 19.$$

所以当 $1<x<3$ 时，

$$|x^3-8|\leqslant 19|x-2|. \tag{3.15}$$

定义

$$\delta=\min\{1,\varepsilon/19\}. \tag{3.16}$$

如果 $|x-2|<\delta$，则 $1<x<3$ 及 $19|x-2|<\varepsilon$，所以从(3.15)得 $|x^3-8|<\varepsilon$. 因此，对 $\varepsilon>0$，如果由(3.16)定义 $\delta>0$，则条件(3.14)成立. ■

例 3.19 定义

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{当 } x\leqslant 0\\ x-1 & \text{当 } x>0.\end{cases}$$

函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在点 $x_0=0$ 处不满足 ε-δ 准则. 如图 3.7 所示. 事实上，取 $\varepsilon\equiv 1/2$，则不存在正数 δ 使得 $-\delta<x<\delta$ 时有性质

$$-1/2<f(x)<1/2,$$

这是因为无论怎样选取正数 δ，在区间 $(-\delta,\ \delta)$ 中还是有正数 x 使得 $f(x)<-1/2$.

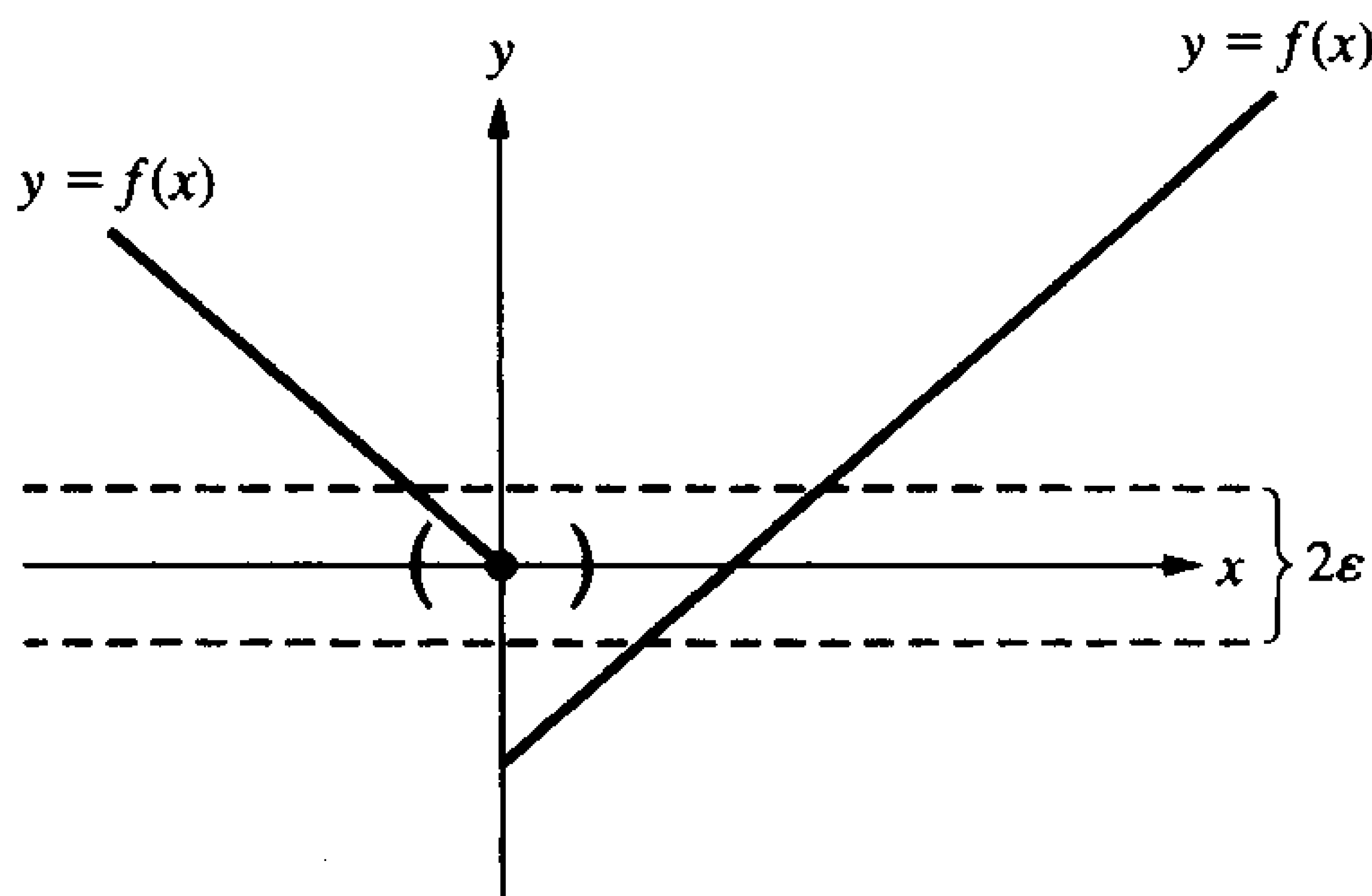


图 3.7　在点 $x_0=0$ 处不满足连续性的 ε-δ 准则

下面的定理认定在一点上 ε-δ 准则与在该点上连续性的序列准则是一致的. ■ 71

定理 3.20　对函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及定义域 D 中的点 x_0，下述两个论断是等价的：

i. 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处连续，即对任一 D 中的序列 $\{x_n\}$，当 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

ii. 在 x_0 处 ε-δ 准则成立，即对每个正数 ε，存在一正数 δ，当 D 内的 x 满足 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{3.17}$$

证明　首先，假设 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 是连续的. 用反证法验证点 x_0 处的 ε-δ 准则. 假设该准则不成立. 则存在某个 $\varepsilon_0>0$ 使得对于 $\varepsilon=\varepsilon_0$，没有 $\delta>0$ 能使(3.17)式成立. 设 n 是自然数. 则(3.17)式对 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 及 $\delta=1/n$ 不成立. 这意味着对每个自然数 n，在 D 中存在一点 x 使得 $|x-x_0|<1/n$ 但 $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$. 选取这样的一点，将其标记为 x_n. 这就在 D 中定义了序列 $\{x_n\}$，它收敛到 x_0. 但根据 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 的连续性，$\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_0)$. 这显然与对每个自然数 n，$|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$ 的论断矛盾. 这样，在点 x_0 处 ε-δ 准则成立.

现在证明逆命题. 假设 ε-δ 准则在点 x_0 成立，要证 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 连续. 事实上，设 $\{x_n\}$ 是 D 中收敛到 x_0 的序列. 为证 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_0)$，令 $\varepsilon>0$，寻找自然数 N，使得

$$\text{对所有} \geq N \text{的下标} n,\ |f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{3.18}$$

但在点 x_0 处 ε-δ 准则断言可选一正数 δ，当 D 中的 x 满足 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{3.19}$$

此外，由于 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，可选取一自然数 N，使得当 $n\geq N$ 时有

$$|x_n-x_0|<\delta \tag{3.20}$$

显然(3.20)及(3.19)蕴涵(3.18). ■

对连续函数 $f:D\to\mathbb{R}$，经常会出现 $\delta>0$ 的选取仅依赖于 $\varepsilon>0$ 而与 D 内点的选取无关. 我们把这个准则描述如下.

定义(在定义域上的 ε-δ 准则)　函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为在定义域上满足 ε-δ 准则，如果对每一个正数 ε，存在一正数 δ，使得对 D 内所有 u，v，如果 $|u-v|<\delta$，则有

$$|f(u)-f(v)|<\varepsilon. \tag{3.21}$$

72

例3.21 对 $x\in[0,20]$，定义 $f(x)=x^3$. 则函数 f: $[0,20]\to\mathbb{R}$ 是一致连续的. 为了明白这一点，观察到对所有 u 和 $v\in[0,20]$，

$$|f(u)-f(v)|=|u^2+uv+v^2||u-v|\leqslant 1200|u-v|.$$

因此，对 $\varepsilon>0$，如果定义 $\delta=\varepsilon/1200$，则(3.21)成立. ■

从定理3.20中看到，在一点上连续的序列准则等价于在一点上的 ε-δ 准则. 下面是完整的类似证明，把它留给读者作为习题，我们有如下关于上面所述的序列的一致连续准则等价于定义域上的 ε-δ 准则的定理.

定理3.22 对函数 $f:D\to\mathbb{R}$，下述两个论断是等价的：

i. 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是一致连续的，即对 D 中的两个序列 $\{u_n\}$ 及 $\{v_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}[u_n-v_n]=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n)-f(v_n)]=0.$$

ii. 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在定义域 D 上满足 ε-δ 准则，即对每一正数 ε 存在一正数 δ，使得对 D 内的 u 与 v，如果 $|u-v|<\delta$，则有

$$|f(u)-f(v)|<\varepsilon. \tag{3.22}$$

习题

1. 对所有 x 定义 $f(x)=x^2$. 对函数在 $x=2$ 及 $x=50$ 处的连续性验证 ε-δ 准则.

2. 对所有 $x\geqslant0$ 定义 $f(x)=\sqrt{x}$. 对函数在 $x=4$ 及 $x=100$ 处的连续性验证 ε-δ 准则. (提示：首先证明对 $x\geqslant0$，$x_0>0$，$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|\leqslant|x-x_0|/\sqrt{x_0}$.)

3. 对所有 x 定义 $f(x)=x^3$. 对函数在每个点 x_0 处的连续性验证 ε-δ 准则.

4. 定义

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{当 } x\leqslant 3/4\\ 2 & \text{当 } x>3/4.\end{cases}$$

用连续性的 ε-δ 准则证明在 $x=3/4$ 处函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是不连续的.

73

5. 对所有 x 定义 $h(x)=1/(1+x^2)$. 证明函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在$\mathbb{R}$上满足 ε-δ 准则.

6. 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为利普希茨函数，如果存在某个数 $C>0$ 使得

$$\text{对 } D \text{ 中的所有 } u \text{ 及 } v,\ |f(u)-f(v)|\leqslant C|u-v|.$$

证明利普希茨函数在 D 上满足 ε-δ 准则.

7. 对 $0\leqslant x\leqslant1$ 定义 $f(x)=\sqrt{x}$.

a. 证明函数 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的.

b. 用(a)证明 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.

c. 证明 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 不是利普希茨函数.

8. 假设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期函数，即存在一数 $p>0$，使得 $f(x+p)=f(x)$ 对所有 x 均成立. 证明：$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.

9. 定义函数 h: $[1,2]\to\mathbb{R}$ 如下：若 x 是$[1,2]$中的无理数，则 $h(x)=0$；若 x 是$[1,2]$中的有理数且 $x=m/n$，其中 m 与 n 为自然数，它们除1以外没有共同的正整数因子，则 $h(x)=1/n$.

a. 证明 h: $[1,2]\to\mathbb{R}$ 在$[1,2]$的每个有理数处不连续.

b. 证明：如果 $\varepsilon>0$，则集 $\{x\in[1,2]\mid h(x)>\varepsilon\}$ 仅有有限个点.

c. 利用(b)证明 h: $[1,2]\to\mathbb{R}$ 在$[1,2]$中的每个无理数处是连续的.

10. 用定理3.20的证明策略证明定理3.22.

3.6 象与逆象；单调函数

在第 2 章里，我们证明了单调收敛定理：单调序列收敛当且仅当它是有界的. 现在将引入单调函数的自然概念，并证明这样的函数也具有十分特殊的且一般函数所不具有的性质. 当函数单调时，自然可考虑它的逆——反函数.

单调函数的连续性准则

定义 函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为单调递增的，倘若对 D 中所有点 u，v，

$$f(v)\geqslant f(u)\qquad \text{当 } v>u.$$

函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为单调递减的，倘若对 D 中所有点 u，v，

$$f(v)\leqslant f(u)\qquad \text{当 } v>u.$$

函数或者是单调递增的，或者是单调递减的，通称为是单调的.

可以看到在单调函数的定义中，介于函数值之间的不等式是非严格的. 例如，常值函数便可认为是单调函数.

74

现在我们证明单调函数有一个值得注意的性质，这就是若它的象是一区间，则函数是连续的. 这一结果与本章其他结果形成鲜明的对比，因为函数的连续性在大多数情况下是假定而不是结论.

定理 3.23 假设函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是单调的. 若它的象 $f(D)$ 是一区间，则函数 f 是连续的.

证明 考虑函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是单调递增这一情况. 当 f 是单调递减时，可考虑函数 $-f:D\to\mathbb{R}$.

令 x_0 是 D 中的点，$\{x_n\}$ 是 D 的序列且收敛于 x_0. 对每个下标 n，令 $y_n=f(x_n)$ 及 $y_0=f(x_0)$. 我们必须证明 $\{y_n\}$ 收敛于 y_0. 为此，选择 $\varepsilon>0$，必须找到一个下标 N 使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|y_n-y_0|<\varepsilon;$$

即

$$y_n<y_0+\varepsilon\quad \text{当 } n\geqslant N \tag{3.23}$$

及

$$y_0-\varepsilon<y_n\quad \text{当 } n\geqslant N. \tag{3.24}$$

我们将找到一个下标 N 使(3.23)成立，至于(3.24)的验证完全类似，留作习题.

当然，如果对所有 n 有 $y_n\leqslant y_0$，(3.23)将对 $N=1$ 成立. 否则，存在序列 $\{y_n\}$ 的某个大于 y_0 的项，记为 y^*，使得

$$y^*>y_0 \text{ 及 } y^* \text{ 属于象 } f(D).$$

但由假定，象 $f(D)$ 是一个区间. 这样，由于 y_0，y^* 属于 $f(D)$，故

$$\text{区间 } [y_0,y^*] \text{ 包含在象 } f(D) \text{ 中}. \tag{3.25}$$

在 D 中选取 x^* 使得 $f(x^*)=y^*$. 因为函数 f 是单调的，可看到 $x_0<x^*$，$f(x_0)<f(x^*)$.

定义 $y_\varepsilon=\min\{y_0+\varepsilon/2,\ y^*\}$，于是 $y_0<y_\varepsilon\leqslant y^*$，所以由(3.25)，在 D 中存在点 x_ε 使得 $f(x_\varepsilon)=y_\varepsilon$，同样由 f 的单调递增知 $x_\varepsilon>x_0$.

然而，序列$\{x_n\}$收敛于x_0及$x_\varepsilon>x_0$，这样存在一下标N，使得当$n\geqslant N$时有$x_n<x_\varepsilon$. 于是由于f是单调递增的，当$n\geqslant N$时有

75

$$f(x_n)\leqslant f(x_\varepsilon)=y_\varepsilon<y_0+\varepsilon.$$

这样，(3.23)对选定下标N成立. 如同已经叙述过的，(3.24)的验证是类似的. 这样，序列$\{f(x_n)\}$是收敛于$f(x_0)$的. 如图3.8所示.

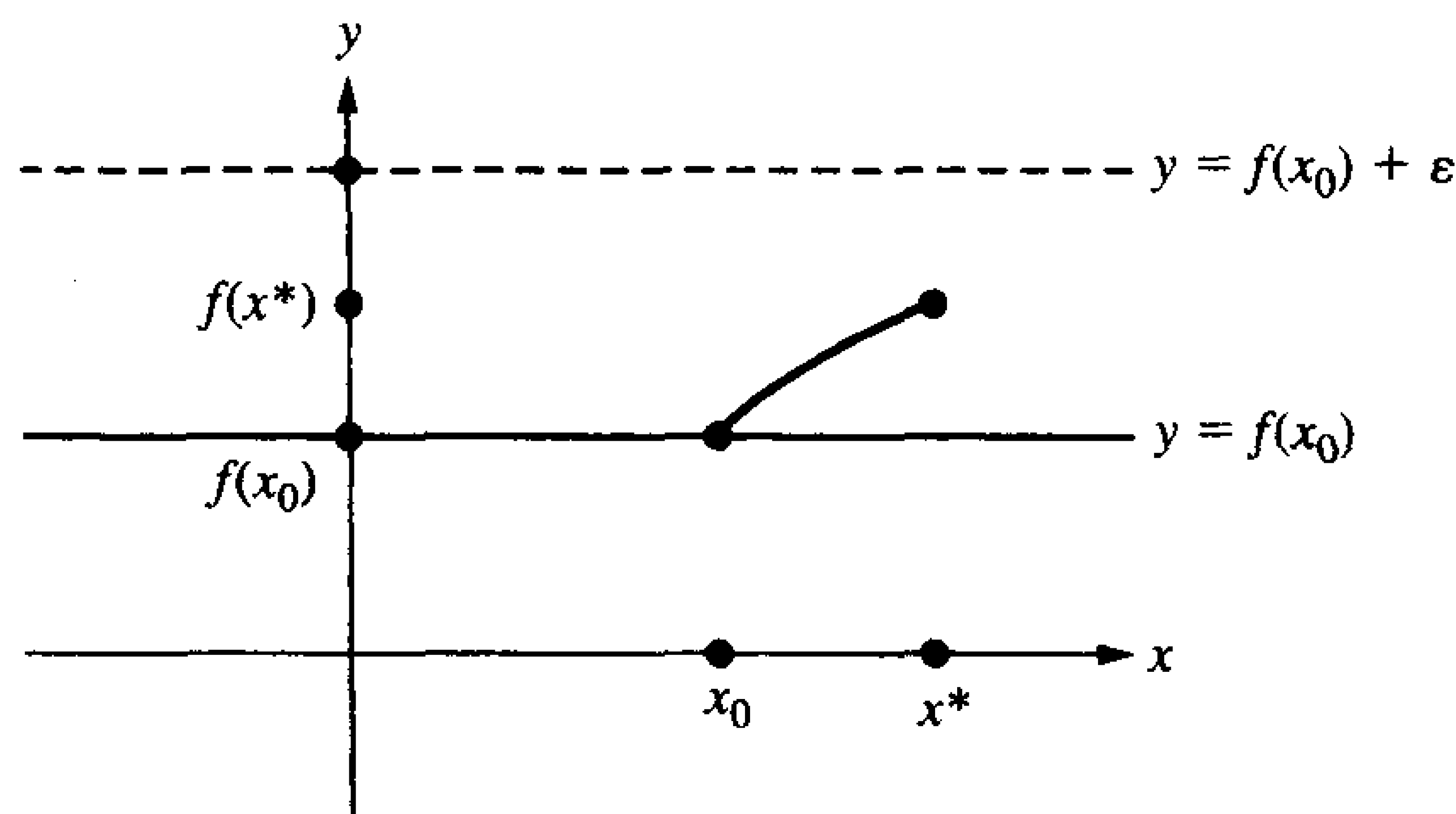


图3.8 当$x<x^*$时，$f(x)\leqslant y^*$ ■

对于象是区间的一般函数必定是连续的，这是不成立的，如下例所示.

例3.24 定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$如下：

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{当 } x\leqslant 0\\ x-1 & \text{当 } x>0.\end{cases}$$

显然，象$f(\mathbb{R})$就是$\mathbb{R}$，所以是区间. 但$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在$x=0$处是不连续的，这是因为

$$\lim_{n\to\infty}1/n=0 \quad 但 \quad \lim_{n\to\infty}f(1/n)=-1\neq f(0).$$ ■

推论3.25 令I是一个区间并假设函数$f:I\to\mathbb{R}$是单调的，则函数f是连续的当且仅当它的象$f(I)$是一个区间.

证明 如果象$f(I)$是一个区间，则由前述定理知f是连续的. 反之，介值定理(如定理3.14所述)断言，对一个连续函数，若它的定义域是一个区间，则它的象也是一个区间. ■

反函数的连续性

定义 函数$f:D\to\mathbb{R}$称为严格递增的，倘若

76

$$对 D 中所有的点 u,v,其中 v>u,有 f(v)>f(u).$$

函数$f:D\to\mathbb{R}$称为严格递减的，倘若

$$对 D 中所有的点 u,v,其中 v>u,有 f(v)<f(u).$$

函数或者是严格递增的，或者是严格递减的，通称为严格单调的.

例3.26 对$x\geqslant 0$，定义$f(x)=x^2$. 则函数f: $[0,\infty)\to\mathbb{R}$是严格递增的，这是因为当u，v在定义域内且$u>v$时，由平方差公式

$$u^2-v^2=(u-v)(u+v)>0.$$ ■

例3.27 对所有x，定义$f(x)=x^3$. 则函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是严格递增的. 事实上，由立方差公

式，对所有 u，v 有

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2).$$

如果 u，v 有相同符号，则 $uv > 0$，于是 $u^2 + uv + v^2 > 0$，因而当 $u > v$ 时有 $u^3 > v^3$. 另一方面，如果 $u > 0 > v$，则 $u^3 > 0 > v^3$. 最后，若 u，v 中有一个是 0，则显然有 $u^3 > v^3$. ■

严格单调函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 有如下性质：对象 $f(D)$ 中的任一点 y，在定义域 D 中恰有一点 x 使得 $f(x) = y$. 这一性质是重要的，因而它有专门的名字.

定义 函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 称为是一对一的，倘若对于象 $f(D)$ 中的每一点 y，在定义域 D 中恰有一点 x 使得 $f(x) = y$.

不难看出，$f:D \to \mathbb{R}$ 是一对一的，只要对 D 中的 u 和 v，如果 $f(u) = f(v)$，则 $u = v$.

对一个一对一的函数 $f:D \to \mathbb{R}$，按定义，若 y 是 $f(D)$ 中的一点，则在 D 中恰有一点 x 使得 $f(x) = y$. 我们把这个 x 表示成 $f^{-1}(y)$，所以就定义了函数

$$f^{-1}:f(D) \to \mathbb{R},$$

我们称之为 $f:D \to \mathbb{R}$ 的*反函数*. 为弄清楚函数与它的反函数，一般把定义域中的变量记为 x，而象中的变量记为 y. 于是反函数可由下述关系加以刻画：

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad 对 D 中所有 x;$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad 对 f(D) 中所有 y;$$

正如上面已注意到的，严格单调函数是一对一的，因而它有反函数. 77

例 3.28 对所有 x，定义函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = x^3$. 由于 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是多项式，它是连续的. 我们在例 3.27 中已证实 f 是严格递增的. 现在由介值定理(如定理 3.14 所述)，象 $f(\mathbb{R})$ 是一个区间. 然而，对每个自然数 n，

$$f(n) = n^3 > n \quad 及 \quad f(-n) = -n^3 < -n,$$

所以 $f(\mathbb{R})$ 是一个区间，它是上无界及下无界的，因此 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. 其反函数 $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有下述两个关于反函数的特征性质：

$$f^{-1}(x^3) = x \quad 对 \mathbb{R} 中所有 x;$$

$$(f^{-1}(y))^3 = y \quad 对 f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} 中所有 y.$$

当然标准指数记号是

$$y^{1/3} \equiv f^{-1}(y), \quad 对 \mathbb{R} 中所有 y.$$ ■

有许多函数是作为另外一个函数 $f:D \to \mathbb{R}$ 的*反函数*出现的，它的性质可由原来函数的性质推导出来. 当我们研究微分时，会看到这类例子. 容易看出严格单调函数的反函数仍是严格单调的. 下面也是反函数继承原来函数的性质的一个有趣例子.

定理 3.29 *令 I 是一区间并假设函数 $f:I \to \mathbb{R}$ 是严格单调的，则反函数 $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ 是连续的.*

证明 定义 $D \equiv f(I)$，则函数 $f^{-1}: D \to \mathbb{R}$ 是单调递增函数且以区间 I 为它的象. 定理 3.23 蕴涵函数 $f^{-1}:D \to \mathbb{R}$ 是连续的. ■

上面定理给我们提供一类新的连续函数. 对自然数 n，定义 $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = x^n \quad 当 x \geqslant 0.$$

如同在例3.28中所论证的，由幂差公式及介值定理可以看到f: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$是严格递增的且$f([0, \infty))=[0, \infty)$. 上面定理蕴涵反函数$f^{-1}$: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$是连续的，当然，它有下述关于反函数的两个特征性质：

$$f^{-1}(x^n) = x \quad \text{当 } x \geqslant 0;$$

78

$$(f^{-1}(y))^n = y \quad \text{当 } y \text{ 在 } f([0,\infty)) = [0,\infty) \text{ 中}.$$

当然，标准指数记号是

$$y^{1/n} \equiv f^{-1}(y) \quad \text{当 } y \geqslant 0.$$

$y^{1/n}$称为y的n次根.

对一个负整数n及任一数$x\neq 0$，定义

$$x^n \equiv 1/x^{-n}.$$

由归纳法先对自然数进行论证，对整数幂，有下述熟知的代数公式，其证明留作练习：对整数m，n以及任一数$x\neq 0$，

$$x^n \cdot x^m = x^{m+n} \quad \text{及} \quad (x^n)^m = x^{nm}. \tag{3.26}$$

我们现在将定义有理幂，这样上述两个代数性质仍然保持.

定义 对$x>0$及有理数$r=m/n$，其中m，n是整数及n是正数，我们定义

$$x^r \equiv (x^m)^{1/n}.$$

但是这里有个问题. 因为每个有理数可以表示成不同的整数的商，因此需建立下面的关系：若m是整数而n，k是自然数，则

$$(x^m)^{1/n} = (x^{km})^{1/kn}. \tag{3.27}$$

事实上，由于对$u>0$，

$$u^k = [(u^{1/n})^n]^k = (u^{1/n})^{kn},$$

令$u=x^m$，我们有

$$x^{km} = (x^m)^k = [(x^m)^{1/n}]^{kn},$$

由此可得(3.27)，因此有理幂是被完全定义的.

我们把它留作习题，首先对每一个正数x及整数m，n(n为正的)，证明

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m, \tag{3.28}$$

然后用上式去证明(3.26)对有理数r及s成立：对$x>0$，

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s} \quad \text{及} \quad (x^r)^s = x^{rs}. \tag{3.29}$$

命题3.30 对$x\geqslant 0$及有理数r，定义

$$f(x) = x^r.$$

79

函数f: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$是连续的.

证明 我们把函数f: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$表示成连续函数的复合函数，因此，由定理3.6，f: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$是连续的. 事实上，对$x\geqslant 0$，定义

$$g(x) = x^{1/n} \quad \text{及} \quad h(x) = x^m.$$

由定义，

$$f(x) = g(h(x)) = (g\circ h)(x) \qquad \text{当 } x \geqslant 0.$$

函数h: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$是连续的，这是因为它是一个多项式，由定理3.29，函数g: $[0, \infty)\to\mathbb{R}$是连续的，这是因为它是定义在一个区间上严格递增函数的反函数. ∎

习题

1. 对下述每一个陈述，确定其真假，并给出理由.

a. 单调函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一对一的.

b. 严格递增函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一对一的.

c. 严格递增函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

d. 一个一对一的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单调的.

2. a. 求其象等于 $\mathbb{R}$ 的连续函数 f: $(0,1)\to\mathbb{R}$.

b. 求其象等于 $[0,1]$ 的连续函数 f: $(0,1)\to\mathbb{R}$.

c. 求严格递增且象等于 $(-1,1)$ 的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

3. 求下列每个函数的象：

a. f: $[0,\infty)\to\mathbb{R}$，定义如下：对 $x\geqslant 0$，$f(x)=1/(1+x^2)$.

b. h: $(0,1)\to\mathbb{R}$，定义如下：对 $0<x<1$，$h(x)=1/(x^2+8x)$.

4. 定义

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & 若\ x<0\\ x+1 & 若\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 严格递增且 f^{-1}: $f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 在 1 处是连续的.

5. 令 $D=[0,1]\cup(2,3]$，并定义 $f:D\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}x & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & 当\ 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

证明 $f:D\to\mathbb{R}$ 是连续的. 确定 f^{-1}: $f(D)\to\mathbb{R}$ 并证明 f^{-1}: $f(D)\to\mathbb{R}$ 是不连续的. 这与定理 3.29 矛盾吗？

6. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是奇函数，倘若对所有 x 有

$$f(-x)=-f(x).$$

证明：如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是奇函数且它在 $[0,\infty)$ 上是严格递增的，则 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 也是严格递增的. [80]

7. 对奇自然数 n，定义 $f(x)=x^n$，其中 $x\in\mathbb{R}$. 证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是严格递增的且 $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

8. $\mathbb{Q}$ 是有理数集. 证明不存在严格递增函数 f: $\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 使得 $f(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

9. 对任意整数 m，n 及数 $x\neq 0$，证明代数恒等式(3.26)成立.

10. 对正数 a，b 及自然数 n，m，证明：

$$a=b\ 当且仅当\ a^n=b^n\ 当且仅当\ a^{1/m}=b^{1/m}.$$

11. 对正数 x 及整数 m，n(n 为正)，证明：

$$(x^{1/n})^m=(x^m)^{1/n}.$$

12. 用习题 10 与 11 证明(3.29).

13. 令 f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续且一对一的函数，满足 $f(a)<f(b)$. 令 c 是开区间 (a,b) 中一点. 证明 $f(a)<f(c)<f(b)$.

14. 令 f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续且一对一的函数，满足 $f(a)<f(b)$. 证明 f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是严格递增的.（提示：用习题 13.）

15. 令 f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续且一对一的函数. 证明：f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是严格单调的.（提示：用习题 14.）

3.7 极限

在本章前面几节中已经研究了连续函数的性质. 本节研究函数在接近某些点时的性状，这些点未必在给定的函数的定义域内. 对一数集 D 及一数 x_0，用记号 $D\setminus\{x_0\}$ 表示集 $\{x\ 在\ D\ 中 \mid x\neq x_0\}$. 也就是说，序列 $\{x_n\}$ 远离点 x_0，如果对任意 n，有 $x_n\neq x_0$.

定义 对于实数集 D，数 x_0 称为 D 的极限点，若在 $D\setminus\{x_0\}$ 中存在收敛到 x_0 的点的序列.

例 3.31 对满足 $a<b$ 的数 a 与 b，a 与 b 都是开区间(a, b)的极限点，虽然它们之中任何一个都不属于(a, b). 为理解 a 是(a, b)的极限点，只需注意$\{a+(b-a)/2n\}$是(a, b)中的序列，不同于 a 而又收敛到 a. ■

例 3.32 每个实数是有理数集$\mathbb{Q}$的极限点. 事实上，设 x_0 是任一实数，则根据有理数的稠密性(定理 1.9)，对每个自然数 n，可在区间$(x_0, x_0+1/n)$内选取一有理数 q_n. 则$\{q_n\}$是有理数序列，不同于 x_0 而又收敛到 x_0. 类似的论证表明每个实数也是无理数集的极限点. ■

81

定义 给定函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及它的定义域 D 的一个极限点 x_0，对数 ℓ，我们记

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell, \tag{3.30}$$

倘若只要$\{x_n\}$是 $D\setminus\{x_0\}$ 中收敛到 x_0 的序列，就有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell.$$

将(3.30)读成"当 D 中的 x 趋向于 x_0 时，$f(x)$的极限等于 ℓ".

对于函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及其定义域 D 的一个极限点 x_0，如果存在数 ℓ 使得$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$，我们写作"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在"；而如果不存在这样的 ℓ，我们写作"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在".

比较极限的定义与函数在其定义域中的点的连续性的定义，不难看出(见习题 8)，如果 x_0 是数集 D 的极限点并且也属于 D，则函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 连续当且仅当

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

因此，由于已经提供过许多连续函数的例子，所以我们已经计算过许多极限.

例 3.33 我们已经证明多项式的商在其分母不等于零的点处是连续的，平方根函数是连续的，连续函数的复合是连续的. 由此可得

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{3x+3}{x^3-4}} = \frac{3}{2}.$$ ■

例 3.34

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2. \tag{3.31}$$

为验证这一点，令序列$\{x_n\}$收敛到 1，且对所有的 n，$x_n\neq 1$. 根据平方差公式，对所有的 n，$(x_n^2-1)/(x_n-1)=x_n+1$. 这样，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \lim_{n\to\infty}[x_n+1] = 2,$$

82

这就证明了(3.31). ■

例 3.35

$$\lim_{n\to 8}\frac{x-8}{x^{1/3}-2} = 12. \tag{3.32}$$

为验证这一点，令序列$\{x_n\}$收敛到 8，且对所有的 n，$x_n\neq 8$. 根据立方差公式，对每个 n，

$$x-8 = (x^{1/3})^3-2^3 = (x^{1/3}-2)(x^{2/3}+2x^{1/3}+4),$$

所以根据 n 次方根函数的连续性，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-8}{x_n^{1/3}-2}=\lim_{n\to\infty}[x_n^{2/3}+2x_n^{1/3}+4]=12.$$ ■

下面的定理既是收敛序列和、积及商性质的模拟，也是推论，在 3.1 节中我们对连续函数建立过完全类似的结果.

定理 3.36 对于函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 与 $g:D\to\mathbb{R}$ 以及它们定义域 D 的极限点 x_0，假设

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 及 \quad \lim_{x\to x_0}g(x)=B.$$

则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=A+B, \tag{3.33}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB, \tag{3.34}$$

如果 $B\neq 0$，且对 D 中所有 x，$g(x)\neq 0$，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}. \tag{3.35}$$

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $D\setminus\{x_0\}$ 中收敛到 x_0 的序列，由极限的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}g(x_n)=B.$$

收敛序列的和的性质蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+g(x_n)]=A+B, \tag{3.36}$$

收敛序列的积的性质蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)g(x_n)]=AB. \tag{3.37}$$

83

如果对 D 中所有的 x，$g(x)\neq 0$，收敛序列的商的性质蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{A}{B}. \tag{3.38}$$

由极限的定义，从(3.36)、(3.37)及(3.38)可分别得(3.33)、(3.34)及(3.35). ■

我们还有下列关于极限的复合性质.

定理 3.37 对函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及 $g:U\to\mathbb{R}$，假设 x_0 是 D 的满足

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0 \tag{3.39}$$

的极限点，y_0 是 U 的满足

$$\lim_{y\to y_0}g(y)=\ell \tag{3.40}$$

的极限点. 此外，假设

$$f(D\setminus\{x_0\})\text{ 包含在 }U\setminus\{y_0\}\text{ 中}, \tag{3.41}$$

则

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\ell.$$

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $D\setminus\{x_0\}$ 中收敛到 x_0 的序列. 从(3.39)可得 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 y_0. 对每个自然数 n，令 $y_n=f(x_n)$，则序列 $\{y_n\}$ 收敛到 y_0. 假设由(3.41)可推出 $\{y_n\}$ 是 $U\setminus\{y_0\}$ 中的序列. 从(3.40)可得 $\{g(y_n)\}$ 收敛到 ℓ. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n)=\ell.$$ ■

例 3.38 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有下列特性：

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\ell.$$

由极限的复合性质可得，如果 k 是任意自然数，则

84

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^k)-f(0)}{x^k}=\ell.$$

此外，对任意 $c\neq0$，由极限的复合性质也可推出

$$\lim_{x\to0}\frac{f(cx)-f(0)}{cx}=\ell,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(cx)-f(0)}{x}=c\lim_{x\to0}\frac{f(cx)-f(0)}{cx}=c\ell.$$

■

习题

1. 求下列极限或确定它们不存在：

a. $\lim\limits_{x\to0}|x|$　　b. $\lim\limits_{x\to0,x>0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$　　c. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^2}{x}$　　d. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$

2. 证明：

a. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=4$　　b. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

3. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：若 $x\neq0$，$f(x)=x+1$ 及 $f(0)=4$. 证明 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，$f$ 在 $x=0$ 处不连续.

4. 求下列极限或确定它们不存在：

a. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+1/x}{1+1/x^2}$　　b. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+1/x^2}{1+1/x}$　　c. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+1/(x-1)}{2+1/(x-1)^2}$

5. 设 D 是仅由单个数 x_0 所组成的实数集. 证明集 D 无极限点. 同样证明自然数集 $\mathbb{N}$ 无极限点.

6. 设 D 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集且有上界，问 $\sup D$ 是否是 D 的极限点？

7. 解释为什么在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的定义中必须有 x_0 是 D 的极限点这一条件.

8. a. D 中的点 x_0 称为 D 的孤立点(isolated point)，倘若存在 $r>0$ 使得在区间 $(x_0-r,\ x_0+r)$ 中仅有的 D 的点是 x_0 本身. 证明 D 中的点 x_0 或者是 D 的孤立点或者是 D 的极限点.

85

b. 假设 x_0 是 D 的孤立点. 证明每一个函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 是连续的.

c. 证明：如果 D 中的点 x_0 是 D 的极限点，则函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 x_0 是连续的当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

9. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 具有如下性质：存在某个 $M>0$，使得

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R}\quad |f(x)|\leq M|x|^2.$$

证明

$$\lim_{x\to0}f(x)=0\quad\text{及}\quad\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

10. 对每个数 x，定义 $f(x)$ 是小于或等于 x 的最大整数. 画出函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的图形. 给定数 x_0，分析极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x).$$

11. 设 k 为自然数. 证明

$$\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=k.$$

12. (一般单调收敛原理)设 a 与 b 是满足 $a<b$ 的数且集 $I=(a,\ b)$. 假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是有界的且是单调递增的. 证明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在.

86

第4章 微 分 法

4.1 导数代数

函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的最简单的类型是图形为直线的函数. 对于这样的函数，比

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

(其中$x_1\neq x_2$)不依赖于点x_1与x_2的选取. 用m表示这个比并称m为f的图形的斜率(slope). 所以，图形为一直线的函数f完全可通过指定它在某一点(比如x_0)的函数值然后再指定它的斜率m而确定. 因而，它可由如下公式定义：

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x_0)+m(x-x_0). \tag{4.1}$$

对图形不是直线的函数，说"图形的斜率"就毫无意义. 然而，许多函数有这样的特性：在特定点其图形可由切线近似，我们稍后会给出确切含义. 于是可以把图形在某点的斜率定义为切线的斜率. 斜率是随点变化的，当可以确定每一点的斜率时就有了分析函数的非常重要的资料. 这是微分法背后基本的几何概念[⊖].

一个含有点x_0的开区间$I=(a,\ b)$称为x_0的一个邻域.

87

切线与导数

为使上述描述精确化，我们需定义切线. 对函数$f:I\to\mathbb{R}$，其中I是点x_0的一个邻域，对于I中一点$x(x\neq x_0)$，连结点$(x_0,\ f(x_0))$与$(x,\ f(x))$的斜率是

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

如图4.1所示.

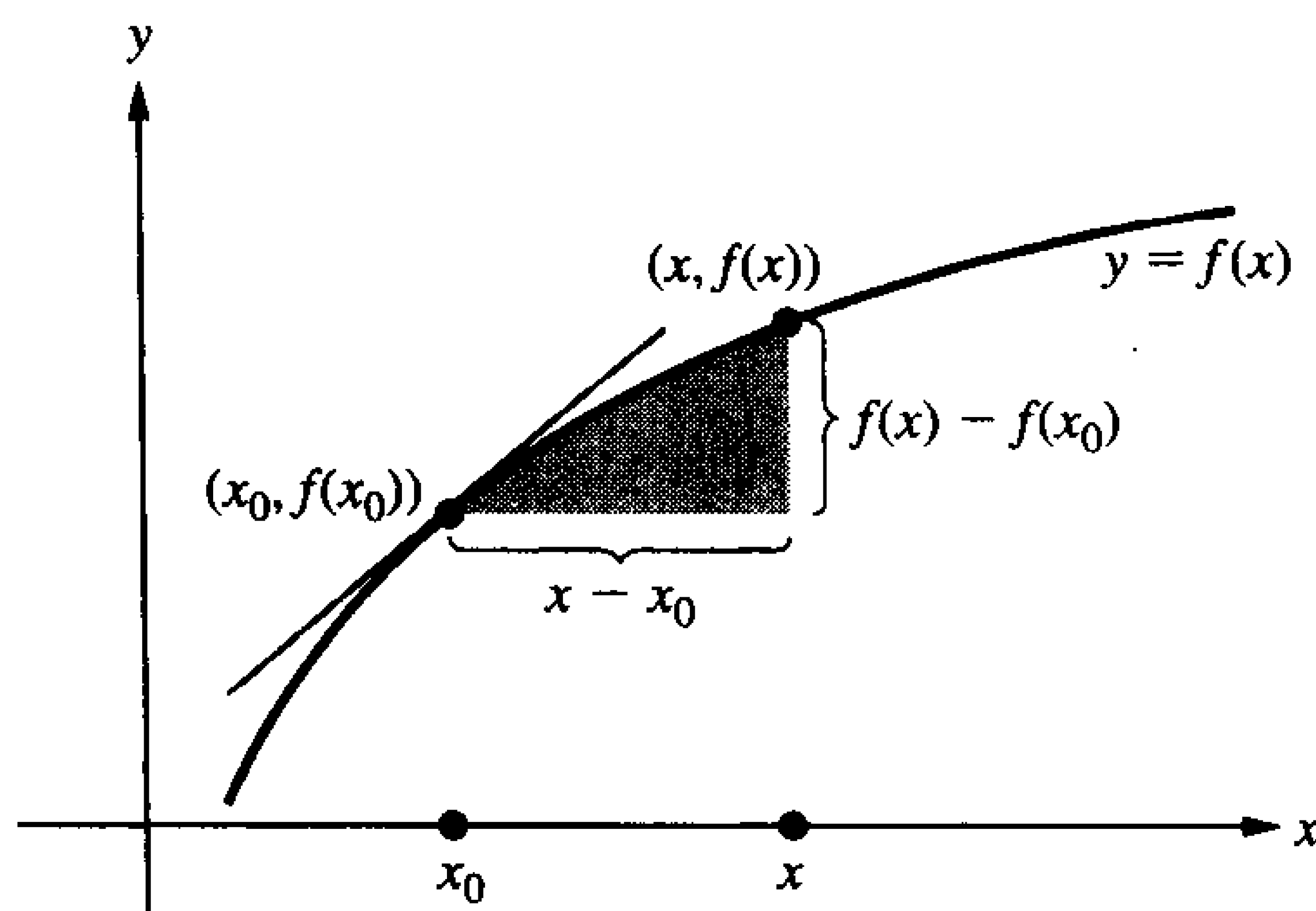


图4.1 在点$(x_0,\ f(x_0))$处切线的斜率的近似

⊖ 我们将要对可微函数(它的图形不是直线)证明式(4.1)的一种形式，称为第一基本定理(对导数求积分)：对一个可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它的导数是连续的，式(4.1)变成：对所有$x$，

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

这里的公式和符号将在第6章说明.

可以期待：若$f:I\to\mathbb{R}$的图形在点$(x_0, f(x_0))$处有一条斜率为m_0的切线，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m_0.$$

定义 令I是点x_0的一个邻域. 函数$f:I\to\mathbb{R}$称为在x_0是可微的，如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\tag{4.2}$$

存在，在此情形下用$f'(x_0)$表示上述极限并称它为$f:I\to\mathbb{R}$在x_0的导数，即

$$f'(x_0)\equiv\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\tag{4.3}$$

如果函数$f:I\to\mathbb{R}$在I中的每一点都是可微的，就说$f:I\to\mathbb{R}$是可微的并称函数$f':I\to\mathbb{R}$为 [88] $f:I\to\mathbb{R}$的导数.

对在x_0可微的函数$f:I\to\mathbb{R}$，称由方程

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\qquad x\in\mathbb{R}$$

确定的直线为f的图形在点$(x_0, f(x_0))$处的切线. 如图4.2所示.

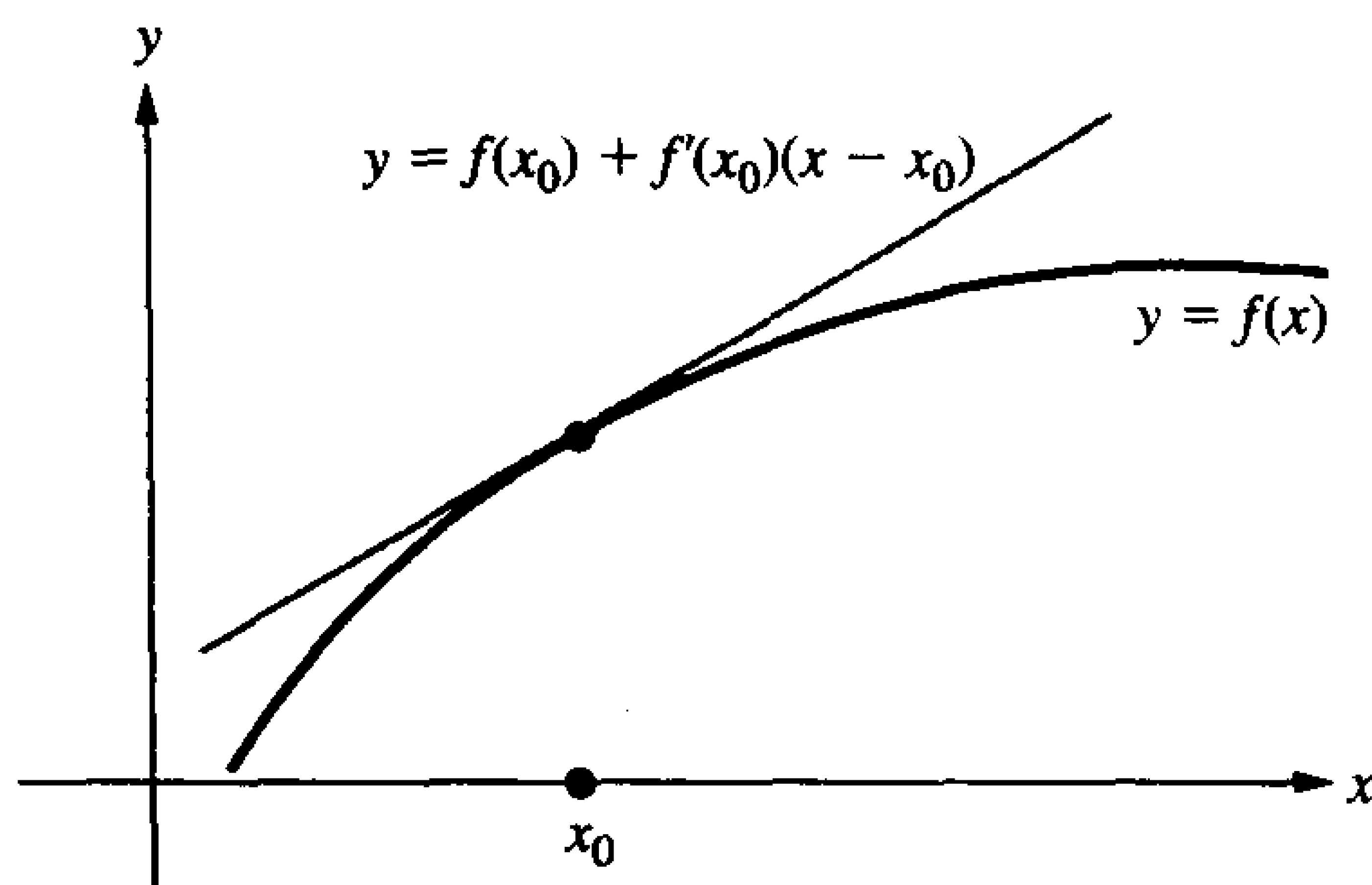


图4.2 f在点$(x_0, f(x_0))$的图形的切线

注意，由于$\lim\limits_{x\to x_0}[x-x_0]=0$，在确定可微性的不能用极限的商公式. 为解决这个问题，在这里及下一节里讲述了一种计算(4.2)型的极限的技术，称为求导法则. 我们先考虑某些特殊的例子.

三个例子

例4.1 对所有x，定义$f(x)=mx+b$. 那么，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的，且对所有$x$有

$$f'(x)=m.$$

事实上，对$\mathbb{R}$中的x_0，若$x\neq x_0$，则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{m(x-x_0)}{x-x_0}=m.$$

这样，

[89]

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}m=m.$$ ■

例 4.2 考虑图形不是直线的最简单的多项式. 定义$f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. 那么, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的且

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R}, \quad f'(x)=2x.$$

事实上, 对$\mathbb{R}$中的每个x_0, 由平方差公式, 如果$x\neq x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=x+x_0,$$

所以,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}[x+x_0]=2x_0.$$ ■

例 4.3 对所有x, 定义$f(x)=|x|$. 那么, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在$x=0$处不可微. 为看到这一点, 注意当$x>0$时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=1,$$

而当$x<0$时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=-1.$$

这就得出

$$\lim_{x\to 0,x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \quad \text{及} \quad \lim_{x\to 0,x<0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1.$$

这样

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\text{不存在}.$$

容易看出当$x\neq 0$时, f是可微的, 且当$x>0$时$f'(x)=1$, 而当$x<0$时$f'(x)=-1$. ■

求正整数幂的导数

命题 4.4 对自然数n, 定义$f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$. 那么, 函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的, 且对所有$x$,

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

证明 固定数x_0, 注意到由幂差公式,

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R}, \quad x^n-x_0^n=(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-2}+x_0^{n-1}),$$

[90]

因此

$$\text{如果 } x\neq x_0, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-2}+x_0^{n-1}.$$

可以看到等式右边有n项, 每一项当x趋于x_0时以x_0^{n-1}作为极限. 这样, 由极限的和的性质,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=nx_0^{n-1}.$$

■

可微函数是连续的

命题 4.5 设I是点x_0的邻域, 假定函数$f:I\to\mathbb{R}$在x_0是可微的. 那么, $f:I\to\mathbb{R}$在x_0是连

续的.

证明 由于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\quad 且\quad \lim_{x\to x_0}[x-x_0]=0,$$

从极限的积的性质可得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

于是$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，这意味着$f$在$x_0$是连续的. ■

正如例4.3所示，函数在一点的连续性并不蕴涵函数在该点的可微性.

求和、积及商的导数

定理4.6 设I是点x_0的邻域，假设函数$f:I\to\mathbb{R}$和$g:I\to\mathbb{R}$在x_0是可微的.

(i)和$f+g:I\to\mathbb{R}$在x_0是可微的，且

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0);$$

(ii)积$fg:I\to\mathbb{R}$在x_0是可微的，且

$$(fg)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0);$$

(iii)如果$g(x)\neq 0$，$x\in I$，则倒数$1/g:I\to\mathbb{R}$在x_0是可微的，且

91

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2};$$

(iv)若对I中所有x，$g(x)\neq 0$，则商$f/g:I\to\mathbb{R}$是可微的，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

(i)的证明 设$x\in I$且$x\neq x_0$，

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

于是由导数的定义及极限的和的性质，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

(ii)的证明 在本证明中，为便于分解因式，在分子中我们减去和加上项$f(x)g(x_0)$. 设$x\in I$且$x\neq x_0$，

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f(x)\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]+g(x_0)\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right].$$

由于可微性蕴涵连续性，$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，所以，运用导数的定义及极限的和与积的性质，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0).$$

(iii)的证明　对 I 中 x 且 $x\neq x_0$，

$$\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\right]$$
$$=\frac{-1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

由于可微性蕴涵连续性，$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. 因此，可用导数的定义以及极限的积与商的性质，从上面的恒等式得到

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0}\right]=\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

[92]

(iv)的证明　对 I 中的 x 且 $x\neq x_0$，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}\cdot f(x).$$

商的导数公式现在可由(ii)及(iii)推出.　■

命题 4.7　对整数 n，如果 $n\geqslant 0$，定义集 $\mathcal{O}=\mathbb{R}$，如果 $n<0$，定义集 $\mathcal{O}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$. 对所有 $x\in\mathcal{O}$，定义

$$f(x)=x^n.$$

函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是可微的且

$$\text{对所有 } x\in\mathcal{O},\quad f'(x)=nx^{n-1}.$$

证明　$n>0$ 的情况显然就是命题 4.4，所以只需要考虑 $n<0$ 的情形. 但如果 $n<0$，则

$$\text{对所有 } x\in\mathcal{O},\quad f(x)=\frac{1}{x^{-n}},$$

其中 $-n$ 是自然数. 那么，由命题 4.4 及可微函数倒数的求导公式[定理 4.6 的(iii)]可得 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是可微的且

$$\text{对所有 } x\in\mathcal{O},\quad f'(x)=\frac{-[(-n)x^{-n-1}]}{(x^{-n})^2}=nx^{n-1}.$$　■

推论 4.8　对多项式 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及 $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，定义集 $\mathcal{O}=\{x\in\mathbb{R}\mid q(x)\neq 0\}$. 那么，商 $p/q:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是可微的.

证明　由命题 4.4 及定理 4.6 的(i)及(ii)可得 $p:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 与 $q:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 都是可微的. 则定

理4.6的(iv)推出 $p/q:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是可微的. ■

习题

1. 对以下每一个陈述，确定它的真假，并给出理由.
   a. 若函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处连续，则它在 x_0 处可微.
   b. 若函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处可微，则它在 x_0 处连续.

   [93] c. 若函数 $f^2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可微，则 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 也是可微的.
2. 对所有 x，定义 $f(x)=x^3+2x+1$，求出 f 的图形在点(2，13)处的切线方程.
3. m_1，m_2 是数，且 $m_1\neq m_2$，定义

$$f(x)=\begin{cases}m_1x+4 & \text{当 } x\leqslant 0\\ m_2x+4 & \text{当 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

   证明函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处连续但不可微.
4. 用导数的定义直接计算下述各函数在 $x=1$ 处的导数.
   a. 对所有 $x>0$，$f(x)=\sqrt{x+1}$.
   b. 对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=x^3+2x$.
   c. 对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=1/(1+x^2)$.
5. 求下列极限值或确定它们不存在：
   a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}$　b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$　c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$　d. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$
6. 令 I，J 是开区间及函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 与 $h:J\to\mathbb{R}$ 满足性质 $h(J)\subseteq I$，所以定义了复合 $f\circ h:J\to\mathbb{R}$. 证明：如果 x_0 在 J 内，$h:J\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续，当 $x\neq x_0$ 时 $h(x)\neq h(x_0)$ 以及 $f:I\to\mathbb{R}$ 在点 $h(x_0)$ 是可微的，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(h(x))-f(h(x_0))}{h(x)-h(x_0)}=f'(h(x_0)).$$

7. 用习题6证明：若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x_0=1$ 处可微，则：
   a. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$　　b. $\lim\limits_{t\to 1}(\dfrac{f(\sqrt{t})-f(1)}{\sqrt{t}-1}=f'(1)$
   c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=f'(1)$　　d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=2f'(1)$
   e. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=3f'(1)$
   (提示：对于后两个极限，先使用幂差公式.)
8. 对自然数 $n\geqslant 2$，定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x\leqslant 0\\ x^n & \text{若 } x>0.\end{cases}$$

   [94] 证明函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的.
9. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有如下性质：

$$\text{对所有的 } x\in\mathbb{R},\qquad -x^2\leqslant f(x)\leqslant x^2.$$

   证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 是可微的，且 $f'(0)=0$.
10. 对实数 a 与 b，定义

$$g(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{若 } x\leqslant 1\\ a+bx & \text{若 } x>1.\end{cases}$$

   a 与 b 为何值，函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 处是可微的?

11. 假设函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 是可微的，还假设对每个自然数 n，$g(1/n)=0$. 证明 $g(0)=0$ 且 $g'(0)=0$.

12. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微及单调递增. 证明对所有 x 有 $f'(x)\geqslant 0$.

13. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的及存在一有界序列 $\{x_n\}$（若 $n\neq m$，$x_n\neq x_m$）使得对每一下标 n 有 $f(x_n)=0$. 证明存在点 x_0 使得 $f(x_0)=0$ 及 $f'(x_0)=0$.（提示：应用列紧定理.）

14. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处可微，分析极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}.$$

（提示：在分子式中加减 $f(x_0)$.）

15. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 x_0 是可微的. 证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

16. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 是可微的. 证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x}=0.$$

17. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 0 处可微. 对实数 a，b 及 c 且 $c\neq 0$，证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(ax)-f(bx)}{cx}=\left[\frac{a-b}{c}\right]f'(0).$$

18. 令函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界的. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=1+4x+x^2h(x)\quad（对所有 x）.$$

证明 $f(0)=1$ 及 $f'(0)=4$（注意：这里没有关于函数 h 的可微性的假设）.

95

19. 对自然数 n，几何和公式断言

$$如果 x\neq 1, 1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

根据微分法求下列和式：

$$1+x+2x^2+\cdots+nx^n,$$

然后再求下列和式：

$$1^2+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}.$$

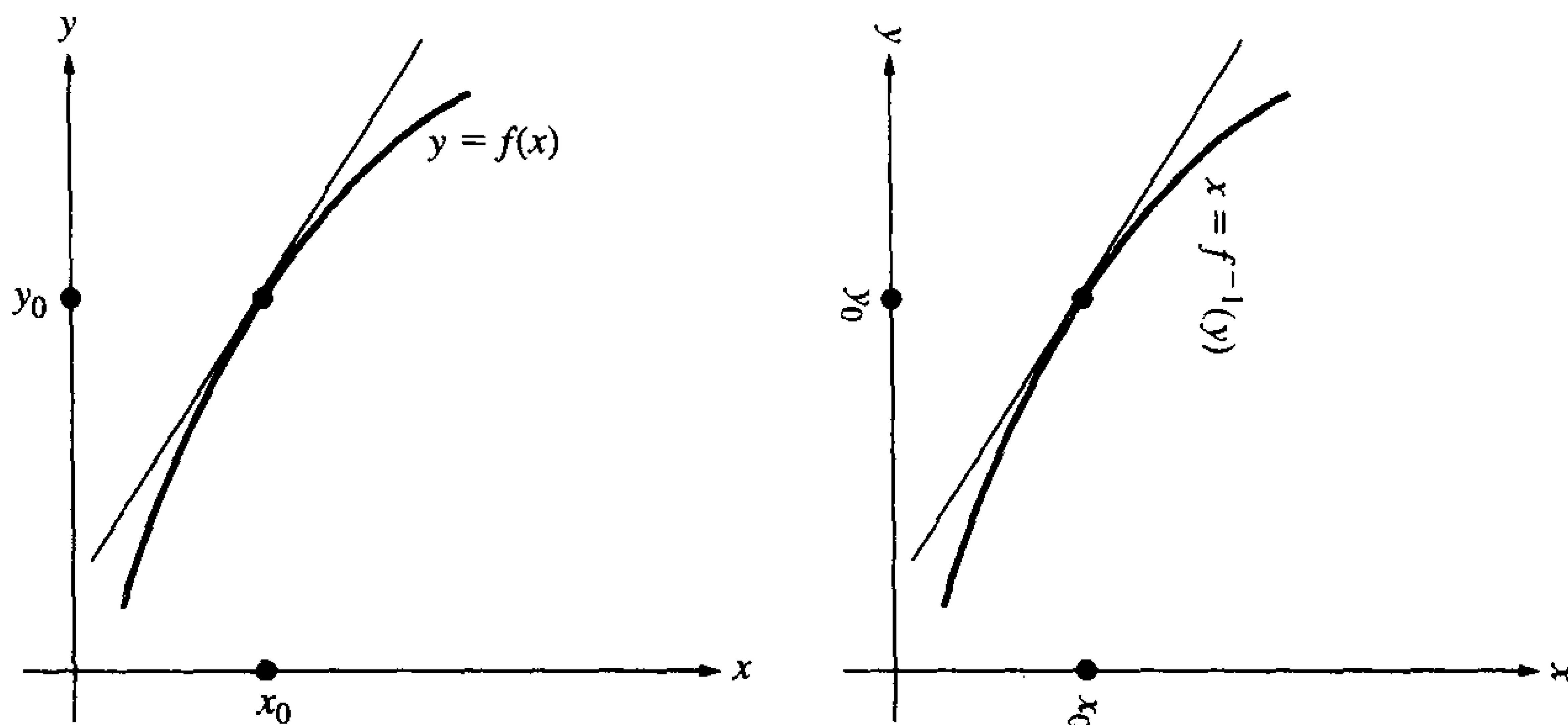
4.2 求反函数与复合函数的微分

定理 3.29 断言，若 I 是区间，函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是严格单调的且象为 $J=f(I)$，则它的反函数 $f^{-1}:J\to\mathbb{R}$ 是连续的. 若 f 在点 x_0 处可微，很自然地会考虑反函数 f^{-1} 在 J 中的点 $y_0\equiv f(x_0)$ 处的可微性问题. 我们将证明：若 f 在点 x_0 是可微的且 $m\equiv f'(x_0)$，那么若 $m\neq 0$，反函数 f^{-1} 在 y_0 处便可微且在 y_0 处的导数等于 $1/m$. 在证明之前，我们先几何地解释一下为什么这个公式是自然的.

事实上，假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 可微及在点 $p=(x_0, y_0)$ 处的切线 ℓ 是非水平的，这就意味着

$$m\equiv f'(x_0)\neq 0.$$

那么，对反函数而言，在点 p 处的切线仍是同一个 ℓ. 从反函数的观点看，切线 ℓ 定义为以垂直轴为定义域的函数的图形，因而它的斜率是 $m\equiv f'(x_0)$ 的倒数. 如图 4.3 所示.



96

图 4.3 $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$

例 4.9 对$\mathbb{R}$中的所有 x，定义

$$f(x) = 2x + 1.$$

函数f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的图形是斜率为 2 的直线，函数的导数是常数，此常数是 2. 反函数 f^{-1}:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 显式地由

$$f^{-1}(y) = y/2 - 1/2 \quad 对所有\ y$$

给出. 此函数的图形是一条直线，其斜率为 1/2，所以反函数的导数是常数，其值为 1/2. ■

例 4.10 对 $x > 0$，定义

$$f(x) = x^2$$

函数f: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是严格递增的，$f'(3) = 6$. 这样，f 的图形在点$(3, 9)$的切线的斜率等于 6. 这个函数的反函数f^{-1}: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ 由下面显式给出：

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad 当\ y > 0.$$

我们期待反函数的图形在点 $y_0 = 9$ 处的切线的斜率是 1/6. 事实上，若 $y > 0$ 及 $y \neq 9$，则由于 $y - 9 = (\sqrt{y} + 3)(\sqrt{y} - 3)$，故

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(9)}{y - 9} = \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9} = \frac{1}{\sqrt{y} + 3} \cdot \frac{\sqrt{y} - 3}{\sqrt{y} - 3} = \frac{1}{\sqrt{y} + 3}.$$

这样，由平方根函数的连续性，

$$\lim_{y \to 9} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(9)}{y - 9} = \lim_{y \to 9} \frac{1}{\sqrt{y} + 3} = \frac{1}{6}.$$ ■

反函数的导数

定理 4.11 令 I 是 x_0 的一个邻域及函数f:$I \to \mathbb{R}$ 是严格单调且连续的. 假设f在 x_0 处可微及 $f'(x_0) \neq 0$. 定义 $J = f(I)$. 则反函数f^{-1}:$J \to \mathbb{R}$ 在点 $y_0 = f(x_0)$处可微且

97

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.4}$$

证明 由介值定理知 J 是 $y_0 = f(x_0)$的一个邻域. 对 J 中的点 y 且 $y \neq y_0$，定义

$$x = f^{-1}(y),$$

所以

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = 1 \Big/ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.5}$$

由于反函数$f^{-1}: J \to \mathbb{R}$是连续的，

$$\lim_{y \to y_0} x = \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

由极限的复合性质、极限的商的性质以及$f: I \to \mathbb{R}$在x_0处可微的定义得出

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} 1 \Big/ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

这样，$f^{-1}: J \to \mathbb{R}$在y_0处可微且它的导数由(4.4)给出. ■

经常将反函数视作原始对象，在这种情况下我们把变量改为x，因此提出下述推论.

推论 4.12 令I是一个开区间，假设函数$f: I \to \mathbb{R}$是严格单调、可微的且对I中的每一点导数不为零. 定义$J = f(I)$. 则反函数$f^{-1}: J \to \mathbb{R}$是可微的且

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad x \in J. \tag{4.6}$$

证明 由于可微性蕴涵连续性，所以函数$f: I \to \mathbb{R}$是连续的. 于是可在J中的x处应用前述定理，其中$x = f(f^{-1}(x))$，而$f^{-1}(x)$扮演上述定理中x_0的角色. ■

命题 4.13 对于自然数n，定义$g(x) = x^{1/n}$，$x > 0$. 则函数$g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$是可微的，且对所有$x > 0$，

$$g'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n - 1}.$$

证明 如果$f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$定义为对$x > 0$，$f(x) = x^n$，则根据定义，函数$g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$是$f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$的反函数. 按照命题4.7，如果$x > 0$，$f'(x) = nx^{n-1}$. 由推论4.12可以推出 [98]

$$\text{如果 } x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{1/n - 1}.$$ ■

复合函数的导数

我们前面证明过连续函数的复合函数是连续的. 可微函数的复合函数是可微的，并且存在复合函数的导数公式. 这就是下面定理的内容.

定理 4.14(链式法则(Chain Rule)) 设I是点x_0的邻域，假设函数$f: I \to \mathbb{R}$在x_0是可微的. 设J是满足$f(I) \subseteq J$的开区间，并假设函数$g: J \to \mathbb{R}$在$f(x_0)$是可微的. 则复合函数$g \circ f: I \to \mathbb{R}$在$x_0$是可微的，且

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0). \tag{4.7}$$

证明 定义$y_0 = f(x_0)$. 对I中的每个x，$x \neq x_0$，若令$y = f(x)$，则由于

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{y - y_0} = 1,$$

我们有

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(y)-g(y_0)}{x-x_0}=\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{4.8}$$

若 $y-y_0=f(x)-f(x_0)\neq 0$. 如果存在含有 x_0 的开区间，其中如果 $x\neq x_0$ 就有 $f(x)\neq f(x_0)$，则通过对上述恒等式取极限，并用极限的复合性质与积的性质便可得要证的结果. 在不存在这样的区间时结论可能成立的理由如下. 引进辅助函数 $h:J\to\mathbb{R}$ 定义为

$$h(y)=\begin{cases}[g(y)-g(y_0)]/[y-y_0] & \text{若 } y\in J \text{ 且 } y\neq y_0\\ g'(y_0) & \text{若 } y=y_0.\end{cases}$$

注意到

$$\text{对所有 } y\in J,\quad g(y)-g(y_0)=h(y)[y-y_0],$$

所以上述恒等式(4.8)可以改写为

99

$$\text{对 } I \text{ 中的 } x\neq x_0,\quad \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=h(f(x))\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]. \tag{4.9}$$

事实上，如果 $f(x)\neq f(x_0)$，则(4.9)与(4.8)一致，而如果 $f(x)=f(x_0)$，则(4.9)的每一边等于0.

正是由 $g'(y_0)$ 的定义可得 $h:J\to\mathbb{R}$ 在 y_0 是连续的. 进而 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 的可微性蕴涵 $f:I\to\mathbb{R}$ 的连续性，于是由于连续函数的复合函数是连续的，所以 $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 也是连续的. 由此，用极限的积定理及恒等式(4.9)，可得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=h(f(x_0))f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$ ■

回忆在3.6节中，对有理数 $r=m/n$，其中 m，$n>0$ 是整数，我们已经对 r 次幂函数作了定义，即令 $x^r\equiv(x^m)^{1/n}$（当 $x>0$），并已证明它是连续函数. 现在要证明 r 次幂函数是可微的.

命题 4.15 对有理数 r，定义 $h(x)=x^r$，$x>0$. 则函数 h：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是可微的，且

$$h'(x)=rx^{r-1},x>0.$$

证明 由于 r 是有理数，可以选取整数 m 及 n，其中 $n>0$ 使得 $r=m/n$. 对 $x>0$，定义 $f(x)=x^m$ 及 $g(x)=x^{1/n}$，所以由定义 $h(x)=g(f(x))$. 按照命题 4.7，若 $x>0$，函数 f：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是可微的且 $f'(x)=mx^{m-1}$. 另一方面，按照命题4.13，若 $x>0$，函数 g：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是可微的且 $g'(x)=(1/n)x^{1/n-1}$. 由链式法则，可得

$$\text{若 } x>0,\quad h'(x)=(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)=(1/n)(x^m)^{1/n-1}(mx^{m-1})=rx^{r-1}.$$ ■

习题

1. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的，并定义 $h\equiv f\circ g$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 若 $g(1)=2$，$g(2)=1$，$f'(1)=-1$，$f'(2)=2$，$g'(1)=3$ 及 $g'(2)=4$，求 $h'(1)$ 与 $h'(2)$.

100

2. 对所有 $x>0$，定义 $f(x)=1/\sqrt{1+x^2}$. 求 $(f^{-1})'(\sqrt{1/5})$.
3. 对 $x>0$，定义 $f(x)=1/x^2$. 证明 $f^{-1}(y)=1/\sqrt{y}$（当 $y>0$）. 直接计算反函数的导数，然后检查这个计算结果与由式(4.6)得到的结果是否一致.
4. 对 $I\equiv(0,1)$ 中的 x，定义 $f(x)=1/(1+x)$. 证明 $f:I\to\mathbb{R}$ 是严格递减且可微的以及 $f(I)=(1/2,1)\equiv J$. 证

明对 J 中的 y 有 $f^{-1}(y)=(1-y)/y$. 直接计算它的导数，然后检查这个计算结果与由式(4.6)得到的结果是否一致.

5. I 是 x_0 的一个邻域，$f:I\to\mathbb{R}$ 连续、严格单调及在 x_0 处可微. 假设 $f'(x_0)=0$. 运用反函数的特征性质：
$$f^{-1}(f(x))=x \quad 当 x 在 I 内$$
及链式法则证明反函数 f^{-1}: $f(I)\to\mathbb{R}$ 在点 $f(x_0)$ 处是不可微的. 这样，定理4.11中的假定 $f'(x_0)\neq 0$ 是必要的.
6. 假设函数 f: $(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是可微的并令 $c>0$. 现定义 g: $(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为 $g(x)=f(cx)$(当 $x>0$). 用导数定义证明 $g'(x)=cf'(cx)$(当 $x>0$).
7. 假设函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是严格单调、可微的，对所有 x，$h'(x)>0$，且 $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的并对所有 x 定义 $g(x)=f(h^{-1}(x))$. 求 $g'(x)$.
8. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的，而 $\{x_n\}$ 是严格递增的有界序列并满足对所有 $n\in\mathbb{N}$，$f(x_n)\leqslant f(x_{n+1})$. 证明存在满足 $f'(x_0)\geqslant 0$ 的数 x_0. (提示：应用单调收敛定理.)
9. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为偶函数，如果
$$对所有 x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(-x);$$
函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为奇函数，如果
$$对所有 x\in\mathbb{R},\quad f(x)=-f(-x).$$
证明：如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的且为奇函数，则 $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是偶函数.

4.3 中值定理及其几何推论

现在我们将证明微积分学中最有用且在几何上值得注意的结果之一——中值定理[⊖]. 它断言：如果函数 f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，f: $(a,b)\to\mathbb{R}$ 是可微的，则在开区间 (a,b) 内存在点 x_0 使得函数图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线平行于通过点 $(a,f(a))$ 及 $(b,(f(b))$ 的直线. 101

为证明中值定理，先证明某些预先的结果.

引理 4.16 *设 I 是点 x_0 的一个邻域，并假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 是可微的. 如果点 x_0 是函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 的极大值点或者极小值点，则 $f'(x_0)=0$. 如图 4.4 所示.*

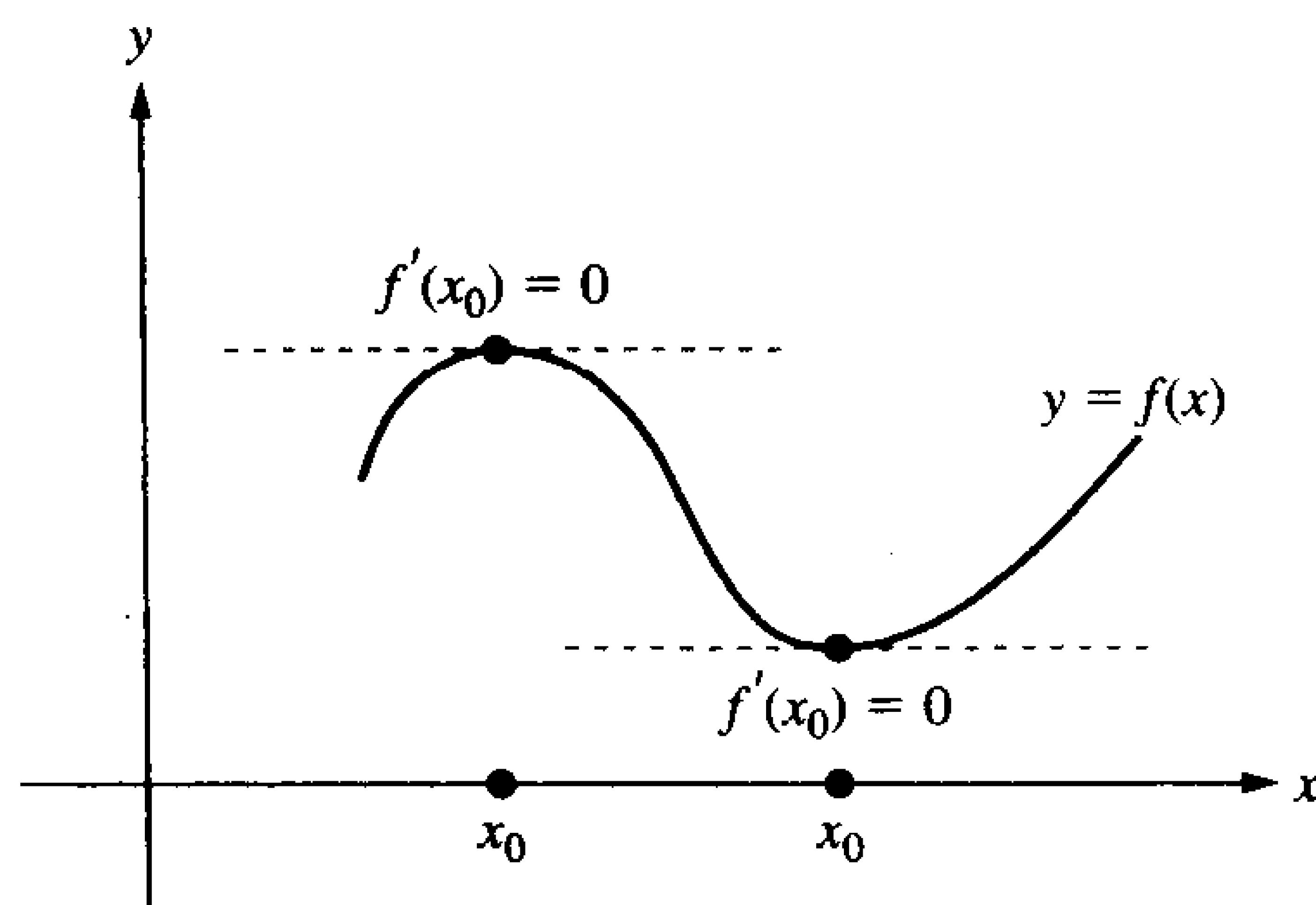


图 4.4 若 x_0 是 f 的极小值点或极大值点，则 $f'(x_0)=0$

证明 注意到正是根据导数的定义，
$$\lim_{x\to x_0,x<x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0,x>x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

⊖ 该定理通常称为拉格朗日中值定理，以区别于下一节将要证明的柯西中值定理.

首先假设 x_0 是极大值点，则

$$\text{对 } I \text{ 中所有 } x < x_0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

于是

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

另一方面，

$$\text{对 } I \text{ 中所有 } x > x_0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

于是

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

所以 $f'(x_0) = 0$.

102 在 x_0 是极小值点的情况下，只需将证明用于相反的不等式即可. ■

定理 4.17（罗尔（Rolle）定理） *假定函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的，而 f: $(a, b) \to \mathbb{R}$ 是可微的. 再假定*

$$f(a) = f(b).$$

则在开区间 (a, b) 内存在点 x_0，满足

$$f'(x_0) = 0.$$

证明 由于 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的，按照极值定理，它在 $[a, b]$ 上既有极小值也有极大值. 由于 $f(a) = f(b)$，如果极大值点与极小值点都在区间的端点处出现，则函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是常数，所以在 (a, b) 内的每一点 x 处 $f'(x) = 0$. 否则，函数在开区间 $I = (a, b)$ 内有极大值点或者极小值点，根据上面的引理，在该点处 $f'(x_0) = 0$ ■

罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例，但事实上，一般的结果可直接由罗尔定理得出.

定理 4.18（拉格朗日（Lagrange）中值定理） *假定函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且 f: $(a, b) \to \mathbb{R}$ 是可微的. 则在开区间 (a, b) 内存在点 x_0，满足*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

如图 4.5 所示.

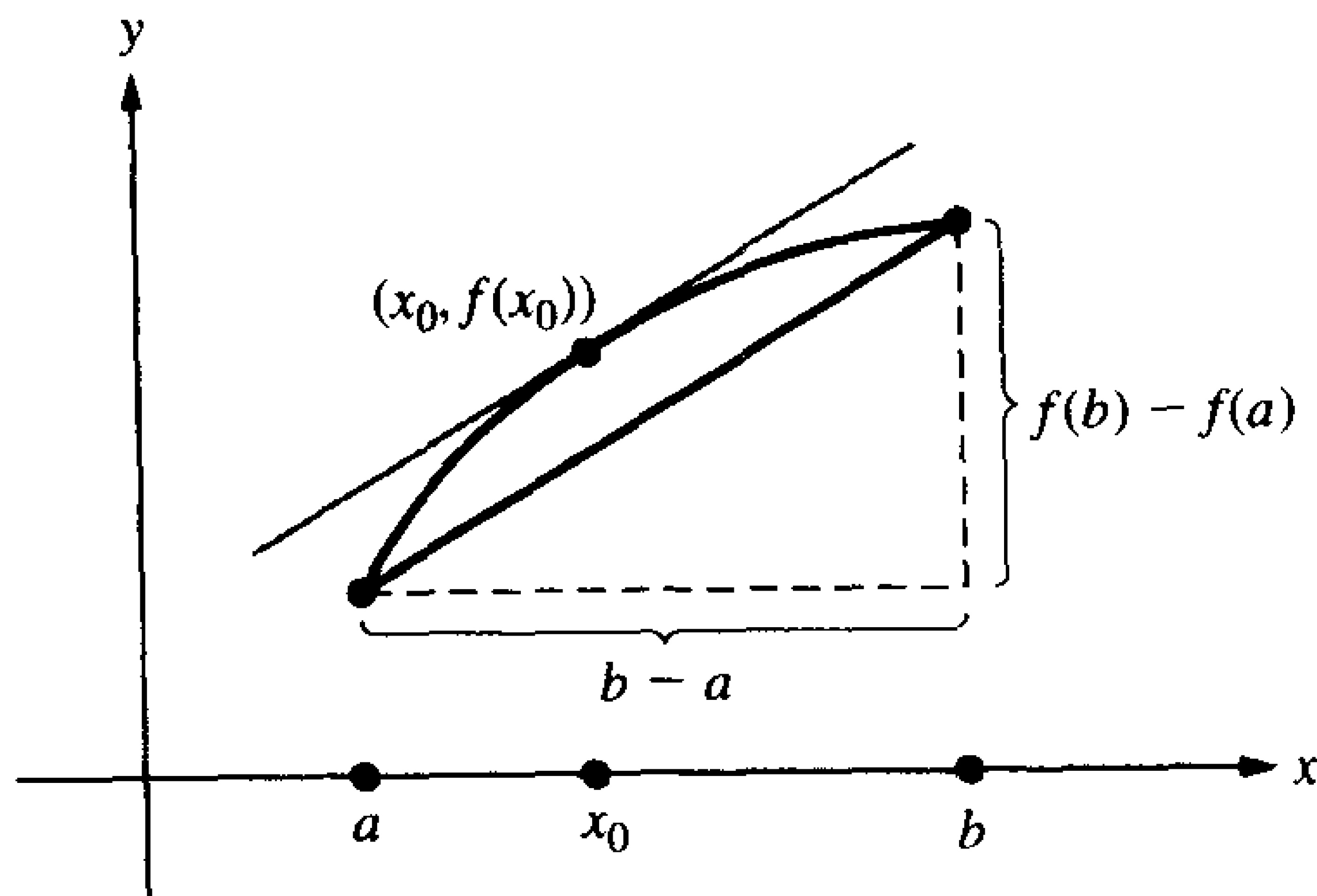


图 4.5 切线平行于连接两端点的线段

证明 对于数 m，我们希望对函数 h：$[a, b] \to \mathbb{R}$ 运用罗尔定理，函数 h：$[a, b] \to \mathbb{R}$ 定义为：对于 $x \in [a, b]$，$h(x) = f(x) - mx$. 为此需有 $h(a) = h(b)$，当选取 103

$$m \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

时，该式恰好成立. 对于这个 m，运用罗尔定理选取 (a, b) 中的一点 x_0 使得 $h'(x_0) = 0$. 因为在点 x_0 有 $h'(x) = f'(x) - m$，故

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

上述中值定理是微积分学中分析函数最重要的工具之一. 注意定理的证明仅仅依赖导数的定义以及极值定理.

作为一般原则，如果我们有关于函数的导数的资料以用来分析函数，那么首先应当运用中值定理. 本节余下部分是这一策略的各种应用.

恒等准则

函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 称为常值，若存在某个常数 c，使得对 D 中的所有 x，$f(x) = c$.

引理 4.19 设 I 是开区间并假定函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 是可微的. 则 $f : I \to \mathbb{R}$ 是常数当且仅当

$$\text{对所有 } x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

证明 首先假定 $f : I \to \mathbb{R}$ 是常数，则对所有 $x \in I$，显然有 $f'(x) = 0$. 为证明其逆，假设对 I 中的所有 x 有 $f'(x) = 0$. 选取 I 中的一点 x_0 并定义 $c \equiv f(x_0)$. 我们要证：对 I 中的所有 x，

$$f(x) = c.$$

设 x 是 I 中的一点，假定 $x < x_0$. 因为可微性蕴涵连续性，把 f 限制在 $[x, x_0]$ 是连续的，当然，限制在开区间 (x, x_0) 是可微的. 依照中值定理，在开区间 (x, x_0) 内存在一点 z，使得

$$f'(z) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

但 $f'(z) = 0$，所以 $f(x) = f(x_0) = c$. 对 $x > x_0$，相同的论证可用于 f 在区间 $[x_0, x]$ 上以得出结论 $f(x) = c$. 故 $f : I \to \mathbb{R}$ 是常值且为 c. ■ 104

两个函数 $g : I \to \mathbb{R}$ 与 $h : I \to \mathbb{R}$ 称为相差一常数，如果存在某个数 c，使得

$$\text{对所有 } x \in I, \quad g(x) = h(x) + c.$$

当然，两个函数 $g : I \to \mathbb{R}$ 与 $h : I \to \mathbb{R}$ 相等，若对所有 $x \in I$，$g(x) = h(x)$. 有时说相等的函数是恒相等，为的是强调函数在它们的定义域内的所有点有相同的值. 下述结果从几何上看是十分清楚的. 由于经常用到，所以将其命名.

命题 4.20（恒等准则） 设 I 是开区间且设函数 $g : I \to \mathbb{R}$ 与 $h : I \to \mathbb{R}$ 是可微的. 则两个函数相差一常数当且仅当

$$\text{对所有 } x \in I, \quad g'(x) = h'(x). \tag{4.10}$$

特别地，两个函数恒相等当且仅当 (4.10) 式成立且在 I 中存在某个点 x_0 满足

$$g(x_0) = h(x_0).$$

证明 定义 $f = g - h : I \to \mathbb{R}$. 按照和的微分法则，$f : I \to \mathbb{R}$ 是可微的且

$$\text{对所有 } x \in I, \quad f'(x) = g'(x) - h'(x).$$

再有，注意到$f:I \to \mathbb{R}$是常数当且仅当函数$g:I \to \mathbb{R}$与$h:I \to \mathbb{R}$相差一常数. 由上面的引理可得要证的结果. ■

严格单调的准则

推论 4.21 设I是开区间且函数$f:I \to \mathbb{R}$是可微的. 假定对所有$x \in I$, $f'(x) > 0$, 则$f:I \to \mathbb{R}$是严格递增的.

证明 设u和v是I中满足$u < v$的点. 将中值定理用于f: $[u, v] \to \mathbb{R}$并在开区间(u, v)中选取一点x_0使得

$$f'(x_0) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}.$$

由于$f'(x_0) > 0$以及$v - u > 0$，由此得$f(v) > f(u)$. ■

用$-f:I \to \mathbb{R}$替换$f:I \to \mathbb{R}$，上述推论意味着，如果$f:I \to \mathbb{R}$在I中的所有点x处有负导数，则$f:I \to \mathbb{R}$是严格递减的.

105

上述结果给出一种方法来求可微函数$f:I \to \mathbb{R}$的严格单调的区间. 该方法的有效性依赖于能够求得$f'(x) = 0$的点. 事实上，除非函数$f:I \to \mathbb{R}$十分简单，否则求出这种点通常是很难的.

选择极值的准则

定义 函数$f:D \to \mathbb{R}$定义域D中的点x_0称为$f:D \to \mathbb{R}$的局部极大值点(Local maximizer)，若存在某个$\delta > 0$使得

$$\text{对 } D \text{ 中所有满足 } |x - x_0| < \delta \text{ 的点 } x, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

称x_0为$f:D \to \mathbb{R}$的局部极小值点(Local minimizer)，若存在某个$\delta > 0$使得

$$\text{对 } D \text{ 中所有满足 } |x - x_0| < \delta \text{ 的点 } x, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

引理 4.16 断言：如果I是点x_0的一个邻域且$f:I \to \mathbb{R}$在x_0是可微的，则点x_0是$f:I \to \mathbb{R}$的局部极小值点或者局部极大值点，必须有

$$f'(x_0) = 0.$$

然而，已知$f'(x_0) = 0$并不能保证x_0是局部极大值点或局部极小值点. 例如，如果对所有$x \in \mathbb{R}$，$f(x) = x^3$，则$f'(0) = 0$，但点0既不是局部极大值点也不是局部极小值点. 为建立局部极大值点与局部极小值点存在的充分准则，有必要引进高阶导数.

对于以开区间I作为定义域的可微函数$f:I \to \mathbb{R}$，如果$f:I \to \mathbb{R}$是可微的，就说$f:I \to \mathbb{R}$有一阶导数(one derivative)，并对所有$x \in I$定义$f^{(1)}(x) = f'(x)$. 如果函数$f':I \to \mathbb{R}$本身有导数，就说$f:I \to \mathbb{R}$有两个导数(two derivatives)或者说有一个二阶导数(second derivative)，以$f'':I \to \mathbb{R}$或$f^{(2)}:I \to \mathbb{R}$表示$f':I \to \mathbb{R}$的导数. 假设对自然数k已经定义了$f:I \to \mathbb{R}$有k阶导数是什么意思，并定义了$f^{(k)}:I \to \mathbb{R}$，则如果$f^{(k)}:I \to \mathbb{R}$是可微的，就称$f:I \to \mathbb{R}$有$k+1$阶导数并定义$f^{(k+1)}:I \to \mathbb{R}$是$f^{(k)}:I \to \mathbb{R}$的导数. 在这里的上下文中，用$f^{(0)}(x)$表示$f(x)$.

一般地，如果函数有 k 阶导数，它不一定有 $k+1$ 阶导数. 例如，函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义为：对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=|x|x$，则此函数是可微的但没有二阶导数.

定理 4.22 设 I 是包含点 x_0 的开区间并假定函数$f:I\to\mathbb{R}$ 有二阶导数. 假设

$$f'(x_0)=0.$$

如果$f''(x_0)>0$，则 x_0 是$f:I\to\mathbb{R}$ 的局部极小值点；如果$f''(x_0)<0$，则 x_0 是$f:I\to\mathbb{R}$ 的局部极大值点.

106

证明 首先假设$f''(x_0)>0$. 由于

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0,$$

可得(见习题 18)存在 $\delta>0$ 使得开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$包含在 I 之中，且

$$\text{如果 } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\quad \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0. \tag{4.11}$$

但$f'(x_0)=0$，所以(4.11)就相当于论断

$$f'(x)>0,\quad \text{若 } x_0<x<x_0+\delta;\quad f'(x)<0,\quad \text{若 } x_0-\delta<x<x_0.$$

由这两个不等式并运用中值定理可得

$$\text{如果}\quad 0<|x-x_0|<\delta,\quad \text{则}\quad f(x)>f(x_0).$$

当$f''(x_0)<0$ 时可类似地论证. ■

如果同时有$f'(x_0)=0$ 及$f''(x_0)=0$，上述定理未对 x_0 是否为局部极值点提供任何信息. 从检查形如$f(x)=cx^n(x\in\mathbb{R})$的函数在 $x_0=0$ 处的情形来看，如果$f'(x_0)=0$ 且$f''(x_0)=0$，则 x_0 既可能是局部极大值点也可能是局部极小值点，或者什么极值点都不是.

我们所描述的中值定理的几何推论到目前为止肯定是与人们的几何直觉相符合的. 然而，证明那些从几何角度看起来显而易见的结论还是有必要细心些. 在 9.6 节，我们将描述具有以下三条性质的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

(ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在任何一点都不可微.

(iii)没有任何一个区间 I 能使得$f:I\to\mathbb{R}$ 是单调的.

正是存在这样一种函数，才使得直观的几何论证绝对有必要建立在分析的基础之上. 一个不太令人吃惊但仍有点意外的例子是函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的存在性，该函数具有$f'(0)>0$但没有 0 的任何一个邻域 I 能使得函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在其中是递增的. 我们在习题 20 中描述了一个这样的例子[⊖].

107

⊖ 假定正弦函数的周期性与可微性是熟知的，下面是一个可微函数的例子，该函数在 $x=0$ 处有正的导数但无 0 的邻域使它在邻域内是单调递增的：

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin 1/x & \text{当 } x\neq 0\\ 0 & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

这个反直觉性质的缘由是导数f'在 $x=0$ 非连续.

习题

1. 对以下每一个陈述，确定其真假，并给出理由.

 a. 若可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是严格递增的，则对所有$x$有$f'(x)>0$.

 b. 若可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是单调递增的，则对所有$x$有$f'(x)\geq 0$.

 c. 若函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的且对$[-1, 1]$中的所有$x$有

$$f(x)\leq f(0),$$

 则$f'(0)=0$.

 d. 若函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的且对$[-1, 1]$中的所有$x$有

$$f(x)\leq f(1),$$

 则$f'(1)=0$.

2. 粗略地画出下列函数的图形. 求它们的递增或递减区间.

 a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义如下：对所有$x\in\mathbb{R}$，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

 b. h：$(0, \infty)\to\mathbb{R}$定义如下：对$x>0$，$h(x)=a+b/x$，其中$a>0$，$b>0$.

3. 对实数a，b，c及d，定义$\mathcal{O}=\{x \mid cx+d\neq 0\}$. 再定义

$$对所有\ x\in\mathcal{O},\quad f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

 证明：如果函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$不是常数，则它没有任何的局部极大值点或局部极小值点. 画出它的略图.

4. 对$c>0$，证明下列方程没有两个解：

$$x^3-3x+c=0,\quad 0<x<1.$$

5. 证明下列方程恰有一解：

$$x^5+5x+1=0,\quad -1<x<0.$$

6. 证明下列方程恰有两个解：

$$x^4+2x^2-6x+2=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

7. 对任意数a与b以及偶自然数n，证明下列方程至多只有两个解：

$$x^n+ax+b=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

 如果n是奇数，上述结论成立吗？

8. 对数a与b，证明下列方程恰有三个解当且仅当$4a^3+27b^2<0$：

$$x^3+ax+b=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

108

9. 设D是非零实数集. 假设函数$g:D\to\mathbb{R}$与h：$D\to\mathbb{R}$是可微的且

$$对所有\ x\in D,\quad g'(x)=h'(x).$$

 函数$g:D\to\mathbb{R}$与h：$D\to\mathbb{R}$相差一常数吗？（提示：D是区间吗？）

10. 证明：不存在这样的可微函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，即在$x<0$时$F'(x)=0$，而在$x\geq 0$时$F'(x)=1$. 可如下进行论证：(i)函数是连续的；(ii)函数在$(-\infty, 0)$是常值；(iii)函数在$(0, \infty)$上形如$F(x)=A+Bx$，然后导出矛盾.

11. 设n是自然数. 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的且下列方程至多有$n-1$个解：

$$f'(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

 证明下列方程至多有n个解：

$$f(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

12. 用归纳法和习题11证明：如果$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是次数为$n$的多项式，则方程

$$p(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}$$

 至多存在n个解.

13. 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的并且

$$\begin{cases} f'(x) = x + x^3 + 2, & x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 5. \end{cases}$$

求函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

14. 假设函数 g: $(-1, 1)\to\mathbb{R}$ 是可微的并且

$$\begin{cases} g'(x) = x/\sqrt{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ g(0) = 25. \end{cases}$$

求函数 g: $(-1, 1)\to\mathbb{R}$.

15. 设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微函数，假设

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad g(x)f'(x) = f(x)g'(x).$$

如果对所有 $x\in\mathbb{R}$，$g(x)\neq 0$，证明在$\mathbb{R}$中存在某个 c 使得对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=cg(x)$.

16. 假定 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都是可微的，并且

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \text{ 以及 } g'(x) = -f(x) & x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \text{ 及 } g(0) = 1. \end{cases}$$

证明

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad [f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1.$$

（提示：对所有 $x\in\mathbb{R}$，定义 $h(x)\equiv[f(x)]^2+[g(x)]^2$. 证明 h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个常数函数.） 109

17. 设 I 是开区间，假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是连续的且在 I 中的点 x_0 处有 $f(x_0)>0$. 证明存在 $\delta>0$，使得若 $|x-x_0|<\delta$，则 $f(x)>0$.

18. 设 I 是点 x_0 的一个邻域，并假设函数 g: $I\to\mathbb{R}$ 是可微的. 定义

$$h(x) = \begin{cases} [g(x) - g(x_0)]/[x - x_0] & \text{若 } x \neq x_0 \\ g'(x_0) & \text{若 } x = x_0. \end{cases}$$

证明 $h:I\to\mathbb{R}$ 是连续的. 如果 $g'(x_0)>0$，用上题证明存在 $\delta>0$ 使得若 $0<|x-x_0|\leq\delta$，则 $[g(x)-g(x_0)]/[x-x_0]>0$.

19. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的，$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 0 处是连续的，且 $f'(0)>0$. 证明存在含有 0 的开区间 I，使得 $f:I\to\mathbb{R}$ 是严格单调的.

20. 定义

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{若 } x \text{ 为有理数} \\ x + x^2 & \text{若 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

证明 $f'(0)=1$，但在点 0 处无邻域 I 使得函数是单调递增的.

21. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有如下性质：存在正数 c 使得对$\mathbb{R}$中所有的 u，v，有 $|f(u)-f(v)|\leq c(u-v)^2$. 证明函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是常数.

22. 假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的并且存在正数 c 使得

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq c.$$

证明

$$\text{若 } x \geq 0, \text{则 } f(x) \geq f(0) + cx \quad \text{而若 } x \leq 0, \text{则 } f(x) \leq f(0) + cx.$$

用上述不等式证明 $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

23. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有二阶导数且假设

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0 \text{ 以及 } f''(x) \geq 0.$$

证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是常数.（提示：注意 $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是递增的.）

24. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有二阶导数及 $f(0)=0$，并且对所有 x 有

$$f'(x) \leq f(x).$$

对所有 x 是否有 $f(x)=0$? 110

4.4 柯西中值定理及其解析推论

以下是拉格朗日中值定理的有用的推广.

定理 4.23(柯西(Cauchy)中值定理) 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$与g: $[a, b]\to\mathbb{R}$是连续的，且f: $(a, b)\to\mathbb{R}$与g: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可微的. 此外，假定

$$\text{对所有 } x\in(a,b),\quad g'(x)\neq 0.$$

那么在开区间(a, b)内存在点x_0，满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{4.12}$$

证明 为证明该定理，我们将运用罗尔定理，这类似于证明拉格朗日中值定理. 对一个数m，我们对函数h: $[a, b]\to\mathbb{R}$应用罗尔定理，该函数定义为

$$\text{对 } x\in[a,b],\quad h(x)\equiv f(x)-mg(x).$$

为此，必须有$h(a)=h(b)$，这在选取

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

时恰好成立. 对于这个m，运用罗尔定理在开区间(a, b)中选取一点x_0使得$h'(x_0)=0$. 因为$h'(x)=f'(x)-mg'(x)$，所以在点x_0有

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=m=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$ ■

注意，如果对$a\leqslant x\leqslant b$有$g(x)=x$，则柯西中值定理便化为拉格朗日中值定理.

下面是柯西中值定理的推论，在第8章我们用多项式逼近函数，而这个推论将是用以估计出现的误差的一个重要工具.

定理 4.24 设I是开区间而n是自然数，并假设函数$f:I\to\mathbb{R}$有n阶导数. 还假定在I中的点x_0处，

$$\text{对 } 0\leqslant k\leqslant n-1,\quad f^{(k)}(x_0)=0.$$

那么对I中的每个点$x\neq x_0$，存在严格介于x与x_0之间的点z，在该点处

111

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{4.13}$$

证明 定义$g(x)=(x-x_0)^n$，$x\in I$. 于是对$0\leqslant k\leqslant n-1$，$g^{(k)}(x_0)=0$且$g^{(n)}(x_0)=n!$. 设$x$为$I$中不等于$x_0$的点，不妨设$x>x_0$. 将柯西中值定理用于函数$f$: $[x_0, x]\to\mathbb{R}$及g: $[x_0, x]\to\mathbb{R}$，可选择(x_0, x)中的点x_1，满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}. \tag{4.14}$$

再将柯西中值定理用于f': $[x_0, x_1]\to\mathbb{R}$与g': $[x_0, x_1]\to\mathbb{R}$，以便选择(x_0, x_1)中的点x_2，使得在x_2满足

$$\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{g'(x_1)-g'(x_0)}=\frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}, \tag{4.15}$$

所以由(4.14)，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}.$$

继续依次对更高阶导数应用柯西中值定理，可得$(x_0,\ x)$中的一点x_n，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_0)}=\frac{f^{(n)}(x_n)}{n!},$$

令$z=x_n$，便得到(4.13)式. ■

习题

1. 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有二阶导数，满足$f(0)=f'(0)=0$，并且当$|x|\leqslant 1$时$|f''(x)|\leqslant 1$. 证明：若$x\leqslant 1$，则$f(x)\leqslant 1/2$.
2. 设$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是次数不大于5的多项式. 设在$\mathbb{R}$中的某个点$x_0$处，
$$p(x_0)=p'(x_0)=\cdots=p^{(5)}(x_0)=0.$$
证明对所有$x\in\mathbb{R}$，$p(x)=0$.
3. 定义$f(t)=t^2(0\leqslant t\leqslant 1)$及$g(t)=t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$.
   a. 求数$c(0<c<1)$，使得
$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
   b. 证明不存在满足以下条件的数c：$0<c<1$且
$$\begin{cases}f(1)-f(0)=f'(c)(1-0)\\ g(1)-g(0)=g'(c)(1-0).\end{cases}$$
4. 假设函数$f:\ [a,\ b]\to\mathbb{R}$与$g:\ [a,\ b]\to\mathbb{R}$是连续的，并且$f:\ (a,\ b)\to\mathbb{R}$与$g:\ (a,\ b)\to\mathbb{R}$是可微的. 还假定对$(a,\ b)$中的所有x，$|f'(x)|\geqslant|g'(x)|>0$. 证明 [112]
$$对[a,b]中所有u,v有|f(u)-f(v)|\geqslant|g(u)-g(v)|.$$
5. 设函数$f:\ (-1,\ 1)\to\mathbb{R}$有$n$阶导数，且它的$n$阶导数$f^{(n)}:\ (-1,\ 1)\to\mathbb{R}$是有界的. 还假定$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. 证明存在正数$M$，使得
$$对(-1,1)中所有x,\quad |f(x)|\leqslant M|x|^n.$$
6. 设函数$f:\ (-1,\ 1)\to\mathbb{R}$有$n$阶导数. 假定存在正数$M$，使得
$$对(-1,1)中所有x,\quad |f(x)|\leqslant M|x|^n.$$
证明$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$.
7. 设I是点x_0的一个邻域，并假定函数$f:I\to\mathbb{R}$有二阶导数. 证明
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0).$$
8. 设I是开区间而n是自然数. 假定$f:I\to\mathbb{R}$与$g:I\to\mathbb{R}$有n阶导数. 证明$fg:I\to\mathbb{R}$有n阶导数并有下面的公式(称为莱布尼茨(Leibnitz)公式)：
$$对所有x\in I,\quad (fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$
对$n=2$与$n=3$，明确地写出公式.

4.5 莱布尼茨记号

到现在为止，给定开区间I及可微函数$f:I\to\mathbb{R}$，已用

$$f':I\to\mathbb{R}$$

表示了函数的导数，从而$f'(x)$是$f:I\to\mathbb{R}$在I中点x处的导数．这个记号是完全适用的．然而，随着我们引进新类型的函数，以及当研究积分时，某些公式与算法方法使用另外一种由莱布尼茨提出的记号会更容易适应．此外，莱布尼茨记号广泛用于科学和工程技术领域，所以有必要熟悉它．

对可微函数$f:I\to\mathbb{R}$，用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

表示$f'(x)$．如果用(x, y)表示$f:I\to\mathbb{R}$的图形上的点，我们也用

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{或} \quad y'$$

113 表示$f'(x)$．

莱布尼茨记号的优点在于经过适当的解释，可以把$\mathrm{d}f$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}x$等记号看作是$\mathbb{R}$中的数并进行各种代数运算，而得到的公式仍然有意义．莱布尼茨记号在数学和科学中使用已有300多年，是十分有用的．但是莱布尼茨记号体系确实有不确定性，所以在解释公式时必须小心．这在下面用莱布尼茨记号表示的链式法则的公式中有很好的说明．

链式法则与莱布尼茨记号

对数a，$b\neq0$及$c\neq0$，

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}.$$

对于莱布尼茨记号，相应的消去公式是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{4.16}$$

我们对(4.16)寻找一个合适的解释．下述解释是合理的：假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$与$u$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的．考虑复合函数$f\circ u$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$．依照链式法则，$f\circ u$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的且

$$(f\circ u)'(x)=f'(u(x))u'(x) \quad (\text{对所有 } x). \tag{4.17}$$

如果用

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\text{代替}(f\circ u)'(x), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\text{代替}f'(u(x)), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{代替}u'(x),$$

则(4.17)变成(4.16)．

类似于(4.16)的公式是经常出现的，它们十分有用．事实上，类似公式在多元函数的微积分中更为有用．但是，在式(4.16)中，符号$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$在$t=x$与$t=u$时有着完全不同的意义．我们引进符号$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$表示$f'(x)$，而在式(4.16)中它代表$(f\circ u)'(x)$．式(4.16)是链式法则的一个合理的表示，但是在个别符号里有着不确定性．当使用莱布尼茨记号时，对上下文中个别符号的意义作出解释永远是必要的，而且这些解释必须是经过精确证明的．

反函数的导数与莱布尼茨记号

对任意两个非零实数，

114

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b/a}.$$

对于莱布尼茨记号，对应的倒数公式是

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}. \tag{4.18}$$

什么意义可以附加在式(4.18)上？假设$f:I\to\mathbb{R}$是可微及严格单调的，且对I中的所有x有$f'(x)\neq 0$. 定义$J=f(I)$及对I中的x，令$y=f(x)$. 依照反函数的求导公式，如推论4.12所表述的，反函数$f^{-1}:J\to\mathbb{R}$是可微的且

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \quad 当x在I中. \tag{4.19}$$

如果令

$$x=f^{-1}(y) \qquad 当y在J中,$$

则按照上面引进的符号体系，

$$\frac{dx}{dy}=(f^{-1})'(y)=(f^{-1})'(f(x))$$

及

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

可以看到(4.18)可解释为(4.19)的一个紧凑的形式.

最后一个记号约定：当$f:I\to\mathbb{R}$有二阶导数时，把$f''(x)$记为

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)),\quad \frac{d^2f}{dx^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2},y''.$$

习题

1. 对下述公式给一个合理的解释：

$$\frac{d}{dx}(f+g)=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}.$$

2. 对下述公式给一个合理的解释：

$$\frac{df}{dr}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dr}.$$

3. 对下述公式给一个合理的解释：

$$\frac{ds}{ds}=1.$$

115

* 第5章 作为微分方程解的初等函数

5.1 微分方程的解

到目前为止，我们所掌握的可微函数是极为有限的，包括常值函数，有理幂函数，以及由它们通过加、乘、除、复合构成的函数，还有它们的反函数. 但是在数学与科学的大多数基本问题的研究中，出现的是更为广泛的函数. 例如，三角函数、指数函数以及它们的反函数.

本章我们引入指数函数、三角函数作为微分方程的解. 这不仅扩充了我们所掌握的可微函数，同时也将展示我们在前面四章所发展的工具的威力.

我们暂时地假设这两个微分方程是有解的.

首先，暂时假设下述微分方程是有解的.

对数的微分方程

$$\begin{cases} F'(x) = 1/x & \text{对所有 } x > 0 \\ F(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

当我们学过积分后，这一暂时假设可以去掉. 在第 6 章，作为第二基本定理(对积分求导数)的一个推论，我们将证明，可把这个微分方程的解表示成一个积分的形式[⊖]. 在假设方程(5.1)有解后，我们将证明解是唯一的. 这个解保持了自然对数的所有熟知的性质，此外，它有反函数且反函数保持了指数函数的所有熟知的性质.

其次，暂时假设下述微分方程是有解的.

三角函数的微分方程

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 & \text{对所有 } x \\ f(0) = 1 \quad \text{及} \quad f'(0) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

当我们学习了收敛幂级数的性质之后，这个暂时的假设可以去掉. 在第 9 章，作为对幂级数求导可以逐项微分的一个推论，我们将证明，这个微分方程的解可以显式地表示为一个幂级数[⊜]. 但假设微分方程(5.2)有解，我们可以证明这个解是唯一的，这个解保持了余弦函数所有熟知的性质，且它的导函数的负值保持了正弦函数的所有熟知的性质. 特别地，我们证明微分方程(5.2)的解是一个周期函数.

在研究本章中的微分方程的解时，我们会经常使用在 4.3 节中建立的恒等准则，这里把它

⊖ 微分方程(5.1)的解可定义为

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \qquad \text{对所有 } x > 0.$$

⊜ 微分方程(5.2)的解可定义为

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{对所有 } x.$$

重述如下.

恒等准则

一个可微函数 $g:I\to\mathbb{R}$（其中 I 是开区间）恒等于 0 当且仅当

i. 它的导函数 $g':I\to\mathbb{R}$ 恒等于 0,

ii. 在 I 中存在某个点 x_0 使得 $g(x_0)=0$.

作为本章中使用的技巧的一个预示，我们在此提供一个有代表性的例子，来说明如何使用恒等准则. 我们希望证明微分方程(5.1)的解具有下述所熟悉的自然对数的性质：对任意正数 a 与 b,

$$F(ab)=F(a)+F(b). \tag{5.3}$$

117

如果把 b 看作变量且记为 x，这相当于证明：如果定义函数 g：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为

$$g(x)\equiv F(ax)-F(a)-F(x),\quad \text{当 } x>0,$$

则 g 恒等于 0. 由 F 是微分方程(5.1)的解和链式法则，可以用恒等准则证明 g 是恒等于 0 的. 事实上，由链式法则可得

$$g'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(ax)-F(a)-F(x)]=\frac{a}{ax}-\frac{1}{x}=0(\text{当 } x>0)$$

及

$$g(1)=F(a)-F(a)-F(1)=-F(1)=0.$$

这样，由恒等准则，g 恒等于 0，因此恒等式(5.3)成立.

5.2 自然对数函数与指数函数

给定有理数 r，我们寻找一可微函数 F：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$，使得

$$F'(x)=x^r\qquad \text{当 } x>0.$$

如果 $r\neq-1$ 且 c 是任一实数，则由

$$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}+c\qquad \text{当 } x>0$$

定义的函数 F：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是上述微分方程的一个解. 由恒等准则可知，所有解都是这种形式. 而 $r=-1$ 的例外情况则更有趣.

自然对数

例外情况是求一可微函数 F：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$，使得

$$F'(x)=\frac{1}{x}\qquad \text{当 } x>0.$$

基于我们已经建立的理论，现在还不能确定究竟是否存在这样一个函数.

为了扩充可微函数，我们暂时假定存在一个可微函数 F：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$，使得

$$\begin{cases}F'(x)=1/x & \text{当 } x>0\\ F(1)=0.\end{cases} \tag{5.4}$$

在第6章，我们会证明确实有这样一个函数. 上述微分方程仅有一个解，这是因为如果 F_1 与 [118] F_2 同是它的解，则它们的差 $g\equiv F_1-F_2$ 将有恒等于0的导数及 $g(1)=0$. 由恒等准则知，g 恒等于0，因此 $F_1=F_2$.

定理 5.1 令函数 $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 满足微分方程(5.4). 则

i. 对所有 $a,b>0$，$F(ab)=F(a)+F(b)$.

ii. 当 $a>0$ 且 r 是有理数时，$F(a^r)=rF(a)$.

iii. 对每一数 c，存在唯一正数 x 使得 $F(x)=c$.

(i)的证明 这一性质已在上节最后证明了.

(ii)的证明 定义

$$h(x)\equiv F(x^r)-rF(x)\qquad 当 x>0.$$

为验证恒等式(ii)，只要验证函数 $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 恒等于0. 因为 $F'(x)=1/x$(当 $x>0$)，用链式法则，我们看到函数 h 是可微的且

$$h'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x^r)-rF(x)]=\frac{rx^{r-1}}{x^r}-\frac{r}{x}=0.$$

其次，因为 $F(1)=0$，

$$h(1)=F(1)-rF(1)=0.$$

这样，从恒等准则推得对所有 $x>0$，$h(x)\equiv 0$. 于是(ii)得证.

(iii)的证明 由于对所有的 $x>0$，$F'(x)=1/x>0$，函数 $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是严格递增的. 还注意到，运用(i)可得

$$对所有的 x>0,\quad 0=F(1)=F\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right),$$

所以对所有 $x>0$，$F(1/x)=-F(x)$. 这样，为验证(iii)，可以假定 $c>0$，只需证明方程

$$F(x)=c,\quad x>1 \tag{5.5}$$

存在一个解就足够了. 由于可微必连续，函数 $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续的. 由于 $F(1)=0<c$，按照介值定理，为证明方程(5.5)有一个解，只要证明存在数 $x_0>1$，使得 $F(x_0)>c$ 就可以了. 然 [119] 而，由性质(ii)可推出对每个自然数 n，$F(2^n)=nF(2)$. 按照阿基米德性质，可以选取自然数 n，使得 $nF(2)>c$. 所以，因为 $F(2)>F(1)=0$，如果定义 $x_0=2^n$，则有 $F(x_0)=nF(2)>c$. ■

唯一的作为微分方程(5.1)的解且具有上述定理所描述的性质的函数 $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 在科学中频繁出现，所以它有一个特别的名字——称为自然对数(natural logarithm)——用 $\ln x$ 表示 $F(x)$，其中 $x>0$.

由自然对数的定义及链式法则可得，如果 I 是开区间，而函数 $h:I\to\mathbb{R}$ 是可微的，并且对所有 $x\in I$，$h(x)>0$，则

$$对所有 x\in I,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln h(x))=\frac{h'(x)}{h(x)}. \tag{5.6}$$

指数函数

由于在定义域中的每一点，自然对数的导数是正的，所以自然对数这个函数是严格递增的，因而它在定义域$\mathbb{R}$上有反函数，用 $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 表示这个反函数. 这样，由反函数的两个

特征性质，

$$\begin{cases} g(\ln x) = x & \text{当 } x > 0 \\ \ln g(x) = x & \text{当 } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

此外，按照定理 4.11，反函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可微的. 由于对所有 x，

$$\ln g(x) = x,$$

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{d}{dx}[x],$$

因而由微分公式(5.6)，对所有 x，

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 1.$$

此外，由于 $\ln 1 = 0$，

$$g(0) = g(\ln 1) = 1.$$

这样，自然对数的反函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是下述微分方程的解：

$$\begin{cases} g'(x) = g(x) & \text{当 } -\infty < x < \infty \\ g(0) = 1. \end{cases} \tag{5.7}$$

120

由于自然对数是严格递增的，它的象是整个$\mathbb{R}$，下述方程

$$\ln x = 1, \quad x > 0 \tag{5.8}$$

有唯一解. 如图 5.1 所示.

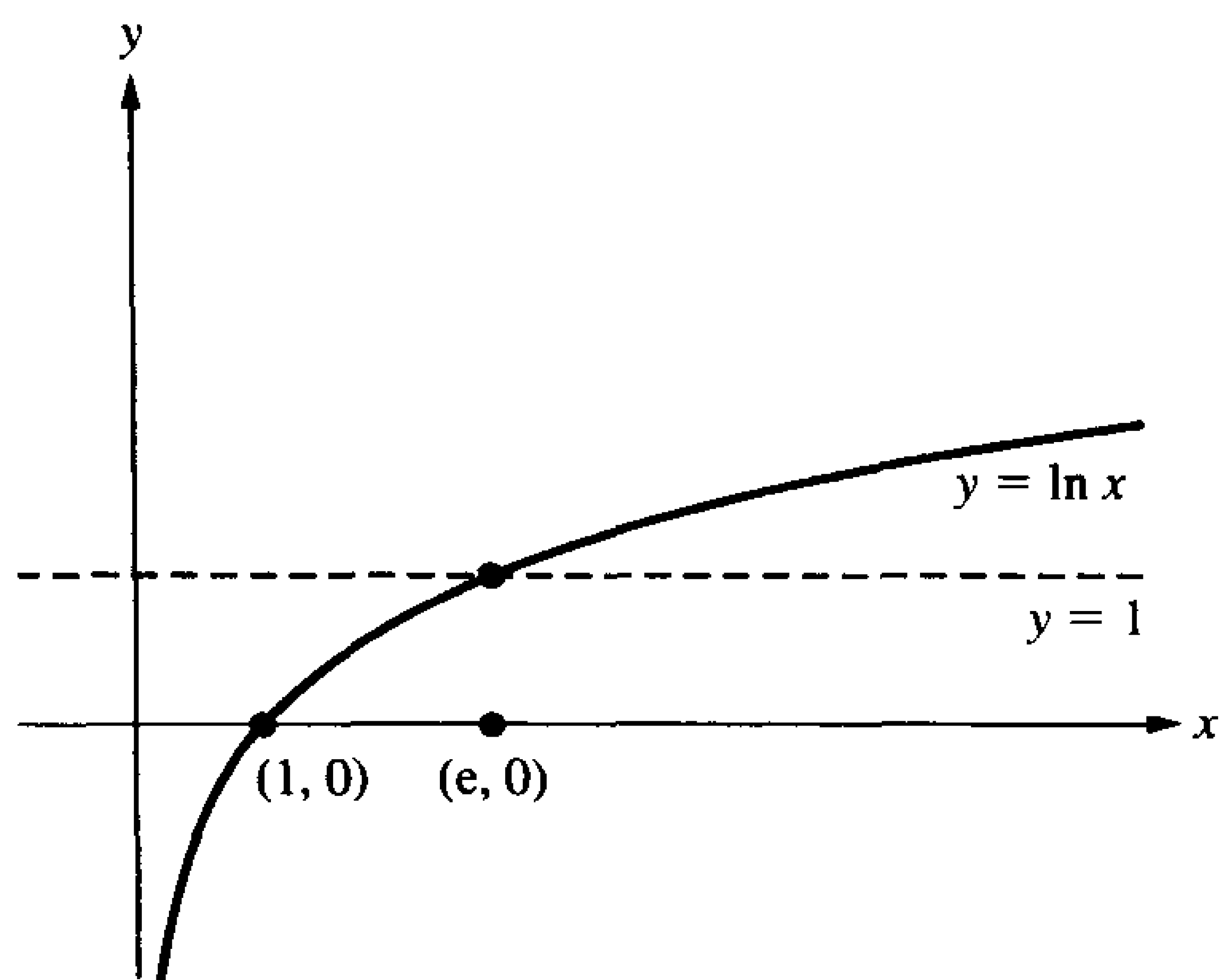


图 5.1　e 是唯一的数 x 使得 $\ln x = 1$

定义　使得 $\ln x = 1$ 的唯一正数 x 记为 e.

回忆如果 a 为正数，$x = m/n$ 是有理数，其中 m，n 为整数且 $n > 0$，则 a^x 定义为

$$a^x \equiv (a^m)^{1/n}. \tag{5.9}$$

直到现在，当 x 是无理数时，我们还没有对符号 a^x 下过定义. 例如，还没有定义符号 $3^{\sqrt{2}}$. 可是，自然对数及它的反函数允许我们定义正数的无理幂. 事实上，由定理 5.1 的结论(ii)，对有理数 x 及正数 a，

$$\ln a^x = x\ln a,$$

所以

$$g(\ln a^x) = g(x\ln a).$$

另一方面，因为 g 是自然对数的反函数，故

$$g(\ln a^x) = a^x.$$

这样，

$$a^x = g(x\ln a), \quad \text{对 } a > 0 \text{ 及 } x \text{ 是有理数.} \tag{5.10}$$

特别地，

121

$$e^x = g(x) \quad \text{对所有有理数 } x. \tag{5.11}$$

然而，因为式(5.10)的右边是对任意数 x(有理数或无理数)都有定义的，我们现在有了一个自然的方法去定义正数的无理数幂.

定义 对任意正数 a 以及任意数 x，定义

$$a^x \equiv g(x\ln a),$$

其中 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是自然对数的反函数.

式(5.10)表明当 x 是有理数时，上述的 a^x 的定义与先前所说的 a^x 的定义是一致的. 其次，当 $a=e$ 时，我们有

$$e^x = g(x), \quad \text{对所有 } x.$$

因为对所有 x，$g'(x)=g(x)$，用链式法则，若 I 是一开区间且函数 $h:I\to\mathbb{R}$ 是可微的，则对 I 中所有 x，

$$\frac{d}{dx}[g(h(x))] = g'(h(x))h'(x) = g(h(x))h'(x).$$

但是对所有 x 有 $g(h(x))=e^{h(x)}$，这样前述的微分公式可重写成

$$\frac{d}{dx}[e^{h(x)}] = e^{h(x)}h'(x). \tag{5.12}$$

现在我们有了两个新的可微函数类.

命题 5.2 令 $a>0$. 则

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x\ln a, \quad \text{对所有 } x. \tag{5.13}$$

证明 运用式(5.12)，对所有 $x\in\mathbb{R}$，

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[g(x\ln a)] = \frac{d}{dx}[e^{x\ln a}] = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$ ■

命题 5.3 设 r 是任意数. 则

$$\text{对所有 } x > 0, \quad \frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}. \tag{5.14}$$

证明 对 $x>0$，再次运用式(5.12)，因为 $x^r=g(r\ln x)=e^{r\ln x}$，我们有

122

$$\frac{d}{dx}[x^r] = \frac{d}{dx}[e^{r\ln x}] = [e^{r\ln x}]\frac{d}{dx}(r\ln x) = x^r\cdot\frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$ ■

指数函数的微分方程

定理 5.4 设 c 和 k 是任意实数. 则微分方程

$$\begin{cases} 对所有 x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = kF(x), \\ F(0) = c \end{cases} \tag{5.15}$$

恰有一解. 解由下列公式给出:

$$对所有 x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = ce^{kx}. \tag{5.16}$$

证明 由微分公式(5.12)可以看出，由(5.16)定义的函数给出(5.15)的一个解. 余下的是证明解的唯一性. 设函数 $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是(5.15)的解. 定义函数 h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$h(x) \equiv \frac{F(x)}{e^{kx}} - c \quad x \in \mathbb{R}.$$

利用导数的商法则，对所有 x，有

$$h'(x) = \frac{ke^{kx}F(x) - ke^{kx}F(x)}{(e^{kx})^2} = 0, \quad h(0) = F(0) - c = 0.$$

由恒等准则可得函数 h 是恒等于 0 的，这样，对所有 x，

$$F(x) = ce^{kx}.$$

■

所以微分方程(5.15)恰有一解.

习题

1. 设 $a>0$. 证明对任意数 x_1 及 x_2，

a. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$

b. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}$

2. 对 $a>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty} n[a^{1/n} - 1] = \ln a.$$

3. 设 $0<a\leqslant b$. 证明

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln\left[\frac{b}{a}\right] \leqslant \frac{b-a}{a}.$$

4. 设 $a>0$. 证明存在数 k 使得

$$对所有 x \in \mathbb{R}, a^x = e^{kx}.$$

123

5. 用中值定理证明：如果 $x\neq 0$，则 $e^x>1+x$. 然后证明下列方程恰有一解：

$$2e^x = (1+x)^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6. 证明在开区间$(1, e)$中存在数 c 使得

$$1 = \ln e - \ln 1 = \frac{1}{c}(e-1).$$

并由此得结论 $e>2$.

7. 用上题证明下列方程恰有一解：

$$xe^x = 2, \qquad 0 < x < 1.$$

8. 对固定数 a，下列方程有多少解？

$$x\ln x = a, \qquad x > 0.$$

9. 假定 $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是具有下列性质的可微函数：

$$对 \mathbb{R} 中所有 a 及 b, \quad h(a+b) = h(a)h(b),$$

且函数不恒等于 0.

a. 用导数的定义证明：

$$\text{对}\mathbb{R}\text{中所有}x,\quad h'(x)=h'(0)h(x).$$

b. 证明：如果 $k=h'(0)$，则对所有 $x\in\mathbb{R}$，$h(x)=e^{kx}$.

10. x 的双曲余弦(hyperbolic cosine)用 $\cosh x$ 表示，x 的双曲正弦(hyperbolic sine)用 $\sinh x$ 表示，定义如下：

$$\text{对所有}x\in\mathbb{R},\cosh x\equiv\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad\text{及}\quad\sinh x\equiv\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

给定数 a，α 及 β，求方程

$$\begin{cases}\text{对所有}x\in\mathbb{R},\quad f''(x)-a^2f(x)=0\\ f(0)=\alpha\quad\text{且}\quad f'(0)=\beta\end{cases}$$

具有如下形式的解：

$$\text{对}\mathbb{R}\text{中所有}x,\quad f(x)=c_1\cosh ax+c_2\sinh ax.$$

11. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(1+1/n)-\ln 1}{1/n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=1.$$

(提示：利用对数函数在 $x=1$ 处的导数).

12. 用习题11及指数函数的连续性，证明

124

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e.$$

5.3 三角函数

函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为以 $T>0$ 为周期(period)的周期函数，如果

$$\text{对所有的}x\in\mathbb{R},\quad f(x+T)=f(x).$$

到目前为止，除了常数函数之外，我们还没有遇到任何周期函数. 由于周期现象在自然界中出现(行星、摆，等等)，并且三角学的基本函数是周期函数，因而需要分析这样的函数.

用从单个微分方程推演对数函数及指数函数性质的同样方式，我们将以单个微分方程作为出发点，定义并分析正弦与余弦函数. 在本节，将研究具有如下性质的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

$$\text{对所有}x\in\mathbb{R},\quad f''(x)+f(x)=0.\tag{5.17}$$

引理 5.5 *假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是微分方程*

$$\begin{cases}\text{对所有}x\in\mathbb{R},\quad f''(x)+f(x)=0\\ f(0)=0\quad\text{且}\quad f'(0)=0\end{cases}\tag{5.18}$$

的解，则对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=0$.

证明 对所有的 $x\in\mathbb{R}$，定义 $g(x)\equiv[f(x)]^2+[f'(x)]^2$.

运用链式法则，对所有 x，

$$\begin{aligned}g'(x)&=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)\\&=2f'(x)[f(x)+f''(x)]\\&=0.\end{aligned}$$

此外，

$$g(0)=[f(0)]^2+[f'(0)]^2=0.$$

于是，根据恒等准则，函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 恒等于0. 但是

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant [f(x)]^2 \leqslant g(x),$$

所以对所有 $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=0$. ■ 125

余弦函数的微分方程

对固定的数 α 及 β，考虑微分方程

$$\begin{cases} \text{对所有的 } x \in \mathbb{R}, \quad f''(x)+f(x)=0 \\ f(0)=\alpha \quad \text{且} \quad f'(0)=\beta. \end{cases} \tag{5.19}$$

该方程至多只有一个解，这是因为，如果有两个相异的函数都是(5.19)的解的话，则它们的差将是(5.18)的不恒等于0的解，而这是与引理5.5相矛盾的.

暂时假定在 $\alpha=1$ 及 $\beta=0$ 情形下，(5.19)存在一解．在第9章中将证明存在这样的一个函数，用 C：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 表示这个解．这样，根据定义，

$$\begin{cases} \text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad C''(x)+C(x)=0 \\ C(0)=1 \quad \text{且} \quad C'(0)=0. \end{cases} \tag{5.20}$$

正弦函数的微分方程

我们定义一个伴随函数 S：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad S(x)=-C'(x).$$

对(5.20)的第一行微分可得

$$C'''(x)+C'(x)=0,$$

因此，由于

$$C'''(x)=-S''(x) \text{ 及 } C'(x)=-S(x),$$

我们有

$$S''(x)+S(x)=0 \quad x \in \mathbb{R}$$

另一方面，

$$C'(0)=0 \text{ 因而 } S(0)=0.$$

此外，

$$S'(0)=-C''(0)=C(0)=1 \text{ 因而 } S'(0)=1.$$

因此函数 S：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是下述微分方程的唯一解：

$$\begin{cases} \text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad S''(x)+S(x)=0 \\ S(0)=0 \quad \text{且} \quad S'(0)=1. \end{cases} \tag{5.21}$$

为便于以后参考，记住下述公式是有用的：

$$\text{对} \mathbb{R} \text{ 中所有 } x, \quad S'(x)=C(x) \quad \text{以及} \quad C'(x)=-S(x). \tag{5.22}$$

126

三个三角函数恒等式

定理 5.6 对所有的 a 及 b，

$$[S(a)]^2+[C(a)]^2=1 \quad (\text{毕达哥拉斯恒等式})$$

$$S(a+b)=S(a)C(b)+C(a)S(b) \quad (\text{正弦加法公式})$$

$$C(a+b)=C(a)C(b)-S(a)S(b) \quad (\text{余弦加法公式})$$

证明 为证毕达哥拉斯恒等式，对所有 x，定义 $g(x)\equiv[S(x)]^2+[C(x)]^2-1$. 注意到

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\ g'(x)=2S(x)S'(x)+2C(x)C'(x)=2C(x)[S(x)+S''(x)]=0.$$

而且，由于 $C(0)=1$ 及 $S(0)=0$，因而 $g(0)=0$. 于是，根据恒等准则，函数 g 恒等于0. 这样，毕达哥拉斯恒等式成立.

为证明正弦加法公式，固定实数 b，并定义

$$f(x)\equiv S(x+b)-[S(x)C(b)+C(x)S(b)],\text{对所有 } x.$$

则 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$. 此外，对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f''(x)+f(x)=0$，这是由于

$$S''(x+b)+S(x+b)=0,\quad S''(x)+S(x)=0\quad \text{以及}\quad C''(x)+C(x)=0.$$

这样，函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是(5.18)的解，按照引理5.5，对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=0$. 这就证明了正弦的加法公式.

最后，对上述函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 求微分，有

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad 0=f'(x)=C(x+b)-[C(x)C(b)-S(x)S(b)],$$

于是，余弦加法公式得证. ■

毕达哥拉斯恒等式的一个推论如下：

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad |S(x)|\leqslant 1\quad \text{及}\quad |C(x)|\leqslant 1. \tag{5.23}$$

正弦函数与余弦函数的周期性

下面我们将证明函数 $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期函数. 思路是证明存在最小正数 p，在该点处 $C(p)=0$，然后用正弦与余弦的加法公式证明这两个函数具有周期 $T=4p$.

127

定理 5.7 *存在一个最小正数 x 满足 $C(x)=0$.*

证明 对任一连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(0)>0$，并且存在一个任意正数 x 使得 $f(x)=0$. 则存在一最小正数 x 使得 $f(x)=0$(习题16). 这样只需证明存在某个正数 x 使得 $f(x)=0$ 就足够了.

从中值定理知，可选一数 z 严格介于0与2之间，使得 $S(2)-S(0)=2C(z)$. 因为 $S(0)=0$ 及 $|S(2)|\leqslant 1$，我们看到 $|2C(z)|\leqslant 1$. 这样，由余弦加法公式及毕达哥拉斯恒等式得

$$C(2z)=[C(z)]^2-[S(z)]^2=2[C(z)]^2-1\leqslant 0.$$

于是，$C(0)>0$ 及 $C(2z)\leqslant 0$. 因而由介值定理知，存在介于0与 $2z$ 间的一个数 x 使得 $C(x)=0$. ■

定理 5.8 *令 p 是最小正数使得 $C(x)=0$. 则函数 $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及 $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有周期 $4p$.*

证明 因为当 $0<x<p$ 时，$S'(x)=C(x)>0$，因而函数 $S:[0,p]\to\mathbb{R}$ 是严格递增的. 于是，由 $S(0)=0$ 知 $S(p)>0$. 但 $C(p)=0$，因此由毕达哥拉斯恒等式推出 $S(p)=1$. 因而 $C(p)=0$ 且 $S(p)=1$，所以运用正弦和余弦加法公式，

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad S(x+p)=C(x)\quad \text{且}\quad C(x+p)=-S(x). \tag{5.24}$$

在(5.24)中用 $x+p$ 替换 x，可得

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad S(x+2p)=-S(x)\quad \text{以及}\quad C(x+2p)=-C(x), \tag{5.25}$$

接下来再在(5.25)中用 $x+2p$ 替换 x，我们有

$$\text{对所有 } x,\quad S(x+4p)=S(x)\quad \text{及}\quad C(x+4p)=C(x);$$

即函数 $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 及 $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有周期 $4p$. ■

正如我们提到过的，在此之前，所见到的任何函数都不是周期函数，当然常数函数除外.

定义数 π 为 $2p$，其中 p 是满足 $C(p)=0$ 的最小正数. 于是 $S:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $C:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有周期 2π. 当然，需要证明 π 的这一定义是与通常的圆面积中 π 的定义是一致的. 特别地，必须证明微分方程(5.10)的解的第一个正的零点出现在 p，其中 p 是单位半径的圆的面积的一半. 为此，首先需要讨论积分，所以我们把使用符号 π 的正当理由推迟到第7章. 然而，从现在起对所有 $x \in \mathbb{R}$，用 $\sin x$ 表示 $S(x)$ 并用 $\cos x$ 表示 $C(x)$. 函数 $S:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为正弦(sine)函数，函数 $C:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为余弦(cosine)函数. 128

二阶微分方程的解

余弦函数定义为微分方程(5.20)的唯一解. 事实上，余弦与正弦函数在一般微分方程中起着至关重要的作用. 下面即是一个示例.

定理 5.9 设 α 与 β 是任意数. 则微分方程

$$\begin{cases} \text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) = \alpha \quad \text{且} \quad f'(0) = \beta \end{cases} \tag{5.26}$$

恰有一解，该解定义如下：

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x. \tag{5.27}$$

证明 微分方程(5.26)至多只能有一解，这是因为，如果它有两个相异的解，则两者之差就是微分方程(5.18)的不恒等于零的解，而这是与引理5.5相矛盾的. 由(5.20)及(5.21)可得式(5.27)定义了微分方程(5.26)的一个解. ■

正切函数

我们将以正切函数的讨论结束本节. 从关于余弦的两个关注点开始. 首先，从$\frac{\pi}{2}$的定义来看，(5.25)的第二个恒等式可以改写成

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+\pi) = -\cos x.$$

其次，余弦函数是偶函数，即对$\mathbb{R}$中所有 x，$\cos(-x) = \cos x$. 这可以从余弦函数及由 $f(x) = \cos(-x)$ 定义的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是微分方程(5.20)的解得出，而该微分方程有唯一解. 由定义知，$\cos\pi/2 = 0$，若 $0 \leq x < \pi/2$，则 $\cos x > 0$. 因此当 $-\pi/2 < x < \pi/2$ 时有 $\cos x > 0$ 及

$$\cos x = 0 \quad \text{当且仅当 } x = \pi/2 + n\pi, \text{其中 } n \text{ 为整数}.$$

定义 $D = \{x \mid x \neq \pi/2 + n\pi,\ n \text{ 是整数}\}$. 则以 D 为定义域的正切(tangent)函数由下式定义：

$$\text{对所有 } x \in D, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

129

于是，正切函数由于是可微函数的商因而是可微的. 由导数的商公式连同(5.22)式，得

$$\text{如果 } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{其中 } n \text{ 是整数}, \quad \text{则} \frac{d}{dx}[\tan(x)] = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{5.28}$$

定理 5.10 函数 $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ 是严格递增的奇函数并且以整个$\mathbb{R}$为它的象.

证明 由于

$$\text{对}\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{d}{dx}[\tan x] = \cos^{-2}x > 0,$$

函数 $\tan: (-\pi/2, \pi/2)$是严格递增的. 我们把正切函数是奇函数(即 $\tan(-x) = -\tan x$)作为习题留给读者.

剩下的是证明在区间$(-\pi/2, \pi/2)$上其值域为整个$\mathbb{R}$. 因为正切函数是奇函数且 $\tan 0 = 0$, 所以只需证明对给定的$c>0$, 方程

$$\tan x = c, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \tag{5.29}$$

有解. 按照介值定理, 由于 $\tan 0 = 0$, 为证方程(5.29)有解, 只需在区间$(0, \pi/2)$中求得一点 x 使得 $\tan x > c$ 就行了. 而由于正弦函数在区间$[0, \pi/2]$上递增, 所以

$$\text{如果}\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \quad \text{则}\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \geqslant \frac{\sin\pi/4}{\cos x}.$$

此外, 由于余弦函数在区间$(0, \pi/2)$内连续并且为正, $\cos\pi/2 = 0$, 所以可在区间$(\pi/4, \pi/2)$内选择一点 x 使得 $\cos x < (\sin\pi/4)/c$. 在该点, $\tan x > c$. ■

习题

1. 求用 $\sin a$ 及 $\cos a$ 表示 $\sin 3a$ 的公式. 用此公式计算 $\sin\pi/3$ 及 $\cos\pi/3$, 再计算 $\sin\pi/6$ 及 $\cos\pi/4$.
2. a. 用微分方程(5.20)的解的唯一性证明余弦函数是偶函数, 即对$\mathbb{R}$中所有 x, 有
$$\cos(-x) = \cos x.$$
   b. 用微分方程(5.21)的解的唯一性证明正弦函数是奇函数, 即对$\mathbb{R}$中所有 x, 有
$$\sin(-x) = -\sin x.$$
   c. 用上述结果证明正切函数是奇函数.

[130]

3. 导出 $\cos(a-b)$与 $\sin(a-b)$用 $\sin a$、$\sin b$、$\cos a$ 及 $\cos b$ 表示的公式.
4. 对数 a 及 b, 其中 $|a| < 1$, 证明下列方程(称为开普勒(Kepler)方程)恰有一解:
$$x = a\sin x + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$
5. 证明下列方程恰有一解:
$$e^{2x} + \cos x + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. 对数 a 及 b, 定义
$$\text{对所有}\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x + ax + b.$$
   a 取什么值函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是递增的?
7. 求集合$\{\sin x + \cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$的极大值与极小值点.
8. 用导数的定义证明
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{以及} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$
9. 设 k 是固定数. 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是微分方程
$$\begin{cases}\text{对所有}\ x \in \mathbb{R}. & f''(x) + k^2 f(x) = 0\\ f(0) = 0 \quad \text{及} & f'(0) = 0\end{cases}$$
   的解, 证明对所有 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
10. 设 a, b 及 k 是固定数. 用上题证明下面的微分方程至多有一解:

$$\begin{cases}\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, & f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ f(0) = a & \text{及 } f'(0) = b.\end{cases}$$

然后验证如果 $k \neq 0$，方程的解由下式定义：

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos kx + b\sin kx.$$

11. 设 a 与 b 是满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的数. 证明在区间 $[0, 2\pi)$ 内，存在一个数 θ 使得

$$\begin{cases}\cos\theta = a \\ \sin\theta = b.\end{cases}$$

12. 对正数 M, T 以及区间 $[0, 2\pi)$ 内的数 θ_0，定义

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = M\sin(Tx + \theta_0).$$

画出函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的图形.

13. 设 c_1 与 c_2 是满足 $c_1^2 + c_2^2 = 1$ 的数. 定义

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

131

用习题 11 及余弦函数的加法公式证明存在数 θ_0 使得

$$\text{对所有 } x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \cos(x + \theta_0).$$

14. 定义

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + x & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0.\end{cases}$$

证明函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可微的且 $f'(0) = 1$. 再证明不存在 0 的这样一个邻域 I，使得函数 $f:I \to \mathbb{R}$ 是递增的.

15. 在上题中所定义的函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有连续的导数吗？为你的解答说明理由.

16. 假设函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的，$g(0) > 0$，且在某正数 x_0 处，$g(x_0) = 0$. 证明存在满足 $g(x) = 0$ 的最小正数 p.（提示：定义 $p = \inf\{x \mid x > 0, g(x) = 0\}$ 并证明 $p > 0$ 及 $g(p) = 0$.）

5.4 反三角函数

正弦函数、余弦函数及正切函数都是周期函数，所以它们都没有反函数. 但如果将这些函数限制在适当的区间上，则这些限制函数便有反函数. 为研究这些限制函数的反函数，回忆一个在推论 4.12 中建立的可微函数的反函数的公式是有用的.

命题 5.11 令 I 是一个开区间且假设 $f:I \to \mathbb{R}$ 是严格单调且可微的，并且对 I 中所有 x 有 $f'(x) \neq 0$. 则 f 有一个可微的反函数，其定义域是一个开区间 J，如果用 $g:J \to \mathbb{R}$ 表示这个反函数，则当 x 属于 J 时，其导数由下面公式给出：

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{5.30}$$

反正弦函数

由于 $\sin: [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ 是严格递增的连续函数，且 $\sin(-\pi/2) = -1$ 及 $\sin\pi/2 = 1$，由介值定理知对 $[-1, 1]$ 中每个数 x，方程

$$\sin z = x, \quad z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

存在唯一解，用 $\arcsin x$ 表示这个解，这样就定义了反正弦(arcsine)函数，用 $\arcsin: [-1, 1] \to$

$\mathbb{R}$ 表示 sin：$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ 的反函数.

由于

132

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin x] = \cos x \neq 0 \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

由反函数公式(5.30)可得反正弦函数是可微的，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arcsin x] = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \quad -1 < x < 1.$$

然而，$\arcsin x$ 是在$(-\pi/2, \pi/2)$中取值，所以 $\cos(\arcsin x) > 0$. 因此，运用毕达哥拉斯恒等式，有

$$\cos(\arcsin x) = [1 - \sin^2(\arcsin x)]^{1/2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

因此，

$$\text{如果 } -1 < x < 1, \quad \text{有} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{5.31}$$

反余弦函数

现在转到反余弦(arccosine)函数. 事实上，由于 cos：$[0, \pi]\to\mathbb{R}$ 是严格递减的连续函数，且 $\cos 0 = 1$ 及 $\cos\pi = -1$，由介值定理知对$[-1, 1]$中每个 x，方程

$$\cos z = x, \quad z \in [0,\pi] \tag{5.32}$$

存在唯一解. 用 $\arccos x$ 来表示这个解，因此定义了函数 arccos：$[-1, 1]\to\mathbb{R}$，它是 cos：$[0, \pi]\to\mathbb{R}$ 的反函数. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cos x] = -\sin x \neq 0 \quad 0 < x < \pi,$$

由反函数公式(5.30)可推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arccos x] = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \quad -1 < x < 1.$$

然而当 x 在$(-1, 1)$内时，$\arccos x$ 属于区间$(0, \pi)$，所以 $\sin(\arccos x) > 0$. 因此，运用毕达哥拉斯恒等式可知

$$\sin(\arccos x) = [1 - \cos^2(\arccos x)]^{1/2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

于是，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad -1 < x < 1. \tag{5.33}$$

反正切函数

最后考虑反正切(arctangent)函数. 按照定理 5.10，函数 tan：$(-\pi/2, \pi/2)\to\mathbb{R}$ 是严格递增的函数，其象是整个$\mathbb{R}$. 由此可得，对每个数 x，方程

133

$$\tan z = x, \quad z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

有唯一解. 用 $\arctan x$ 表示这个解，这就定义了 $\tan$：$(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ 的反函数 $\arctan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

由公式(5.28)及反函数公式可推出

$$对所有\ x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}[\arctan x] = \cos^2(\arctan x),$$

然而，由毕达哥拉斯恒等式，

$$\tan^2 z + 1 = \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} + 1 = \frac{1}{\cos^2 z},$$

因此，设 $z = \arctan x$,

$$x^2 + 1 = \tan^2(\arctan x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}.$$

这样，

$$对所有\ x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{5.34}$$

习题

1. 证明：如果 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.
2. 求微分方程

$$\begin{cases} F'(x) = x/\sqrt{1 - x^4}, & -1 < x < 1 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

的唯一解.
3. 假设 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期为 T 的周期函数. 在什么条件下和 $f + g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 也是周期函数？在什么条件下复合函数 $f \circ g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期函数？
4. 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 定义 $h(x) = 4\sin(x/2)$. 通过限制函数 $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 到一个适当的区间 $[a, b]$ 上使得 h: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是严格递增的且 $h([a, b]) = [-4, 4]$，求 h: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 的反函数并计算它在区间 $(-4, 4)$ 内的导数.
5. 假定

$$对所有\ x \in \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx + c > 0.$$

求微分方程

$$对所有\ x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{p(x)}$$

的解. (提示：配平方.)
6. 证明

$$如果\ u < v, \quad \arctan v - \arctan u < v - u.$$

134

第6章　积分法：两个基本定理

6.1　达布和；上积分与下积分

对某类称为可积的(integrable)函数f：$[a, b]\to\mathbb{R}$，我们定义一个称为f在$[a, b]$上的积分(integral)的数，并记为$\int_a^b f$. 本章有四个主要目标：

i. 定义可积函数及积分的概念，并建立可积性的准则，称之为阿基米德-黎曼定理.

ii. 证明连续函数f：$[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的.

iii. 证明第一基本定理(对导数求积分)，它表明对一个连续函数F：$[a, b]\to\mathbb{R}$，若它在开区间(a, b)上有连续有界导数，则下述积分公式成立：

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

iv. 证明第二基本定理(对积分求导数)，它表明对一个连续函数f：$[a, b]\to\mathbb{R}$，当x在开区间(a, b)内时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] = f(x).$$

积分的意义是依赖于它所处的上下文. 例如，下述积分解释在几何上是合适的：

若可积函数f：$[a, b]\to\mathbb{R}$具有如下性质：对所有$x\in[a, b]$，$f(x)\geqslant 0$，则积分$\int_a^b f$是f:$[a,b]\to\mathbb{R}$之下、区间$[a,b]$之上的图形的面积.

135

f：$[a, b]\to\mathbb{R}$的积分有许多其他的物理解释，[⊖]但利用它作为面积的几何解释我们可以给积分下定义. 如图6.1所示.

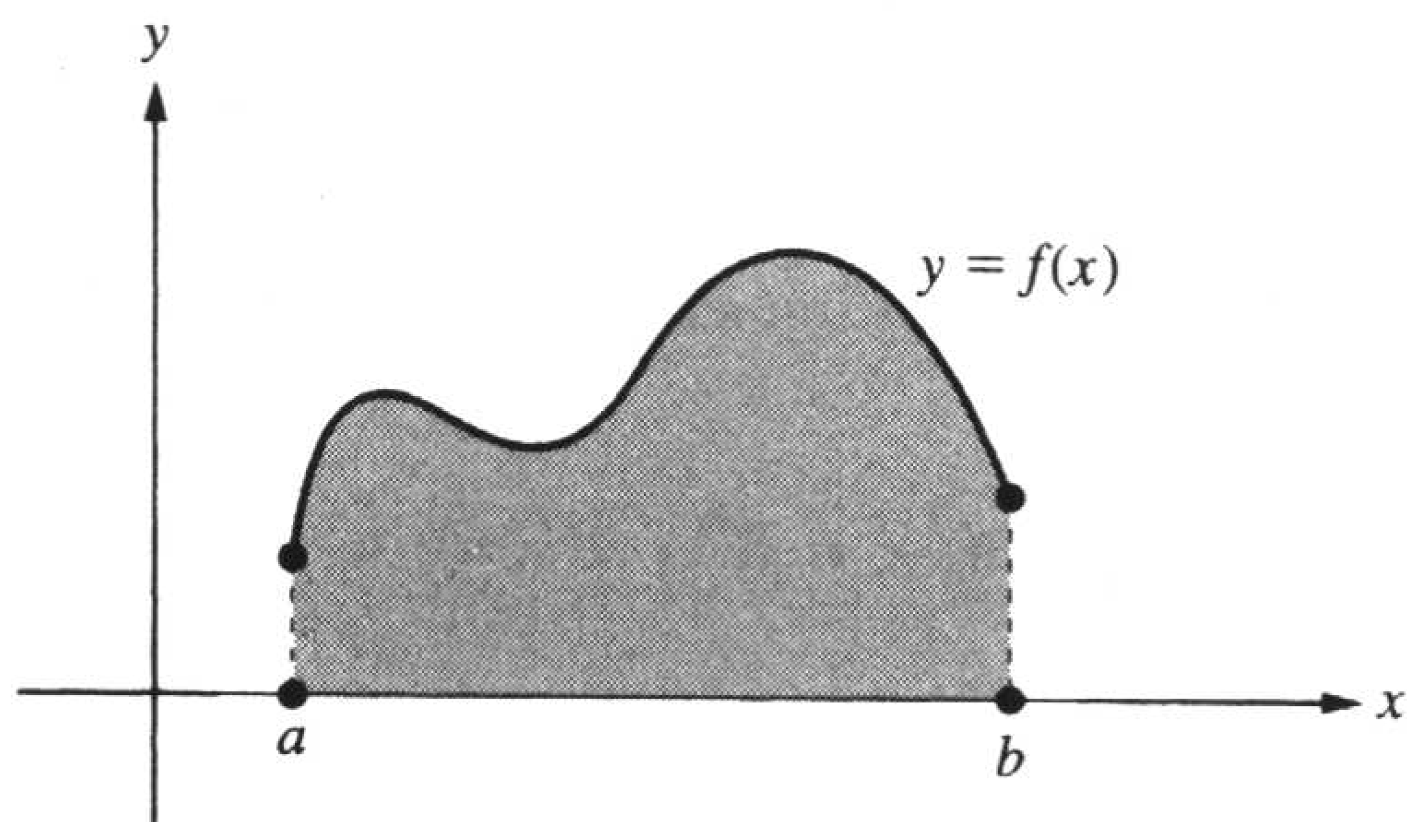


图6.1　阴影区域的面积等于$\int_a^b f$

⊖ 由R. Courant与Fritz. John(Springer-Verlag，1989)所著的《Introduction to Calculus and Analysis》一书介绍了在物理学与工程中所提出的积分的许多有趣的应用. 函数的积分定义为图形下的面积这一思路是有用的. 但这仅是直观的动机，因为我们还没有面积的精确定义. 这与函数的导数定义中把它理解为切线的斜率相类似，尽管在此之前我们还没有切线的精确定义.

上达布和与下达布和

令 a 与 b 是实数，$a<b$. 如果 n 是自然数且

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$ 称为区间 $[a, b]$ 的一个划分(partition). 对每个下标 $i\geqslant 0$，称 x_i 是 P 的划分点，若 $i\geqslant 1$，称 $[x_{i-1}, x_i]$ 是 P 的一个划分区间. $n=1$ 即是 $[a, b]$ 的原始划分，$x_0=a$，$x_1=b$. 这时 P 恰有两个划分点和一个划分区间.

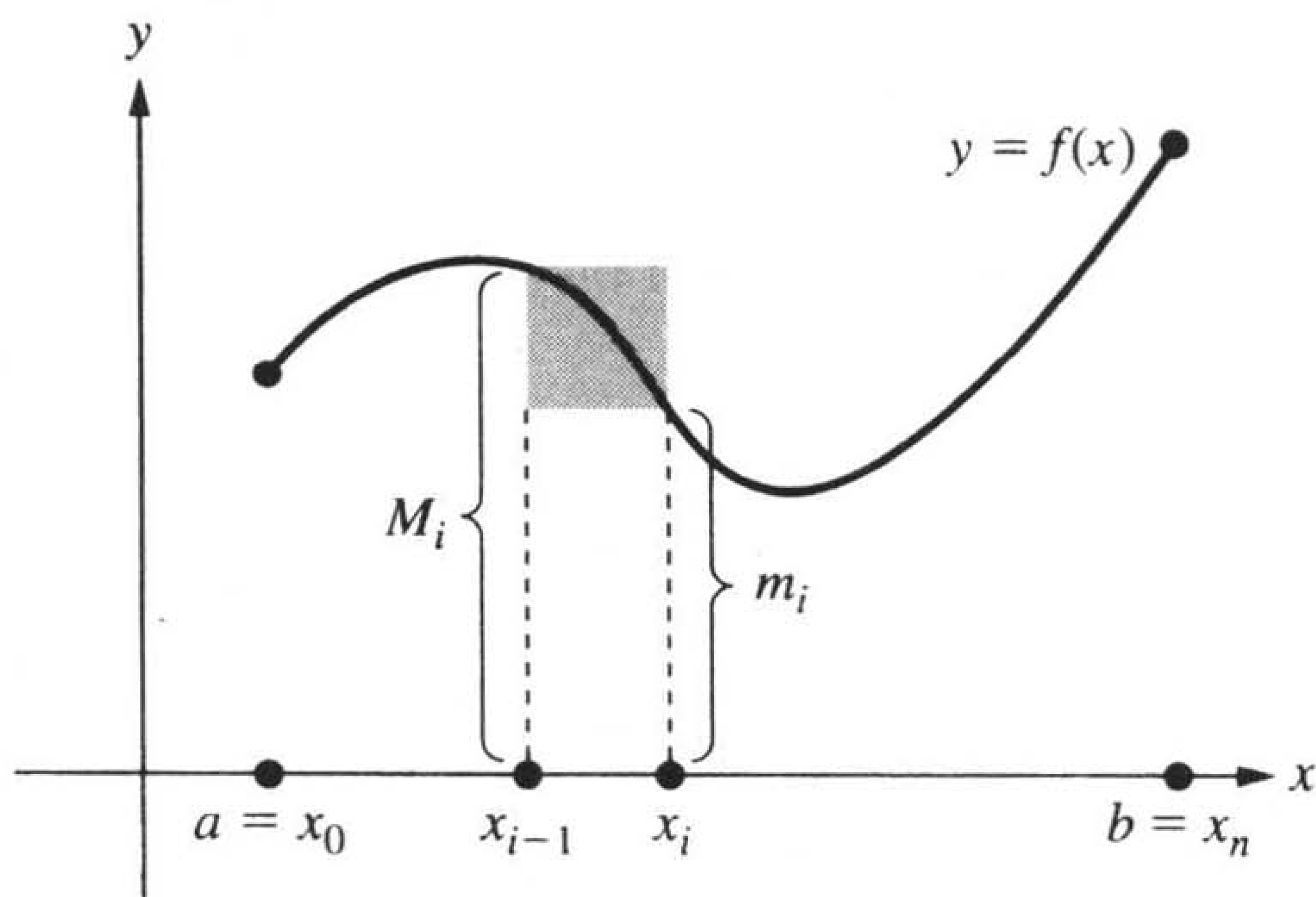


图 6.2 在划分区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的近似面积

假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 有界且 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$ 是定义域 $[a, b]$ 的一个划分. 对每个下标 $i\geqslant 1$，定义

$$\begin{cases} m_i \equiv \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{cases} \tag{6.1}$$

136

如图 6.2 所示. 我们定义

$$\begin{cases} L(f,P) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ U(f,P) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \end{cases} \tag{6.2}$$

称 $U(f, P)$ 为函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 基于划分 P 的上达布和，称 $L(f, P)$ 为函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 基于划分 P 的下达布和. 如图 6.3 所示.

从 m_i 与 M_i 的定义直接可得，对每个下标 $i\geqslant 1$，有

$$m_i \leqslant M_i,$$

因此对 $[a, b]$ 的任一划分 P，

$$L(f,P) \leqslant U(f,P). \tag{6.3}$$

关于表示为面积的积分的直观概念认为，可积函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 应具有如下性质：对 $[a, b]$ 的任一划分 P 有

$$L(f,P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f,P). \tag{6.4}$$

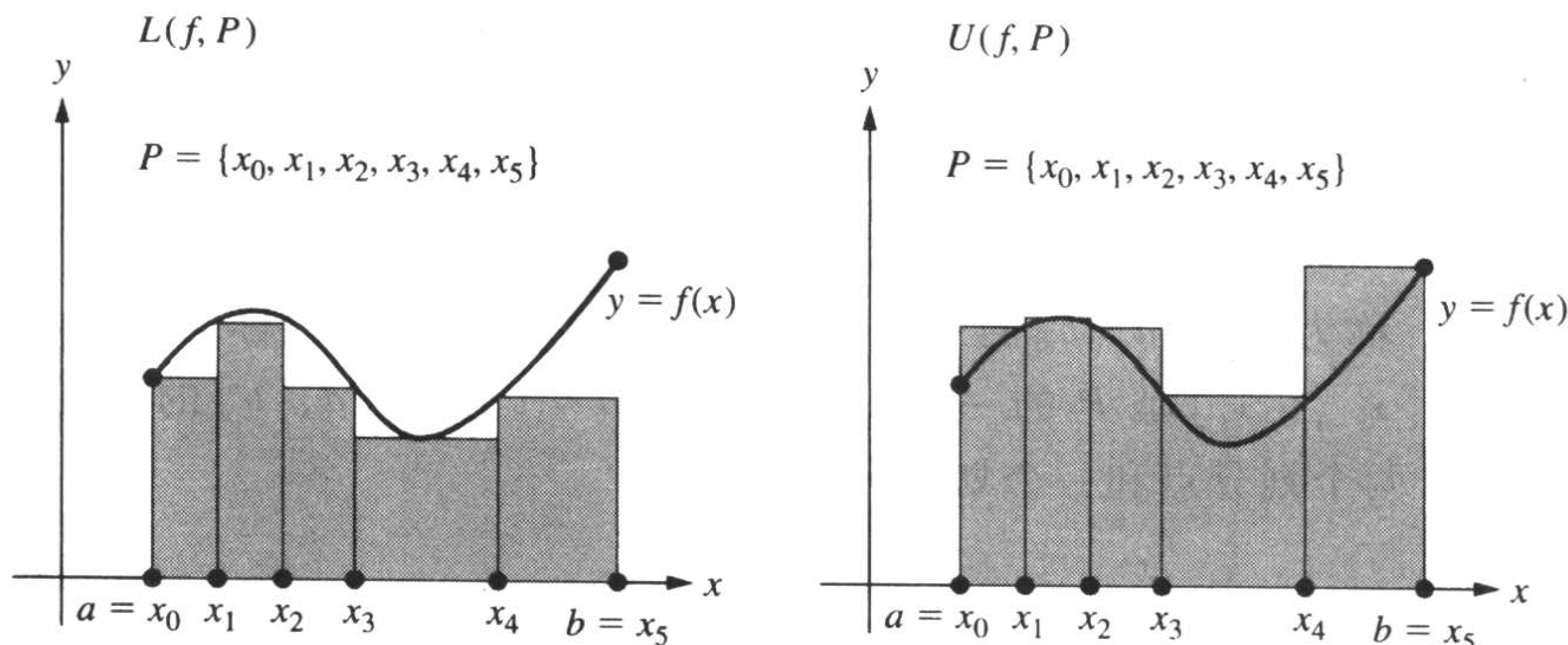


图 6.3 上达布和与下达布和

为了确定积分的值，我们要证明对定义在有界闭区间上的有界函数，任一下达布和小于或等于任一上达布和，甚至这些和是基于不同的划分. 我们把证明分成几部分.

我们常会用到这样的事实：若 $P=\{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$ 是区间 $[a,\ b]$ 的一个划分，则 P 中划分区间长度和就是区间 $[a,\ b]$ 的长，即

$$b-a=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}). \tag{6.5}$$

引理 6.1 假设函数 $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 有界且数 m 和 M 具有性质

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[a,b].$$

若 P 是定义域 $[a,\ b]$ 的一个划分，则

$$m(b-a)\leqslant L(f,P),\quad U(f,P)\leqslant M(b-a).$$

证明 令 $P=\{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$，对每个下标 $i\geqslant 1$，数 m 是集 $\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},\ x_i]\}$ 的下界，所以由下确界的定义，

$$m\leqslant m_i.$$

这样由长度公式(6.5)，

$$m(b-a)=m\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}m(x_i-x_{i-1})$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=L(f,P).$$

137 ~ 138

因此，$m(b-a)\leqslant L(f,\ P)$. 类似地，可证明 $U(f,\ P)\leqslant M(b-a)$. ■

给定区间 $[a,\ b]$ 的划分 P，$[a,\ b]$ 的另一个划分 P^* 称为 P 的一个加细(refinement)，如果 P 的每个划分点也是 P^* 的划分点. 若 $P=\{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$ 而 P^* 是 P 的加细，则对每个下标 $i\geqslant 1$，P^* 的划分点属于划分区间 $[x_{i-1},\ x_i]$，它定义了区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 的划分 P_i. 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}L(f,P_i)=L(f,P^*),\quad \sum_{i=1}^{n}U(f,P_i)=U(f,P^*). \tag{6.6}$$

引理 6.2(加细引理) 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界的，设P是其定义域$[a, b]$的划分. 如果P^*是P的加细，则

$$L(f,P) \leqslant L(f,P^*), \quad U(f,P^*) \leqslant U(f,P).$$

证明 设$P=\{x_0, \cdots, x_n\}$. 对每个下标i，设m_i如(6.1)式所定义并设P_i是由P^*所引起的$[x_{i-1}, x_i]$的划分. 将引理6.1应用于函数f: $[x_{i-1}, x_i]\to\mathbb{R}$，得到

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant L(f,P_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

求上述n个不等式的和并利用公式(6.6)得到

$$L(f,P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} L(f,P_i) = L(f,P^*).$$

类似地，可论证$U(f, P^*)\leqslant U(f, P)$. ■

给定区间$[a, b]$的两个划分P_1与P_2，由取P_1的划分点与P_2的划分点的并所组成的划分P^*是P_1与P_2的共同加细(common refinement)，这是因为P^*既是P_1的加细也是P_2的加细.

引理 6.3 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界的. 则对定义域$[a, b]$的任意两个划分P_1与P_2，

$$L(f,P_1) \leqslant U(f,P_2). \tag{6.7}$$

证明 设P^*是P_1与P_2的共同加细. 由加细引理可得

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P^*), \quad U(f,P^*) \leqslant U(f,P_2).$$

■ 139

另一方面，由不等式(6.3)，

$$L(f,P^*) \leqslant U(f,P^*).$$

这样，

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P^*) \leqslant U(f,P^*) \leqslant U(f,P_2).$$

上积分与下积分

定义 假设f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界的. 则定义f在$[a, b]$上的下积分$\left(\text{记为} \underline{\int_a^b} f\right)$为

$$\underline{\int_a^b} f \equiv \sup\{L(f,P) \mid P \text{ 是区间}[a,b] \text{ 的一个划分}\}. \tag{6.8}$$

定义f在$[a, b]$上的上积分$\left(\text{记为} \overline{\int_a^b} f\right)$为

$$\overline{\int_a^b} f \equiv \inf\{U(f,P) \mid P \text{ 是区间}[a,b] \text{ 的一个划分}\}. \tag{6.9}$$

引理 6.4 对有界函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$，

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f. \tag{6.10}$$

证明 令P是$[a, b]$的一个划分. 由引理6.3可知$U(f, P)$是f的所有下达布和这一集合的上界. 因此由上确界的定义得

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant U(f,P).$$

但这一不等式断言$\underline{\int_a^b} f$是f的上达布和这一集合的下界. 这样，由下确界的定义得

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

■

例 6.5　令函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$有常值c. 我们断定这个函数的上积分与下积分都等于$c(b-a)$. 事实上，这由定义可立刻得到. 令$P=\{x_0, \cdots, x_n\}$是$[a, b]$的一个划分. 对每一个下标$i\geqslant 1$,若m_i, M_i是按(6.1)所定义的，则$m_i=c$及$M_i=c$. 由长度和公式(6.5)得

$$c(b-a)=c\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\Big]=\sum_{i=1}^{n}c(x_i-x_{i-1})=L(f,P)=U(f,P).$$

这样，下达布和集合仅由单个数$c(b-a)$组成，同样上达布和集合也如此. 由下积分及上积分定义得

140

$$\underline{\int_a^b} f=c(b-a)\quad 及\quad \overline{\int_a^b} f=c(b-a).$$ ■

例 6.6　考虑由下式定义的狄利克雷(Dirichlet)函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$:

$$f(x)\equiv\begin{cases}0 & 当\ x\ 在[0,1]内为有理数\\ 1 & 当\ x\ 在[0,1]内为无理数.\end{cases}$$

令$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$是定义域$[0, 1]$的一个划分. 由于有理数及无理数各自在$\mathbb{R}$中稠密，这就得出对每个下标$i\geqslant 1$，若$m_i$, M_i是依照(6.1)加以定义的，则$m_i=0$及$M_i=1$. 这样，下达布和集合仅由0组成. 因此由上确界的定义，

$$\underline{\int_a^b} f=0.$$

另一方面，上达布和集合仅由1组成，因此由下确界的定义，

$$\overline{\int_a^b} f=1.$$ ■

习题

1. 对于区间$[0, 1]$的划分$P=\{0, 1/4, 1/2, 1\}$，对以下三个函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$计算$L(f, P)$及$U(f, P)$.
   a. $f(x)=x$, 当x在$[0, 1]$中.
   b. $f(x)=10$, 当x在$[0, 1]$中.
   c. $f(x)=-x^2$, 当x在$[0, 1]$中.
2. 对区间$[a, b]$及一正数δ，用$\mathbb{R}$的阿基米德性质证明存在$[a, b]$的一个划分$P=\{x_0, \cdots, x_n\}$，使得P的任一划分区间$[x_{i-1}, x_i]$的长小于δ.
3. 假设有界函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$具有如下性质：对$[a, b]$内的每个有理数x, $f(x)=0$. 证明
$$\underline{\int_a^b} f\leqslant 0\leqslant \overline{\int_a^b} f.$$
4. 假设有界函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$具有如下性质：对所有$x\in[a, b]$,
$$f(x)\geqslant 0.$$
   证明$\underline{\int_a^b} f\geqslant 0$.
5. 假设两个有界函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$及g: $[a, b]\to\mathbb{R}$具有如下性质：对$[a, b]$中所有x,
$$g(x)\leqslant f(x).$$
   a. 对$[a, b]$任一划分P，证明$L(g, P)\leqslant L(f, P)$.

141

   b. 用(a)证明$\underline{\int_a^b} g\leqslant \underline{\int_a^b} f$.
6. 假设f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界函数且存在$[a, b]$的一个划分P使得$L(f, P)=U(f, P)$，证明f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是常数.

7. 定义

$$f(x) \equiv \begin{cases} x & \text{当点 } x \text{ 在}[0,1]\text{ 内且为有理数} \\ 0 & \text{当点 } x \text{ 在}[0,1]\text{ 内且为无理数}. \end{cases}$$

证明 $\underline{\int_a^b} f = 0$ 及 $\overline{\int_a^b} f \geqslant 1/2$.

6.2 阿基米德-黎曼定理

定义 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 有界. 我们称 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的或 f 在 $[a, b]$ 上是可积的，倘若

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

当上式成立时，函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 的积分$\left(\text{记为 } \int_a^b f\right)$定义为

$$\int_a^b f \equiv \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

我们在例 6.5 已经证明函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 为常值 c 且是可积的，它的积分等于 $c(b-a)$. 正如前面已提到过的，一个正函数的积分可以直观地解释为相应图形的面积. 我们也看到例 6.6 中狄利克雷函数是不可积的. 狄利克雷函数不可积并不令人诧异，这是因为没有什么明显的方法把这一函数的图形下的区域赋予面积[⊖].

为了证明函数的可积性的一般准则，我们建立下述关于上、下达布和及上、下积分的有用的不等式.

引理 6.7 对有界函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 及 $[a, b]$ 的一个划分 P，

$$L(f,P) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f,P). \tag{6.11}$$

142

作为推论，我们还有如下三个不等式：

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant U(f,P) - L(f,P), \tag{6.12}$$

$$0 \leqslant U(f,P) - \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f,P) - L(f,P), \tag{6.13}$$

$$0 \leqslant \underline{\int_a^b} f - L(f,P) \leqslant U(f,P) - L(f,P). \tag{6.14}$$

证明 因为下积分是下达布和集合的一个上界，而上积分是上达布和集合的一个下界，故有

$$L(f,P) \leqslant \underline{\int_a^b} f \quad \text{及} \quad \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f,P).$$

但是依照引理 6.4，

⊖ 这里定义的积分通常称为黎曼积分，以区别其他形式的积分. 还有一个勒贝格(Lebesgue)积分，它与黎曼积分定义相类似，不同之处是把区间[a, b]分解为区间的并，而不是分解成所谓的可测集(measurable)之并. 区间就是一个可测集. 这样，作为勒贝格积分的概念，有多个上和与下和，因此可能有更好的积分近似. 狄利克雷函数是勒贝格可积的. H. L. Royden(New York: Macmillan, 1988)的著作《Real Analysis》对勒贝格积分有清楚的阐述.

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

因此，不等式(6.11)成立，最后三个不等式也可由此立即得到. ■

定理 6.8(阿基米德–黎曼定理[⊖]) 设f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数. 则f在$[a, b]$上可积当且仅当区间$[a, b]$存在划分序列$\{P_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0. \tag{6.15}$$

此外，对每一个这样的划分序列有

143

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\int_a^b f \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\int_a^b f. \tag{6.16}$$

证明 首先假设划分序列满足(6.15). 我们运用引理6.7. 在不等式(6.12)中，对下标n，用P_n替代P. 则用(6.15)可得不等式

$$0\leqslant \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\leqslant \lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0. \tag{6.17}$$

这样，下积分等于上积分，所以由定义知函数f在$[a, b]$上可积.

现在证明相反论断. 假设f在$[a, b]$上可积，由定义知

$$\underline{\int_a^b} f=\int_a^b f=\overline{\int_a^b} f. \tag{6.18}$$

固定自然数n. 由下积分的定义，$\underline{\int_a^b} f$是f的下达布和集合的最小上界. 这样数$\left[\underline{\int_a^b} f\right]-1/n\left(它小于\underline{\int_a^b} f\right)$不是下达布和集合的上界,故有$[a,b]$的划分$P'$使得

$$\left[\underline{\int_a^b} f\right]-\frac{1}{n}<L(f,P'),$$

因此由(6.18)有

$$\left[\int_a^b f\right]-\frac{1}{n}<L(f,P'). \tag{6.19}$$

类似地对上积分，有$[a, b]$的划分P''使得

$$U(f,P'')<\left[\int_a^b\right]f+\frac{1}{n}. \tag{6.20}$$

由加细引理，上面两个估计对P'与P''的公共加细(记为P_n)也成立. 在第一个估计式(6.19)中用P_n代替P'而在第二个估计式(6.20)中用P_n代替P''得

$$0\leqslant U(f,P_n)-L(f,P_n)<\left[\int_a^b f+\frac{1}{n}\right]-\left[\int_a^b f-\frac{1}{n}\right]=\frac{2}{n}.$$

这样，

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0.$$

⊖ 这个定理之所以归功于希腊数学家阿基米德，是因为他首先通过构造对象的内接与外接多边形近似来设计与完善了用以计算非多边形几何对象的面积的策略. 这个定理也归功于德国数学家黎曼，是因为他在1845年将阿基米德的近似策略用于更一般范围内的面积计算. 在阿基米德利用精巧的初等几何的构造计算抛物线与圆的面积的2000多年以后，才是黎曼的贡献. 阿基米德计算了半径为1的圆的面积并对他的近似作出了精确的误差界，他计算的π的误差不超过1/500.

现在只剩下证明如果函数 f 在 $[a, b]$ 上可积且 $\{P_n\}$ 是满足(6.15)的划分序列，则达布和序列收敛于积分. 但是，如果(6.15)成立，则这些达布和序列的收敛性立即可从不等式(6.13)与(6.14)得出，其中用 P_n 代替 P，而用积分代替上积分与下积分. ■ [144]

从阿基米德-黎曼定理来看，对满足(6.15)的划分序列给予一个命名是有用的.

定义 令 $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，对每个自然数 n，令 P_n 是 $[a, b]$ 的划分. 则 $\{P_n\}$ 称为 f 在 $[a, b]$ 上的阿基米德序列，若它满足

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0.$$

这样，阿基米德-黎曼定理可重述如下：有界函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的当且仅当 f 在 $[a, b]$ 上存在一划分的阿基米德序列. 此外，对 f 在 $[a, b]$ 上划分的任一阿基米德序列，对应的上、下达布和收敛于 f 在 $[a, b]$ 上的积分.

规则划分

定义 对自然数 n，区间 $[a, b]$ 上的划分 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$ 定义为

$$x_i = a + i\frac{(b-a)}{n} \quad 0\leqslant i\leqslant n,$$

称为将 $[a, b]$ 划分成 n 个划分区间的规则划分.

将 $[a, b]$ 划分成 n 个划分区间的规则划分可由它所有的划分区间等长度来刻画，即 $(b-a)/n$.

划分的间隙

定义 对区间 $[a, b]$ 的一个划分 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$，我们定义 P 的间隙(记为 $\text{gap}P$)为划分 P 的最大划分区间的长度，即

$$\text{gap}P \equiv \max_{1\leqslant i\leqslant n}[x_i - x_{i-1}].$$

可以看到，对于一个划分 P 及一正数 ε，$\text{gap}P<\varepsilon$ 当且仅当 P 的每个划分区间的长度小于 ε.

单调函数的可积性

例 6.9 单调递增函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的. 我们用阿基米德-黎曼定理来证实这一点. 令 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$ 是 $[a, b]$ 的一个划分. 首先观察到由于函数是单调递增的，对每个下标 $i\geqslant 1$ 及划分区间 $[x_{i-1}, x_i]$，

$$m_i \equiv \inf\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\} = f(x_{i-1})$$

[145]

及

$$M_i \equiv \sup\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\} = f(x_i).$$

对一自然数 n，令 P_n 是 $[a, b]$ 的规则划分，把 $[a, b]$ 划分成长度等于 $(b-a)/n$ 的 n 个划分区间. 于是

$$\begin{aligned}U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

如图 6.4 所示.

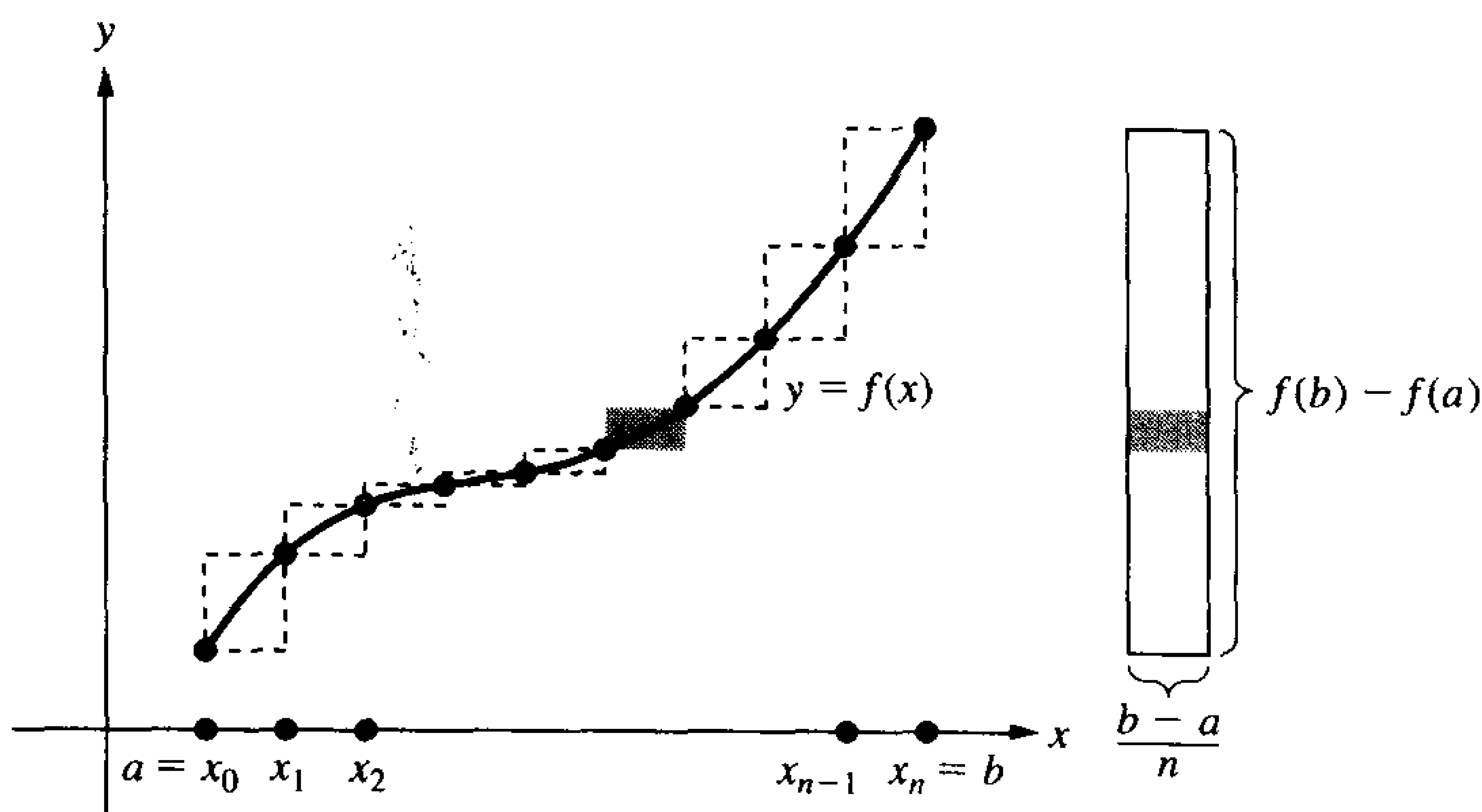


图 6.4 $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))$

因此

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] = \lim_{n\to\infty}\frac{[f(b) - f(a)][b - a]}{n} = 0.$$

这样，该规则划分序列就是 f 在 $[a, b]$ 上的划分的阿基米德序列. 由阿基米德-黎曼定理知 f 在 $[a, b]$ 上可积. ■

阶梯函数的可积性

定义 函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 称为阶梯(step)函数，倘若存在其定义域 $[a, b]$ 的一个划分 $P^* = \{z_0, \cdots, z_k\}$ 及数 $c_1, \cdots, c_k$，使得当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时，对开划分区间 (z_{i-1}, z_i) 中的所有 x 有

146

$$f(x) = c_i.$$

例 6.10 阶梯函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的. 我们用阿基米德-黎曼定理去证实这一点. 选取区间 $[a, b]$ 的一个划分 $P^* = \{z_0, \cdots, z_k\}$，使得对每一下标 $i\geqslant 1$，f 在区间 (z_{i-1}, z_i) 取常值. 由于阶梯函数仅有有限个函数值，它是有界的. 因此可选 $M\geqslant 0$ 使得

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M \quad x \in [a,b].$$

我们将证明对 $[a, b]$ 的任一划分 P，

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant 4(k + 1)M \cdot \text{gap}P. \tag{6.21}$$

从这个估计可得，如果 $\{P_n\}$ 是 $[a, b]$ 的任一划分序列使得

$$\lim_{n\to\infty}\text{gap}P_n = 0,$$

则

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}U(f,P_n) - L(f,P_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}4(k + 1)M \cdot \text{gap}P_n = 0. \tag{6.22}$$

所以，$\{P_n\}$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的划分的阿基米德序列. 这样，由阿基米德-黎曼定理知，f 在 $[a, b]$ 上是可积的. 为建立不等式(6.21)，令 $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ 是 $[a, b]$ 的任一划分. 我们称下

标 i 是交叉下标，如果区间$[x_{i-1}, x_i]$包含划分 P^* 中的点. 将 P 中交叉下标集表示为$\mathcal{C}$. 因为 P^* 有 $k+1$ 个划分点，而 P^* 中每个划分点至多属于 P 的两个划分区间，因此，我们看到至多只有 $2(k+1)$个交叉下标. 同样注意到对每个下标 $i \geqslant 1$,

$$[M_i - m_i][x_i - x_{i-1}] \leqslant 2M[x_i - x_{i-1}] \leqslant 2M \cdot \text{gap}P.$$

因此，我们对 $U(f, P) - L(f, P)$有下述估计：

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} [M_i - m_i][x_i - x_{i-1}] \leqslant 4(k+1)M \cdot \text{gap}P. \tag{6.23}$$

但是，如果 i 不是交叉下标，则由于f是阶梯函数，f在划分区间$[x_{i-1}, x_i]$是常数，因此这一下标对达布和的差不会有什么贡献，即

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i \in \mathcal{C}} [M_i - m_i][x_i - x_{i-1}]. \tag{6.24}$$

从估计(6.23)及等式(6.24)可得到所需要的估计(6.21). ■

莱布尼茨记号

对可积函数f: $[a, b] \to \mathbb{R}$，它的积分值用符号 $\int_a^b f$ 表示. 但这一积分值通常也表示成

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

[147]

我们会看到这一替代记号(包含莱布尼茨记号)通常更为经济且具有暗示性.

前面两个例子表明如何使用阿基米德-黎曼定理建立可积性，如果存在介于上、下达布和之间差的合适估计，也可以建立可积性. 利用阿基米德-黎曼定理计算积分值是比较困难的，这需要更多关于达布和的实际值而不是达布和的差的信息. 这些信息的获得是困难的. 我们现在叙述一个例子，由它可以得到积分的值.

在下面的例子中，需要相继整数平方和的求和公式来计算达布和，我们把下述求和公式的归纳证明留作习题. 对每个自然数 n,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{6.25}$$

例 6.11 对$[0, 1]$中所有 x 定义$f(x) = x^2$. 由于函数f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ 是单调递增的，由例 6.9 知函数f在$[0, 1]$上可积. 我们将证明

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

对每个自然数 n，令 P_n 是$[0, 1]$的规则划分，它把$[0, 1]$划分成 n 个等长的划分区间. 在例 6.9 中已证明$\{P_n\}$是f在$[0, 1]$上的阿基米德序列. 这样，由阿基米德-黎曼定理知

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} U(f, P_n). \tag{6.26}$$

对每个下标 $i \geqslant 1$,

$$M_i \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) = \frac{i^2}{n^2} \quad 及 \quad x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n},$$

所以，

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{i^2}{n^3}.$$

用上面的平方和公式(6.25)，有

$$U(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

因此

148

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right] = \frac{1}{3}.$$ ■

习题

1. 对任意函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 及 $[a, b]$ 的划分 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

2. 设 P_1，P_2 是 $[a, b]$ 的两个划分，证明：若 P_1 是 P_2 的加细，则 $\text{gap}P_1 \leqslant \text{gap}P_2$. 其逆是否正确?

3. 令 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是单调递减函数，P_n 是 $[a, b]$ 的规则划分，把 $[a, b]$ 划分成 n 个长度等于 $(b-a)/n$ 的区间.

a. 证明

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{[f(a) - f(b)][b-a]}{n}.$$

b. 用(a)及阿基米德–黎曼定理证明 f 在 $[a, b]$ 上是可积的.

4. **a.** 证明

$$\sum_{1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b. 用(a)及阿基米德–黎曼定理证明 $\int_a^b x dx = \frac{(b-a)}{2}$.

5. 用习题4中(a)及阿基米德–黎曼定理求下述两个积分.

a. $\int_0^1 [x+1] dx$

b. $\int_0^1 [4x+1] dx$

6. 用阿基米德–黎曼定理证明，当 $0\leqslant a\leqslant b$ 时，

a. $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

b. $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$

7. 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 内除 $x=a$ 外的所有点处均等于 c. 用阿基米德–黎曼定理证明 f 在 $[a, b]$ 上可积并且它的积分等于 $c(b-a)$.

8. 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的. 证明存在 $[a, b]$ 的划分序列 $\{P_n\}$，它是 f 在 $[a, b]$ 上的划分的阿基米德序列，而且具有附加性质：对每个 n，P_{n+1} 是 P_n 的加细. 对于这样的序列证明上达布和序列是单调递减的，而下达布和序列是单调递增的.（提示：应用加细引理.）

149

9. 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 及 g: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的. 证明存在 $[a, b]$ 的划分序列 $\{P_n\}$，它是 f 在 $[a, b]$ 上的划分的阿基米德序列，也是 g 在 $[a, b]$ 上的划分的阿基米德序列.（提示：应用加细引理.）

10. 定义

$$f(x)=\begin{cases}x & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 2 & 3<x\leqslant 4.\end{cases}$$

证明函数f: $[2, 4]\to\mathbb{R}$是可积的.

11. 对于区间$[a, b]$的任一划分$P=\{x_0, \cdots, x_n\}$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i-x_{i-1}]^2\leqslant[b-a]\cdot \text{gap}P.$$

12. 假设f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是利普希茨函数，即存在一常数$c\geqslant 0$使得对于$[a, b]$中所有点u, v,

$$|f(u)-f(v)|\leqslant c|u-v|.$$

对$[a, b]$的任一划分P，证明

$$0\leqslant U(f,P)-L(f,P)\leqslant c[b-a]\cdot\text{gap}P.$$

(提示：在每个划分区间应用极值定理，然后对和估计用习题11的结果.)

13. 应用习题12中给出的达布和差的估计及阿基米德–黎曼定理证明利普希茨函数是可积的.

6.3 可加性、单调性及线性性

定理 6.12(在域上的可加性) 令函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在$[a, b]$上可积，且令c是开区间(a, b)内一点. 则f在$[a, c]$与$[c, b]$上是可积的，更进一步，

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f. \tag{6.27}$$

证明 因为f在$[a, b]$上可积，由阿基米德–黎曼定理知，存在f在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列，即划分序列$\{P_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0, \tag{6.28}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\int_a^b f. \tag{6.29}$$

[150]

运用加细引理，可以假设点c属于每一个划分P_n. 对任一下标n，令P_n'是P_n在$[a, b]$中导出的划分，P_n''是P_n在$[c, b]$中导出的划分，从达布和定义可得

$$U(f,P_n)=U(f,P_n')+U(f,P_n'')$$

及

$$L(f,P_n)=L(f,P_n')+L(f,P_n''),$$

因此

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=[U(f,P_n')-L(f,P_n')]+[U(f,P_n'')-L(f,P_n'')].$$

因为上式右边方括号中的各项都是非负的，从极限式(6.28)可得(习题3)$\{P_n'\}$是f在$[a, c]$上的划分的阿基米德序列，而$\{P_n''\}$是f在$[c, b]$上划分的阿基米德序列. 按照阿基米德–黎曼定理，f在$[a, c]$及$[c, b]$上是可积的，此外，

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n')=\int_a^c f,\quad \lim_{n\to\infty}U(f,P_n'')=\int_c^b f.$$

这样，从上面两个极限、极限式(6.29)以及收敛序列的和性质可得

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}[U(f,P'_n) + U(f,P''_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} U(f,P'_n) + \lim_{n\to\infty} U(f,P''_n) = \int_a^c f + \int_c^b f. \qquad \blacksquare$$

定理 6.13(积分的单调性) 假设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 与 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可积的且对 $[a,b]$ 中所有 x 有

$$f(x) \leqslant g(x),$$

则

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

证明 由阿基米德-黎曼定理与加细引理，在区间 $[a,b]$ 上存在划分序列 $\{P_n\}$，它对于 f 在 $[a,b]$ 上与 g 在 $[a,b]$ 上都是划分的阿基米德序列. 因此，

151

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_a^b f \quad \text{及} \quad \lim_{n\to\infty} U(g,P_n) = \int_a^b g.$$

因为对 $[a,b]$ 的所有 x 有

$$f(x) \leqslant g(x),$$

直接由达布和的定义，对每个下标 n，

$$U(f,P_n) \leqslant L(f,P_n).$$

由收敛序列的保序性得

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} U(g,P_n) = \int_a^b g. \qquad \blacksquare$$

为方便积分的线性性的证明，我们先比较 $f+g$ 及 αf 的达布和与 f 及 g 的达布和.

引理 6.14 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 与 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数，并设 P 是其定义域 $[a,b]$ 的一个划分. 则

$$L(f,P) + L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \quad \text{及} \quad U(f+g,P) \leqslant L(f,P) + U(g,P). \tag{6.30}$$

此外，对任一数 α，

$$\text{当 } \alpha \geqslant 0, \quad U(\alpha f,P) = \alpha U(f,P), \quad L(\alpha f,P) = \alpha L(f,P)$$
$$\text{当 } \alpha < 0, \quad U(\alpha f,P) = \alpha L(f,P), \quad L(\alpha f,P) = \alpha U(f,P). \tag{6.31}$$

证明 检查对于 f 或 αf 在划分 P 的每个区间的达布和的贡献可得(6.30)与(6.31).

选取划分 P 的一个区间 I_i 且对一有界函数 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$，定义

$$M_i(h) \equiv \sup\{h(x) \mid x \in I_i\} \quad \text{及} \quad m_i(h) \equiv \inf\{h(x) \mid x \in I_i\}.$$

于是对 I_i 中每一点 x，

$$f(x) + g(x) \leqslant M_i(f) + M_i(g),$$

所以由上确界的定义，

$$M_i(f+g) \leqslant M_i(f) + M_i(g).$$

将该不等式乘以区间 I_i 的长度并对得到的不等式在划分 P 的区间上求和即得(6.30)中第二个不等式. 第一个不等式可类似得证.

152

在(6.31)中，达布和的比较可由以下对于 f 与 αf 在划分 P 的每个区间 I_i(习题 4)的达布和

的贡献间的关系得出：

$$\text{当 } \alpha \geqslant 0, \quad M_i(\alpha f) = \alpha M_i(f) \quad \text{及} \quad m_i(\alpha f) = \alpha m_i(f)$$
$$\text{当 } \alpha < 0, \quad M_i(\alpha f) = \alpha m_i(f) \quad \text{及} \quad m_i(\alpha f) = \alpha M_i(f). \tag{6.32}$$

■

定理 6.15（积分的线性性） 令函数 $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ 及 $g:[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的. 则对任意两个数 α 与 β，函数 $\alpha f+\beta g:[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的且

$$\int_a^b [\alpha f + \beta g] = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g. \tag{6.33}$$

证明 由阿基米德-黎曼定理及加细引理，$[a, b]$上存在着划分序列$\{P_n\}$，它同时是f在$[a, b]$上及g在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列.

情况 1：$\beta=0$. 对每一个下标 n，用 P_n 代替(6.31)中的 P，得

$$U(\alpha f,P_n) - L(\alpha f,P_n) = |\alpha| [U(f,P_n) - L(f,P_n)].$$

这样，由于$\{P_n\}$是f在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列，它也是αf在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列. 依照阿基米德-黎曼定理，αf在$[a, b]$上可积. 现在由(6.31)，对每个下标 n，

$$U(\alpha f,P_n) = \begin{cases}\alpha U(f,P_n) & \alpha > 0\\ \alpha L(f,P_n) & \alpha \leqslant 0.\end{cases}$$

但是，由阿基米德-黎曼定理，与划分的阿基米德序列相关的上、下达布和收敛于积分的值，而$\{P_n\}$是f也是αf在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列. 因此，如果$\alpha>0$，

$$\int_a^b \alpha f = \lim_{n\to\infty} U(\alpha f,P_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \alpha\int_a^b f,$$

而如果 $\alpha\leqslant 0$，也有

$$\int_a^b \alpha f = \lim_{n\to\infty} U(\alpha f,P_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \alpha\int_a^b f.$$

这就得出 $\beta=0$ 时的证明.

情况 2：$\alpha=\beta=1$. 对每个下标 n，在(6.30)中用 P_n 替代 P，我们得到

$$L(f,P_n) + L(g,P_n) \leqslant L(f + g,P_n) \leqslant U(f + g,P_n) \leqslant L(f,P_n) + U(g,P_n). \tag{6.34}$$

153

但是，再次用阿基米德-黎曼定理，因为与划分的阿基米德序列相关的上、下达布和是收敛于积分值的，划分序列$\{P_n\}$是f在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列，也是g在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列，由(6.34)得出

$$\lim_{n\to\infty} L(f + g,P_n) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{及} \quad \lim_{n\to\infty} U(f + g,P_n) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

利用阿基米德-黎曼定理，我们推出$\{P_n\}$是函数$f+g$在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列且

$$\int_a^b [f + g] = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

这就完成了 $\alpha=\beta=1$ 时的证明.

一般情况可由这两个特殊情况得出. 事实上，由情况 1，αf与βg在$[a, b]$上是可积的，因此由情况 2 知 $\alpha f+\beta g$ 也是可积的. 用情况 2 中的积分公式及两次运用情况 1 中的积分公式，我们得到

$$\int_a^b [\alpha f + \beta g] = \int_a^b \alpha f + \int_a^b \beta g = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g.$$ ■

推论 6.16 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 及 $|f|$: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的，则

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.35}$$

证明 对 $[a, b]$ 中所有 x,

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

这样，运用积分的单调性及线性性，得

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

这与(6.35)是等价的. ■

习题

1. 假设函数 f, g, f^2, g^2 及 fg 在有界闭区间 $[a, b]$ 上都是可积的，证明 $[f-g]^2$ 在 $[a, b]$ 上可积且 $\int_a^b [f-g]^2 \geqslant 0$. 并用此证明

154

$$\int_a^b fg \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2 + \int_a^b g^2\right].$$

2. (柯西–施瓦茨(Cauchy-Schwarz)积分不等式)假设函数 f, g, f^2, g^2 与 fg 在 $[a, b]$ 上都是可积的，证明

$$\int_a^b fg \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

(提示：对每一数 λ，定义 $p(\lambda) = \int_a^b [f-\lambda g]^2$，证明 $p(\lambda)$ 是二次多项式且对所有 λ 满足 $p(\lambda)\geqslant 0$，因此它的判别式是非正的.)

3. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是非负数的序列. 证明：若 $\lim_{n\to\infty}[a_n + b_n] = 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

4. 假设 S 是数的非空有界的集合，α 是数. 定义 αS 是集合 $\{\alpha x \mid x\in S\}$，证明

$$当\ \alpha \geqslant 0,\quad \sup\alpha S = \alpha\sup S \quad 及 \quad \inf\alpha S = \alpha\inf S,$$
$$当\ \alpha < 0,\quad \sup\alpha S = \alpha\inf S \quad 及 \quad \inf\alpha S = \alpha\sup S.$$

用此来证明(6.31).

5. 在定理 6.13 的假定下，证明：若 P_1 与 P_2 是 $[a, b]$ 的两个划分，则 $L(f, P_1)\leqslant U(f, P_2)$. 用这一结论给定理一个直接证明.

6. 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是有界的并令 $a<c<b$. 证明：若 f 在 $[a, c]$ 与在 $[c, b]$ 上均可积，则它在 $[a, b]$ 上是可积的.

6.4 连续性与可积性

本节最初的目的是证明有界闭区间上的连续函数是可积的. 为此，我们先把下述关于连续函数的上、下达布和的差的估计弧立出来.

引理 6.17 令函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，P 是其定义域 $[a, b]$ 的一个划分，则存在 P 的一个划分区间，它含有两点 u 与 v 使得下述估计成立：

$$0 \leqslant U(f,P) - L(f,P) \leqslant [f(v) - f(u)][b-a]. \tag{6.36}$$

证明 令 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$. 对于下标 $i\geqslant 1$，因 f 在每个有界闭划分区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是连续的，由极值定理断言函数在该区间上可取到最小值与最大值，即在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中存在点 u_i 与 v_i 使得

$$f(u_i) = m_i \equiv \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

155

及

$$f(v_i) = M_i \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

选取下标 i_0 使得

$$M_{i_0} - m_{i_0} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}[M_i - m_i],$$

定义

$$u \equiv u_{i_0}, \quad v \equiv v_{i_0},$$

则当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，有

$$M_i - m_i \leqslant M_{i_0} - m_{i_0} = f(v) - f(u).$$

因此

$$\begin{aligned}U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}[M_i - m_i][x_{i-1} - x_i]\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}[f(v) - f(u)][x_{i-1} - x_i]\\ &= [f(v) - f(u)]\sum_{i=1}^{n}[x_{i-1} - x_i]\\ &= [f(v) - f(u)][b - a].\end{aligned}$$

■

回忆定理 3.17 断言在有界闭区间上连续函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是一致连续的，即对定义域 $[a, b]$ 上的任意两序列 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n)=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n) - f(v_n)] = 0.$$

这是定义在有界闭区间上的连续函数的一个性质，它蕴涵着函数的可积性.

定理 6.18 *在有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的.*

证明 为证明此定理，我们将运用阿基米德-黎曼定理. 令 $\{P_n\}$ 是 $[a, b]$ 的任一划分序列，满足

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{gap}P_n = 0. \tag{6.37}$$

我们将证明 $\{P_n\}$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的划分的阿基米德序列. 由前面的引理，对每个下标 n，可选取划分 P_n 中的一个划分区间，它包含 u_n，v_n 两点，使得下面的估计成立：

156

$$0 \leqslant U(f,P_n) - L(f,P_n) \leqslant [f(v_n) - f(u_n)][b - a]. \tag{6.38}$$

观察到 u_n，v_n 同属于 P_n 的一个划分区间，因此

$$|v_n - u_n| \leqslant \operatorname{gap}P_n. \tag{6.39}$$

从这一估计与(6.37)可得 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 内的两个序列，且具有性质

$$\lim_{n\to\infty}[u_n - v_n] = 0.$$

但有界闭区间上的连续函数是一致连续的. 这样，

$$\lim_{n\to\infty}[f(u_n) - f(v_n)] = 0.$$

该极限与不等式(6.38)蕴涵

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] \leqslant \lim_{n\to\infty}[f(v_n) - f(u_n)][b-a] = 0.$$

这样，划分序列$\{P_n\}$是f在$[a, b]$上的划分的阿基米德序列. 依照阿基米德-黎曼定理，f在$[a, b]$上可积. ■

上面的定理有一个轻微的推广，在下一节中，它对第一基本定理(对导数求积分)的表述是必要的.

定理 6.19 假设f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在闭区间$[a, b]$上是有界的，且在开区间(a, b)上是连续的. 则f在$[a, b]$上可积且它的积分值$\int_a^b f$与f在区间端点上的值无关.

证明 因为f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界的，故可选$M\geqslant 0$使得对所有$x\in[a, b]$,

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M. \tag{6.40}$$

选取序列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$使得对每一个下标n有

$$a < a_n < b_n < b$$

及

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b. \tag{6.41}$$

固定下标n，函数f: $[a_n, b_n]\to\mathbb{R}$是连续的. 由上述定理知，f在$[a_n, b_n]$可积. 因而由 157 阿基米德-黎曼定理(习题4)知，存在$[a_n, b_n]$的划分P_n^*使得

$$0 \leqslant U(f,P_n^*) - L(f,P_n^*) < 1/n. \tag{6.42}$$

定义P_n是整个区间$[a, b]$的划分，它是由P_n^*的划分点集中添加端点a与b而成的.

观察到

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = U(f,P_n^*) - L(f,P_n^*) + A_n + B_n, \tag{6.43}$$

其中A_n表示对来自起始的划分区间$[a, a_n]$上达布和的差的贡献，B_n则表示对来自最终划分区间$[b_n, b]$上达布和的差的贡献. 从(6.40)得

$$0 \leqslant A_n \leqslant 2M[a_n - a], \quad 0 \leqslant B_n \leqslant 2M[b_n - b].$$

如图6.5所示. 这样，

$$0 \leqslant U(f,P_n) - L(f,P_n) \leqslant [U(f,P_n^*) - L(f,P_n^*)] + 2M[a_n - a] + 2M[b_n - b].$$

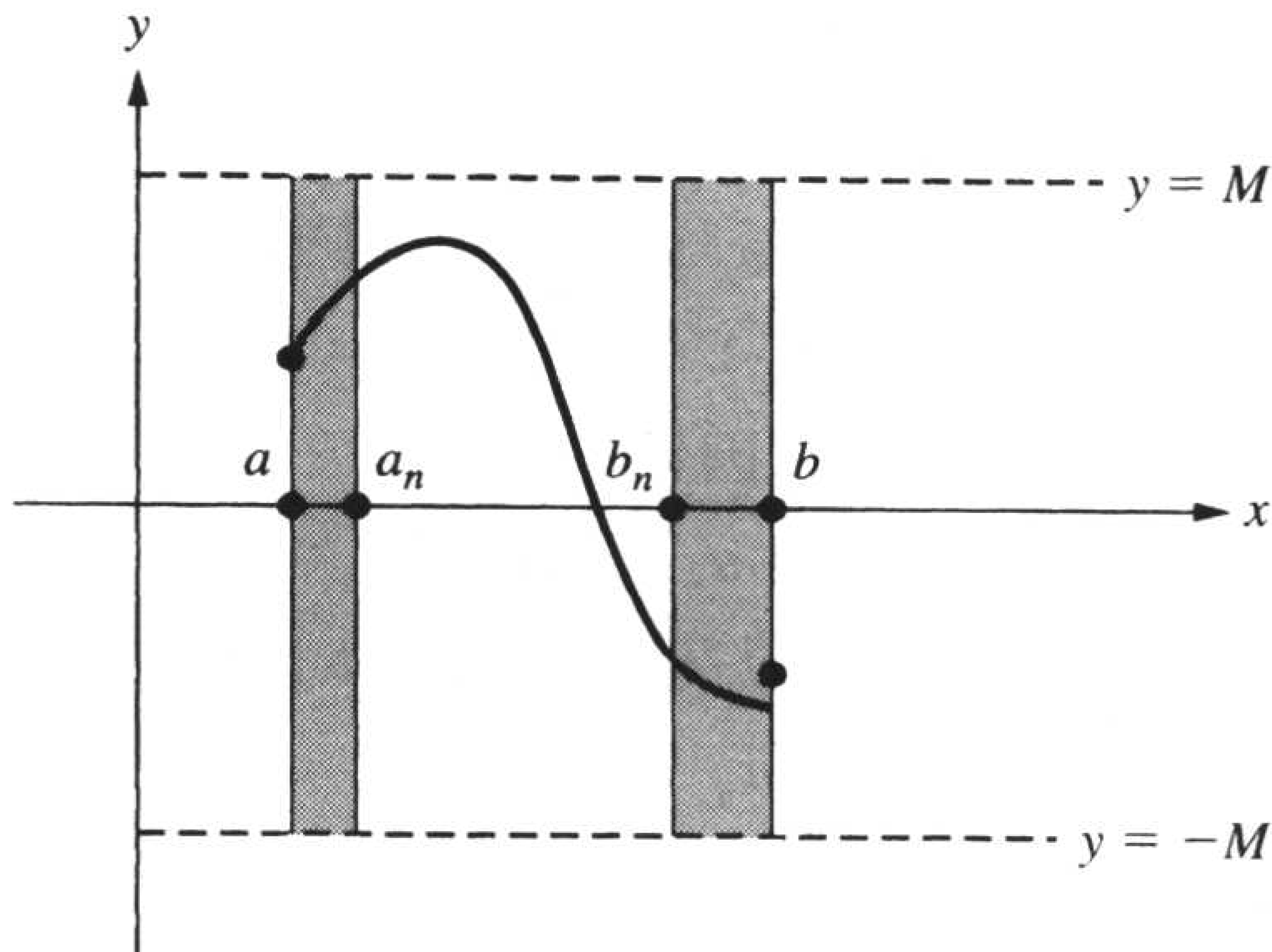


图 6.5 左边(或右边)阴影区域的面积大于A_n(或B_n)

然而，由序列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$及P_n^*的选择，有

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n^*)-L(f,P_n^*)]=0,\quad \lim_{n\to\infty}[a_n-a]=0 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}[b_n-b]=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0.$$

这样，$\{P_n\}$是f在$[a,b]$上的划分的阿基米德序列，由阿基米德-黎曼定理知，函数f在$[a,b]$上可积，并且

158

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n).$$

但是$U(f,P_n)$与$U(f,P_n^*)$的差恰好是对来自于P_n的第一个与最末一个区间的$U(f,P_n)$的贡献. 如上述论证，我们有

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-U(f,P_n^*)]=0.$$

这样，

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n^*).$$

但是每个上达布和$U(f,P_n^*)$仅依赖于f在$[a_n,b_n]$上的值，所以它与f在$x=a$及$x=b$的值无关，积分值也是如此. ■

例 6.20 定义

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & 0<x\leqslant 1\\ 4 & x=0.\end{cases}$$

则函数f：$[0,1]\to\mathbb{R}$有界，且f：$(0,1)\to\mathbb{R}$是连续的. 由前述定理可推得函数f：$[0,1]\to\mathbb{R}$是可积的. ■

习题

1. 对下述各个陈述，确定其真假，并给出理由.
   - a. 若f：$[a,b]\to\mathbb{R}$可积且$\int_a^b f=0$，则对$[a,b]$中所有x，$f(x)=0$.
   - b. 若f：$[a,b]\to\mathbb{R}$可积，则f：$[a,b]\to\mathbb{R}$是连续的.
   - c. 若f：$[a,b]\to\mathbb{R}$可积，且对$[a,b]$中所有x，$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f\geqslant 0$.
   - d. 定义在开区间(a,b)上的连续函数f：$(a,b)\to\mathbb{R}$是有界的.
   - e. 定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数f：$[a,b]\to\mathbb{R}$是有界的.
2. 定义

$$f(x)\equiv\begin{cases}x & 当\,x\,在[0,1]是有理数\\ -x & 当\,x\,在[0,1]是无理数,\end{cases}$$

   证明函数f：$[0,1]\to\mathbb{R}$是不可积的.
3. 假设对连续函数f：$[a,b]\to\mathbb{R}$有$\int_a^b f=0$. 证明在区间$[a,b]$中存在某个点x_0使得$f(x_0)=0$.（提示：用极值定理与介值定理.）

4. 令函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的，$\varepsilon>0$. 用阿基米德-黎曼定理证明存在$[a, b]$的划分P，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

159

5. 假设连续函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$有如下性质：只要$a\leqslant c<d\leqslant b$便有

$$\int_c^d f\leqslant 0.$$

证明对$[a, b]$中所有x，$f(x)\leqslant 0$. 如果对函数仅仅要求可积性，上述结论还正确吗？

6. 假设f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$是连续函数且对$[0, 1]$中所有x有$f(x)\geqslant 0$. 证明$\int_0^1 f>0$当且仅当在$[0, 1]$中存在一点x_0，使得$f(x_0)>0$.

7. 对区间$[1, 2]$中的一点x，定义：当x是无理数时，$f(x)=0$；当x是有理数时，可表示为$x=m/n$，其中m，n无公因子，$f(x)=\dfrac{1}{n}$. 证明函数f: $[1, 2]\to\mathbb{R}$是可积的.（提示：先证明对任一给定$\varepsilon>0$，在区间$[1, 2]$中仅存在有限多个点x使得$f(x)\geqslant\varepsilon$.）

8. 假设f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界的且它在开区间(a, b)内除一点x_0外是连续的. 证明f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的.（提示：修改定理6.19的证明.）

9. （积分的三角不等式）假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$与g: $[a, b]\to\mathbb{R}$连续，证明

$$\int_a^b |f+g|\leqslant\int_a^b |f|+\int_a^b |g|.$$

6.5 第一基本定理：对导数求积分

在上一节里，我们用阿基米德-黎曼定理证明了有界闭区间上的连续函数是可积的. 事实上，我们证得稍多一点，即定义在闭区间$[a, b]$上的函数f在开区间(a, b)上有界且连续，则f在$[a, b]$上是可积的. 但是，除去极特殊情况外，迄今为止我们还没有一般的方法去确定积分值. 其理由是：有可能（对单调函数、阶梯函数或连续函数）估计上、下达布和的差，但除了极特殊情况[⊖]，不可能计算上、下达布和本身. 因此，阿基米德-黎曼定理作为实际地确定积分值的工具，其价值极为有限. 在本节中，我们将证明第一基本定理（对导数求积分），它可叙述为：对连续函数F: $[a, b]\to\mathbb{R}$，它在开区间(a, b)内有连续有界导数，则下述积分公式成立：

160

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

这个定理提供了计算积分的方法，它不需显式地计算上、下达布和. 这是数学分析（事实上也是科学）的一个基本结果. 为证明该定理，首先把下述简单结果分离出来.

引理 6.21 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的，数A具有如下性质：对$[a, b]$的每一划分P有

$$L(f,P)\leqslant A\leqslant U(f,P),$$

则

$$\int_a^b f=A.$$

⊖ 有一个极为灵活的策略（归功于费马（Pierre de Fermat）），用于通过真正地计算达布和来计算任一幂函数$f(x)=x^r$在区间$[a, b]$上的积分，见7.4节中习题13. 然而，积分理论不可能对每个例子都以灵活的策略来开展.

证明 由假设，A 是下达布和集合的一个上界，这样由上确界定义知

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant A.$$

同样由假设，A 是上达布和的一个下界，这样由下确界定义知

$$A \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

但 f 假设为在 $[a, b]$ 上可积，即

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

因此

$$A \leqslant \int_a^b f \leqslant A.$$

■

定理 6.22（第一基本定理：对导数求积分） 令函数 F：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且在开区间 (a, b) 内是可微的. 此外，假设它的导数

$$F':(a,b)\to\mathbb{R} \text{ 是连续且有界的，}$$

161

则

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{6.44}$$

证明 函数 F'：$(a, b)\to\mathbb{R}$ 连续且有界. 这样，由定理 6.19 知 F' 在 $[a, b]$ 上可积，也就是说 F' 到闭区间 $[a, b]$ 的任一扩张是可积的，且其积分值与这个扩张在该闭区间的端点的取值无关. 由前述引理，为证实积分公式 (6.44)，只需验证对 $[a, b]$ 的每个划分 P，有

$$L(F',P) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant U(F',P). \tag{6.45}$$

令 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$ 是 $[a, b]$ 的一个划分. 固定一个下标 $i\geqslant 1$. 由假设，函数 F：$[x_{i-1}, x_i]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是连续的，而它在开区间 (x_{i-1}, x_i) 上是可微的. 由中值定理知，在开区间 (x_{i-1}, x_i) 中存在一点 c_i 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{6.46}$$

因为点 c_i 属于区间 $[x_{i-1}, x_i]$，故

$$m_i \equiv \inf\{F'(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \leqslant F'(c_i) \leqslant \sup\{F'(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \equiv M_i.$$

所以两端乘以 $x_i - x_{i-1}$ 并替代中值公式 (6.46) 得

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant F(x_i) - F(x_{i-1}) \leqslant M_i(x_i - x_{i-1}).$$

对这 n 个不等式求和，可得下面的不等式：

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \leqslant \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

左边和是 $L(F', P)$，右边和是 $U(F', P)$，此外，

$$\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

这样便得到所需的不等式 (6.45).

■

对于函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$，它在开区间 (a, b) 内连续有界，第一基本定理（对导数求积分）

断言：如果可能找到f的一个原函数(反导数，antiderivative)F：$[a, b]\to\mathbb{R}$，则积分由公式

[162]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{6.47}$$

给出. f的原函数是指一个连续函数F：$[a, b]\to\mathbb{R}$在开区间(a, b)可导且

$$F'(x) = f(x) \quad x \in (a,b). \tag{6.48}$$

例 6.23 对$r>0$，

$$\int_0^1 x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}. \tag{6.49}$$

对$[0, 1]$中所有x定义$f(x)=x^r$，函数f：$[0, 1]\to\mathbb{R}$是连续的，所以它是可积的. 从幂函数的微分公式可知函数F：$[0, 1]\to\mathbb{R}$定义为：当$x\in[0, 1]$时，

$$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1},$$

它是f的原函数. 公式(6.49)可从第一基本定理得出. ■

例 6.24 我们希望计算

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1+x^4}\right]\mathrm{d}x.$$

对于$x\in[0, 1]$定义$f(x)=1/(1+x^4)$. 由于函数f：$[0, 1]\to\mathbb{R}$是连续的，所以也是可积的. 为应用第一基本定理，我们需要求出连续函数F：$[0, 1]\to\mathbb{R}$，使得F：$[0, 1]\to\mathbb{R}$是可微的且对所有$x\in(0, 1)$，

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^4}. \tag{6.50}$$

即使仔细地搜索微分学的所有结果，也无法找到微分方程(6.50)的解. 我们无法确认它的一个原函数[1]. 因此不能直接应用第一基本定理计算上述积分. ■

例 6.25 定义

[163]

$$f(x) = \begin{cases} 4 & 2 \leqslant x < 3 \\ 0 & 3 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

现在又有一个不可能应用第一基本定理计算的积分$\int_2^6 f$，因为函数f：$[2, 6]\to\mathbb{R}$没有原函数(习题4). 由于这个函数是阶梯函数，它是可积的. 不难看出$\int_2^6 f=4$(习题3). ■

上面的例子描述了第一基本定理的用处与局限性. 它把计算$\int_a^b f$问题转化为寻求f的原函数问题. 人们通常能辨认出原函数，但是也存在着不能辨认或没有原函数的情况.

[1] 事实上这一函数的原函数是存在的，这可利用第二基本定理(对积分求导数)求出，将在下一节加以证明. 但是这个原函数并不是我们所认识的“初等函数”. 至于“初等函数”的真正意义，需要有近世代数的背景，这一点已走出本书的范围. 可参见 Maxwell Rosenlicht 在《American Mathematical Monthly》(Nov. 1972)上的论文“Integration in Finite Terms”.

习题

1. 令 m，b 是正数，用下述三种方法求 $\int_0^1 [mx+b]\mathrm{d}x$.

a. 用初等几何法，即把 $\int_0^1 [mx+b]\mathrm{d}x$ 理解为面积.

b. 计算基于[0，1]的规则划分的上、下达布和并运用阿基米德–黎曼定理.

c. 用第一基本定理(对导数求积分).

2. 用第一基本定理计算以下各个积分：

a. $\int_1^2 \left[\frac{1}{x^2}+x+\cos x\right]\mathrm{d}x$

b. $\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_1^3 x\sqrt{10-x}\,\mathrm{d}x$

d. $\int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

3. 定义

$$f(x)=\begin{cases}4 & 2\leqslant x<3\\ 0 & 3\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

证明 $\int_a^b f=4$.

4. 定义

$$f(x)=\begin{cases}4 & 2\leqslant x<3\\ 0 & 3\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

a. 用恒等准则证明：如果 f 有原函数 F：$[2,6]\to\mathbb{R}$，则存在数 c_1，c_2 使得

$$F(x)=\begin{cases}4x+c_1 & 2\leqslant x<3\\ c_2 & 3\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

164

b. 由(a)证明：若 F 在 $x=3$ 连续，则有 $12+c_1=c_2$.

c. 证明 F 在 $x=3$ 处是不可微的，且因此函数 f 没原函数.

5. 积分的单调性蕴涵着如果函数 g：$[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 及 h：$[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续的，且对所有 $x\geqslant 0$ 有 $g(x)\leqslant h(x)$，则对所有 $x\geqslant 0$，

$$\int_0^x g\leqslant\int_0^x h.$$

用上述性质及第一基本定理证明以下不等式的每一个可推出下一个：

$$\cos x\leqslant 1\quad x\geqslant 0$$
$$\sin x\leqslant x\quad x\geqslant 0$$
$$1-\cos x\leqslant x^2/2\quad x\geqslant 0.$$
$$x-\sin x\leqslant x^3/6\quad x\geqslant 0.$$

这样，

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x\quad x\geqslant 0.$$

6. 证明在第一基本定理中，函数 F：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 在区间端点处连续的假定是必要的. 在证明中哪一步要用到函数 F 在区间端点上的连续性？

6.6 第二基本定理：对积分求导数

给定函数f:$(a, b)\to\mathbb{R}$，是否存在一可微函数F:$(a, b)\to\mathbb{R}$，使得对(a, b)中所有x有

$$F'(x) = f(x)?$$

这样的函数F称为f在(a, b)上的原函数.

i. 对某类函数f:$(a, b)\to\mathbb{R}$，诸如多项式等，我们能显式地找到原函数.

ii. 阶梯函数在(a, b)上不是常值，所以阶梯函数没有原函数.

iii. 对很多函数f:$(a, b)\to\mathbb{R}$，我们不能判断何时它有原函数. 特别地，在第5章中，曾假设方程

$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

165 有一个解，但在目前我们还没有一种工具可以证明当$x>0$时，$f(x)=1/x$有原函数.

原函数概念的重要性在第一基本定理的陈述中十分明显. 然而，与显式地计算积分问题相当无关的是，研究原函数的存在性实际上是研究更一般的微分方程的第一步. 本节中，我们将证明如果函数f:$(a, b)\to\mathbb{R}$是连续的，则它有原函数，而且有着显式的积分公式. 在证明此结果之前，先导出两个初步结果，它们有着各自的重要性.

定理 6.26(积分中值定理) 假定函数f:$[a, b]\to\mathbb{R}$是连续的. 则在区间$[a, b]$中存在点x_0，满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0).$$

如图6.6所示.

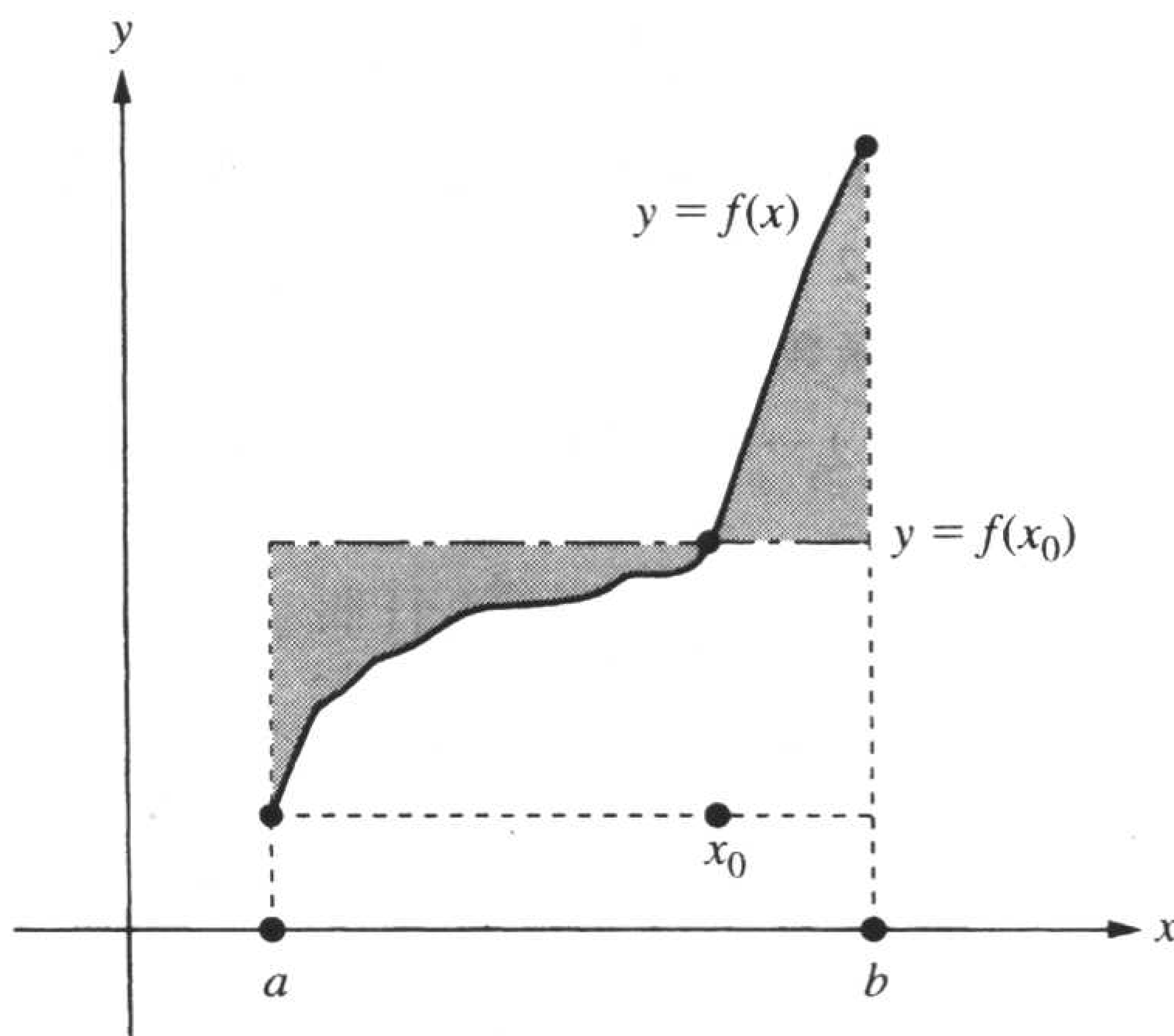


图 6.6 $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$

证明 由于函数f:$[a, b]\to\mathbb{R}$是连续的，所以可用极值定理在区间$[a, b]$中选取点x_m及x_M，使得f:$[a, b]\to\mathbb{R}$在这两点处分别取得极小值与极大值. 这样，

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \quad x \in [a,b].$$

由积分的单调性可得

$$f(x_m)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_M)(b-a).$$

所以

$$f(x_m) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(x_M).$$

166

于是，由介值定理，在 x_m 与 x_M 之间存在点 x_0 使得

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

■

命题 6.27 假定函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是可积的. 定义

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a,b].$$

则函数 F: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的. 如图 6.7 所示.

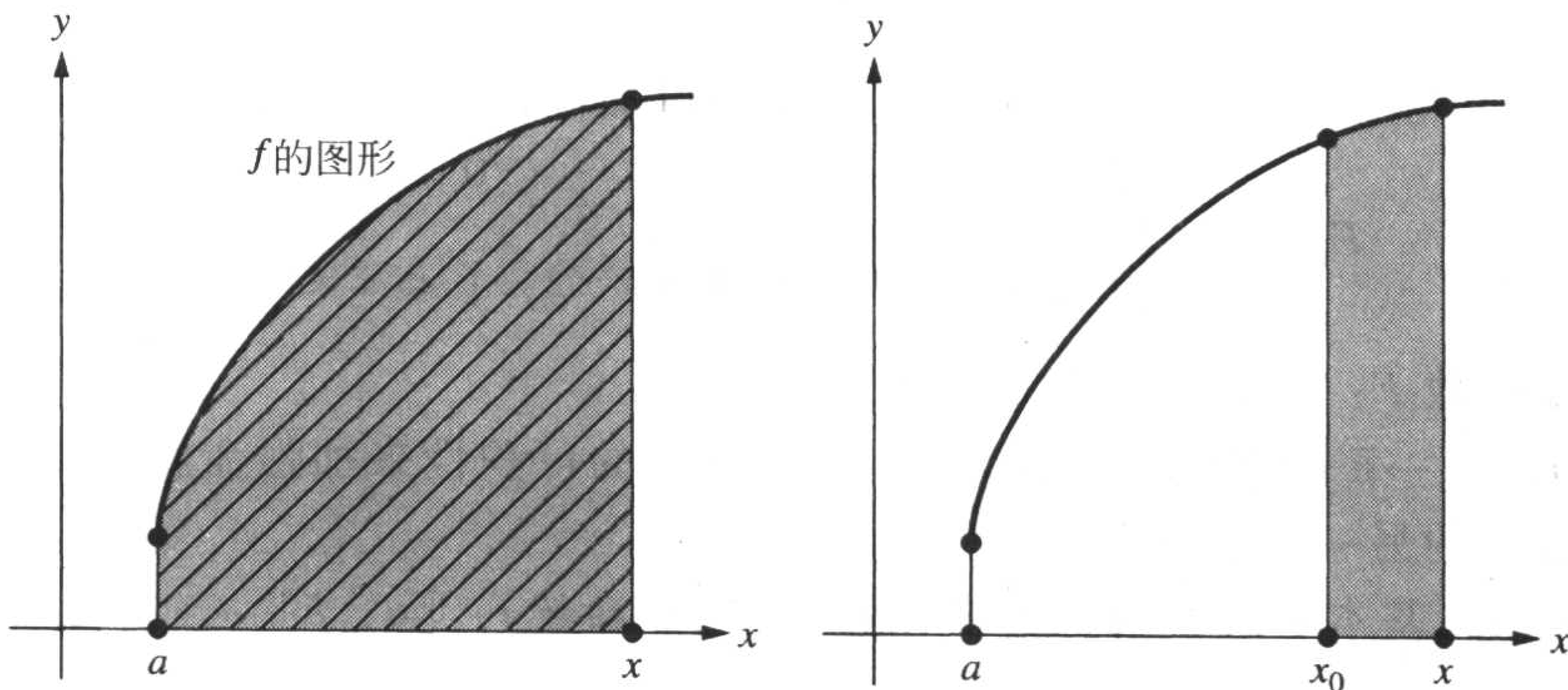


图 6.7 阴影部分面积等于 $F(x) - F(x_0)$

证明 证明完全依赖于积分在区间上的可加性(定理 6.12 所证明的). 由定理 6.12，对每一个点 $x \in [a, b]$，函数 f: $[a, x] \to \mathbb{R}$ 在有界闭区间 $[a, x]$ 上是可积的. 因此函数 F: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是被完全定义的.

由于函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是可积的，所以由假设它是有界的. 选取 $M > 0$ 使得

$$\text{对所有 } x \in [a,b], \quad -M \leqslant f(x) \leqslant M. \tag{6.51}$$

我们断言

$$\text{对}[a,b]\text{ 中所有的点 } u \text{ 及 } v, \ |F(u) - F(v)| \leqslant M|u - v|. \tag{6.52}$$

事实上，令 u, v 是 $[a, b]$ 中满足 $u < v$ 的点. 再次运用定理 6.12，可得

$$F(v) = \int_a^v f = \int_a^u f + \int_u^v f = F(u) + \int_u^v f.$$

167

所以

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f. \tag{6.53}$$

但由 M 的选取得，

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M, \quad 若\ u \leqslant x \leqslant v,$$

所以根据积分的单调性，

$$-M(v-u) \leqslant \int_u^v f \leqslant M(v-u),$$

因此，由(6.53)，

$$-M(v-u) \leqslant F(v)-F(u) \leqslant M(v-u).$$

这样，当 $u<v$ 时，(6.52)式成立. 由于当 u 与 v 交换时，此式保持不变，所以当 $v<u$ 时，(6.52)式也成立.

最后，由不等式(6.52)立即可推出函数 F: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 的连续性. ■

例 6.28 定义

$$f(x)=\begin{cases}2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

现定义

$$F(x)=\int_0^x f, \quad 0\leqslant x\leqslant 2.$$

由第一基本定理(对导数求积分)及积分在区间上的可加性，

$$F(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ F(1)+\int_1^x f=3/2+x^2/2 & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

由上述定理可知函数 F: $[0, 2]\to\mathbb{R}$ 是连续的. ■

当以 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 的连续性代替 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 的可积性来加强命题 6.27 中的假设条件时，得到数学分析的另一块奠基石.

定理 6.29(第二基本定理：对积分求导数) *假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 则*

168

$$对所有\ x\in[a,b], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f\right]=f(x).$$

证明 定义

$$F(x)\equiv\int_a^x f \quad x\in[a,b].$$

我们已经验证了函数 F: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 严格有定义且事实上是连续的. 令 x_0 是 (a, b) 中的点. 必须证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0).$$

设 x 为 (a, b) 中的点且 $x\neq x_0$. 由积分在区间上的可加性，即定理 6.12，

$$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^x f, \quad x>x_0,$$

而

$$F(x)-F(x_0)=-\int_x^{x_0} f, x<x_0.$$

因此，运用积分中值定理，可在 x_0 与 x 之间选择点 $c(x)$ 使得

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(c(x)). \tag{6.54}$$

但函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处是连续的，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(c(x)) = f(x_0).$$

这样，

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c(x)) = f(x_0).$$ ■

正如我们前面所提到过的，第二基本定理的重要性在于它为研究一般的微分方程奠定了基础. 在 7.2 节将转到这方面的问题. 另外，在 7.3 节我们会看到，通过检查可以直接运用第一基本定理的积分取代复杂的积分的各种技巧都可以用这个定理证明. 最后，在 7.4 节，我们会看到第二基本定理在分析用近似方法求积分而引起的误差时也是非常重要的.

在本节的余下部分，我们将考虑第二基本定理的某些变化形式. 169

推论 6.30 假设函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 则对 $[a, b]$ 中所有 x 有

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^b f\right] = -f(x).$$

如图 6.8 所示.

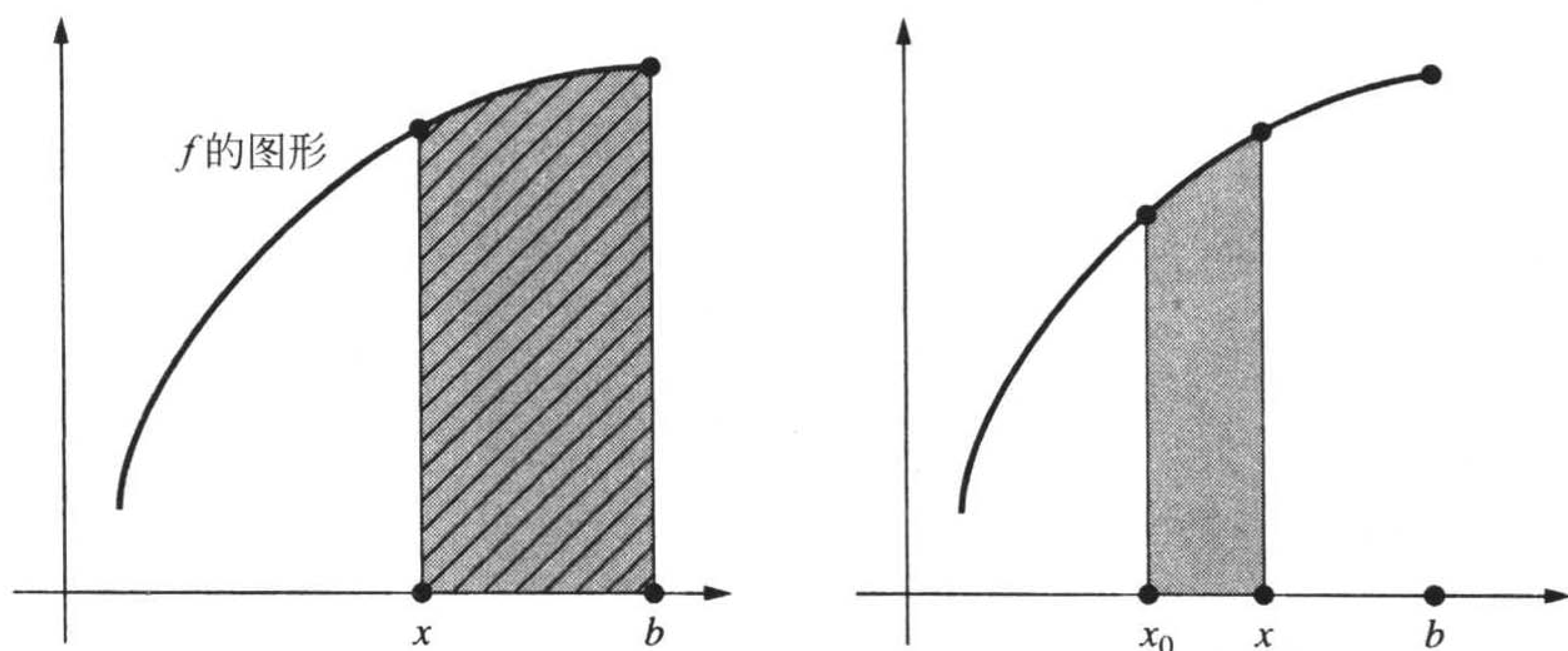


图 6.8 当 $F(x) = \int_x^b f$ 时，阴影部分面积 $= -[F(x) - F(x_0)]$

证明 由积分在区间上的可加性，即定理 6.12，对 $[a, b]$ 中每一个 x，

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f.$$

观察到 $\int_a^b f$ 与 $[a, b]$ 中的 x 是无关的. 这样，由第二基本定理（对积分求导数），

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^b f\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_a^b f - \int_a^x f\right] = -\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f\right] = -f(x).$$ ■

由上述结果可推广符号 $\int_a^b f$ 的含义如下.

定义 设 c 与 d 是满足 $c<d$ 的数. 对可积函数 f：$[c, d]\to\mathbb{R}$，定义

$$\int_d^c f \equiv -\int_c^d f \quad 及 \quad \int_c^c f = 0.$$

上述定义使得积分在区间上的可加性推广如下：设 I 是有界闭区间而函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是可积的. 则对 I 中任意三个点 x_1，x_2 及 x_3， 170

$$\int_{x_1}^{x_3} f = \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_3} f.$$

证明留作习题.

推论 6.31 设 I 是开区间，假定函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是连续的. 在 I 中固定一点 x_0，则

$$\text{对所有 } x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{x} f\right] = f(x).$$

证明 由上述关于积分在区间上的可加性的推广，对 $[a, b]$ 中每个 x，

$$\int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{a} f + \int_{a}^{x} f.$$

观察到 $\int_{x_0}^{a} f$ 与 $[a, b]$ 中的 x 无关. 这样，由第二基本定理(对积分求导数)，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{x} f\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{a} f + \int_{a}^{x} f\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{a}^{x} f\right] = f(x).$$ ■

推论 6.32 设 I 是开区间，假定函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是连续的. 设 J 是开区间，假定函数 $\varphi: J \to \mathbb{R}$ 是可微的且 $\varphi(J) \subseteq I$，固定 I 中的点 x_0，则

$$\text{对所有 } x \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{\varphi(x)} f\right] = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

证明 对 J 内所有 x，定义

$$G(x) \equiv \int_{x_0}^{\varphi(x)} f$$

及

$$F(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f.$$

由第二基本定理(对积分求导数)，

[171]

$$G = F \circ \varphi : J \to \mathbb{R}$$

是可微函数的复合函数，所以由链式法则可得结果：对 J 中所有 x，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{\varphi(x)} f\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(F \circ \varphi)(x)] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$ ■

第二基本定理是在函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续的假设之下得到证明的. 事实上，如果 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 仅仅是可积的并对所有 $x \in [a, b]$，定义 $F(x) \equiv \int_{a}^{x} f$，那么函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 (a, b) 中每一个连续的点 x 处有 $F'(x) = f(x)$ (习题 10).

习题

1. 计算下列导数：

a. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{0}^{x} x^2 t^2 \,\mathrm{d}t\right)$　　**b.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{1}^{e^x} \ln t \,\mathrm{d}t\right)$

c. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-x}^{x} e^{t^2} \,\mathrm{d}t\right)$　　**d.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{1}^{x} \cos(x+t) \,\mathrm{d}t\right)$

2. 对下列每一个可积函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$，定义

$$\text{对所有 } x \in [a,b], \quad F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $F(x)$ 的不含积分的公式，其中 $a \leqslant x \leqslant b$.

a. f: $[1, 4]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 6 & 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

b. f: $[0, 2]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

c. f: $[-1, 1]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \leqslant x < 0 \\ x+1 & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

172

3. 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的. 定义函数$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$如下：

$$\text{对所有 } x,\quad H(x) = \int_{-x}^{x}[f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t.$$

求$H''(x)$.

4. 假定函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有连续的二阶导数，证明

$$\text{对所有 } x,\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_{0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

（提示：用恒等准则.）

5. 假定函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的. 对所有$x$，定义

$$G(x) = \int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明对所有x，$G''(x)=f(x)$.

6. 对所有$x\geqslant 1$，定义

$$F(x) = \int_{1}^{x}\frac{1}{2\sqrt{t}-1}\,\mathrm{d}t.$$

证明：如果$c>0$，则以下方程存在唯一解：

$$F(x) = c,\quad x > 1.$$

7. 证明：如果以f: $[a, b]\to\mathbb{R}$可积的假定取代f: $[a, b]\to\mathbb{R}$连续的假定，则积分中值定理不成立.

8. 就数a_1, …, a_n而言，对所有x，定义$p(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. 假定

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1} = 0.$$

证明在区间$(0, 1)$中存在某个点x，使得$p(x)=0$.

9. 证明积分中值定理的结论可以加强为在(a, b)中选取x_0而并不只是在$[a, b]$中选取x_0.

10. 第二基本定理有比我们叙述过的更一般的形式：对于可积函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$，对所有$x\in[a,b]$定义$F(x)\equiv\int_a^x f$. 则在函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$在(a, b)中的每个连续点x_0处，函数F: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可微的，并且$F'(x_0)=f(x_0)$. 用积分的单调性性质证明此结论.

11. 设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是连续的. 假定函数F: $[a, b]\to\mathbb{R}$是连续的而F: $(a, b)\to\mathbb{R}$是可微的，且对所有$x\in(a, b)$，$F'(x)=f(x)$. 用第二基本定理证明

173

$$\text{对所有 } x\in(a,b),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(x)-\int_a^x f\right] = 0.$$

由此得到第一基本定理的一个新的证明.

12. 假定函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$与g: $[a, b]\to\mathbb{R}$是连续的而α与β是任意实数. 对所有$x\in[a, b]$，定义

$$H(x) = \int_a^x[\alpha f+\beta g] - \alpha\int_a^x[f] - \beta\int_a^x[g].$$

证明对所有$x\in(a, b)$，$H(a)=0$且$H'(x)=0$. 然后由恒等准则提供在函数是连续而不只是可积的假定之下积分的线性性质的另一种证明.

174

* 第7章　积分法：更深入的主题

7.1　微分方程的解

命题 7.1　设 I 是包含点 x_0 的开区间，假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是连续的. 对任意数 y_0，微分方程

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) & \text{对所有 } x \in I \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$$

有由如下公式给出的唯一解 $F: I\to\mathbb{R}$：

$$\text{对所有 } x \in I,\quad F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f.$$

证明　由定义，$F(x_0)=y_0$. 由第二基本定理(对积分求导数)，对所有 $x\in I$，$F'(x)=f(x)$. 于是 $F: I\to\mathbb{R}$ 是微分方程的解. 恒等准则(命题 4.20)蕴涵只存在一个解. ■

回顾 5.1 节中假定存在可微函数 $F: (0,\infty)\to\mathbb{R}$，该函数是微分方程

$$\begin{cases} F'(x) = 1/x & \text{对所有 } x > 0 \\ F(1) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

的解，现在可证明存在一个解.

命题 7.2　定义

$$\text{对所有 } x > 0,\quad F(x) \equiv \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

175 则函数 $F: (0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是微分方程(7.1)的解.

证明　该命题可由命题 7.1 推出，其中对所有 $x>0$，$f(x)=1/x$. ■

如果微分方程(7.1)存在解，我们定义自然对数 $\ln: (0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是(7.1)的唯一解. 于是有明确的积分公式

$$\text{对所有 } x > 0,\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

现考虑下列一般的线性微分方程，它仅仅依赖于函数及其一阶导数.

给定连续函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与数 a，x_0 及 y_0，求可微函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} F'(x) + aF(x) = h(x) & \text{对所有 } x \\ F(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.2}$$

定理 7.3　假设函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的. 则微分方程有唯一解，由下式给出：对所有 x，

$$F(x) = y_0 \mathrm{e}^{-a(x-x_0)} + \mathrm{e}^{-ax}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{at}h(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.3}$$

证明　因为对任何数 x，$\mathrm{e}^{ax}\neq 0$，可以看出 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是(7.2)的解当且仅当对所有 x 有

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{ax}[F'(x) + aF(x)] = \mathrm{e}^{ax}h(x) \\ F(x_0) = y_0. \end{cases}$$

但对所有 x 有

$$e^{ax}[F'(x)+aF(x)]=\frac{d}{dx}(e^{ax}F(x)),$$

且 $F(x_0)=y_0$ 当且仅当 $e^{ax_0}F(x_0)=e^{ax_0}y_0$. 这样，$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是(7.2)的解当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}[e^{ax}F(x)]=e^{ax}h(x) & \text{对所有 } x\\ e^{ax_0}F(x_0)=e^{ax_0}y_0.\end{cases} \tag{7.4}$$

现在由命题 7.1，下述微分方程有唯一解：

$$\begin{cases}g'(x)=e^{ax}h(x) & \text{对}\mathbb{R}\text{ 中所有 } x\\ g(x_0)=e^{ax_0}y_0,\end{cases} \tag{7.5}$$

176

其解由下式定义：

$$g(x)=e^{ax_0}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{at}h(t)dt.$$

但(7.4)恰表明函数 $g(x)=e^{ax}F(x)$ 是(7.5)的一个解，因此

$$e^{ax}F(x)=e^{ax_0}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{at}f(t)dt \quad \text{对}\mathbb{R}\text{ 中所有 } x.$$

这样，微分方程(7.2)有唯一解，该解由公式(7.3)给出. ■

例 7.4 求下列方程的唯一解：

$$\begin{cases}F'(x)-F(x)=x & \text{对所有 } x\\ F(0)=2.\end{cases}$$

按照定理 7.3，唯一解由以下公式给出：

$$\text{对所有 } x,\quad F(x)=2e^{x}+e^{x}\int_0^x e^{-t}t\,dt.$$

但这一公式中的积分可用第一基本定理(对导数求积分)计算. 经计算得到

$$\text{对所有 } x,\quad F(x)=3e^{x}-x-1.$$ ■

习题

1. 求下列每个微分方程的唯一解：

 a. $\begin{cases}F'(x)+F(x)=x & \text{对所有 } x\\ F(0)=1.\end{cases}$

 b. $\begin{cases}F'(x)+4F(x)=e^{x} & \text{对所有 } x\\ F(2)=31.\end{cases}$

 c. $\begin{cases}F'(x)+F(x)=x^2 & \text{对所有 } x\\ F(0)=-1.\end{cases}$

2. 对数 c 及 a，考虑微分方程

$$\begin{cases}F'(x)=c(a-F(x)) & \text{对所有 } x\\ F(0)=0.\end{cases}$$

 证明唯一解由下面公式给出：

$$\text{对所有 } x,\quad F(x)=a(1-e^{-cx}).$$

177

3. 设 I 是含有 0 的开区间而函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有连续的导数. 证明

$$\text{对所有 } x\in I,\quad f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt.$$

用这一公式推导反正弦、反余弦及反正切函数的明确的积分表示式.

4. 证明

$$\int_1^{12} \frac{1}{x} dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx.$$

5. 假定函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的并且

$$对所有的 x, \quad f(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

证明对所有 x, $f(x)=0$.

6. 假定函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的且对所有 x 有 $g(x)>0$. 定义

$$对所有 x, \quad h(x) = \int_0^x \frac{1}{g(t)} dt,$$

令 $J=h(\mathbb{R})$. 证明：如果 f: $J\to\mathbb{R}$ 是 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的反函数，则 f: $J\to\mathbb{R}$ 是下列非线性微分方程的解：

$$\begin{cases} f'(x) = g(f(x)) & 对所有 x \in J \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

7.2 分部积分法与换元法

对于限制在开区间(a, b)内有有界的连续导数的连续函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 来说，第一基本定理断言

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

这个公式与微分的乘积公式一起提供了一个计算积分的有效方法，下面加以叙述.

分部积分法

定理 7.5 *假设函数 h: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 与 g: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，并且 h 与 g 在开区间(a, b)* 178 *内有有界的连续导数，则*

$$\int_a^b h(x)g'(x)\,dx = h(b)g(b) - h(a)g(a) - \int_a^b g(x)h'(x)\,dx. \tag{7.6}$$

证明 乘积函数 hg: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，hg: $(a, b)\to\mathbb{R}$ 是可微的，按照导数的乘积法则，

$$对所有 x \in (a,b), \quad (hg)'(x) = h(x)g'(x) + g(x)h'(x).$$

这样，由第一基本定理有

$$\int_a^b [hg' + gh'] = \int_a^b (hg)' = h(b)g(b) - h(a)g(a), \tag{7.7}$$

而另一方面，由积分的线性性质可得

$$\int_a^b (hg' + gh') = \int_a^b hg' + \int_a^b gh'. \tag{7.8}$$

式(7.6)可由式(7.7)及式(7.8)推出. ∎

例 7.6 化

$$\int_0^1 x e^x dx \quad 为 \quad \int_0^1 x \frac{d}{dx}(e^x) dx,$$

$$\int_0^\pi x \cos x dx \quad 为 \quad \int_0^\pi x \frac{d}{dx}(\sin x) dx,$$

$$\int_1^2 \ln x dx \quad 为 \quad \int_1^2 \ln x \frac{d}{dx}(x) dx,$$

在左边的每个积分都可以用分部积分法及第一基本定理计算. ■

换元积分法

定理 7.7 设函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的，假定函数 g: $[c, d] \to \mathbb{R}$ 也是连续的，g: $(c, d) \to \mathbb{R}$ 有有界的连续导数，此外，g: $(c, d) \to \mathbb{R}$ 的象在区间 (a, b) 内，则

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx. \tag{7.9}$$

179

证明 定义函数 H: $[c, d] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$对所有 x \in [c,d], \quad H(x) \equiv \int_c^x (f \circ g) g' - \int_{g(c)}^{g(x)} f.$$

由于连续函数的复合函数是连续的，由命题 6.27 得到函数 H: $[c, d] \to \mathbb{R}$ 是连续的. 此外，由第二基本定理及推论 6.32 可得

$$对所有 x \in (c,d), \quad H'(x) = f(g(x)) g'(x) - f(g(x)) g'(x) = 0.$$

由恒等准则得到函数 H: $[c, d] \to \mathbb{R}$ 是常数. 特别地，由于 $H(c) = 0$，所以也有 $H(d) = 0$. 于是式 (7.9) 成立. ■

数 π 的几何意义

设可积函数 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 具有如下性质：对所有 $x \in [a, b]$，$f(x) \geqslant 0$. 定义由 f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 的图形及 x 轴所界定的面积是积分 $\int_a^b f(x) dx$. 当然，为使这一定义合理，积分本身应有定义. 特别地，由于函数

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

的图形是以原点为圆心、半径是 1 的圆在第一象限的圆弧，所以积分

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

的值是单位圆面积的 1/4.

回忆在 5.2 节中我们提出数 π 的解析定义：假定下述三角函数的微分方程有解，记为 $\cos x$：

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 & 对所有 x \\ f(0) = 1 & 且 \quad f'(0) = 0. \end{cases}$$

则数 $\pi/2$ 定义为使得 $\cos x = 0$ 的最小正数.

当然，数 π 具有半径为单位长度的圆的面积的几何意义. 下面的公式则将 π 的解析定义与其寻常的几何意义衔接起来.

命题 7.8

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

180 如图 7.1 所示.

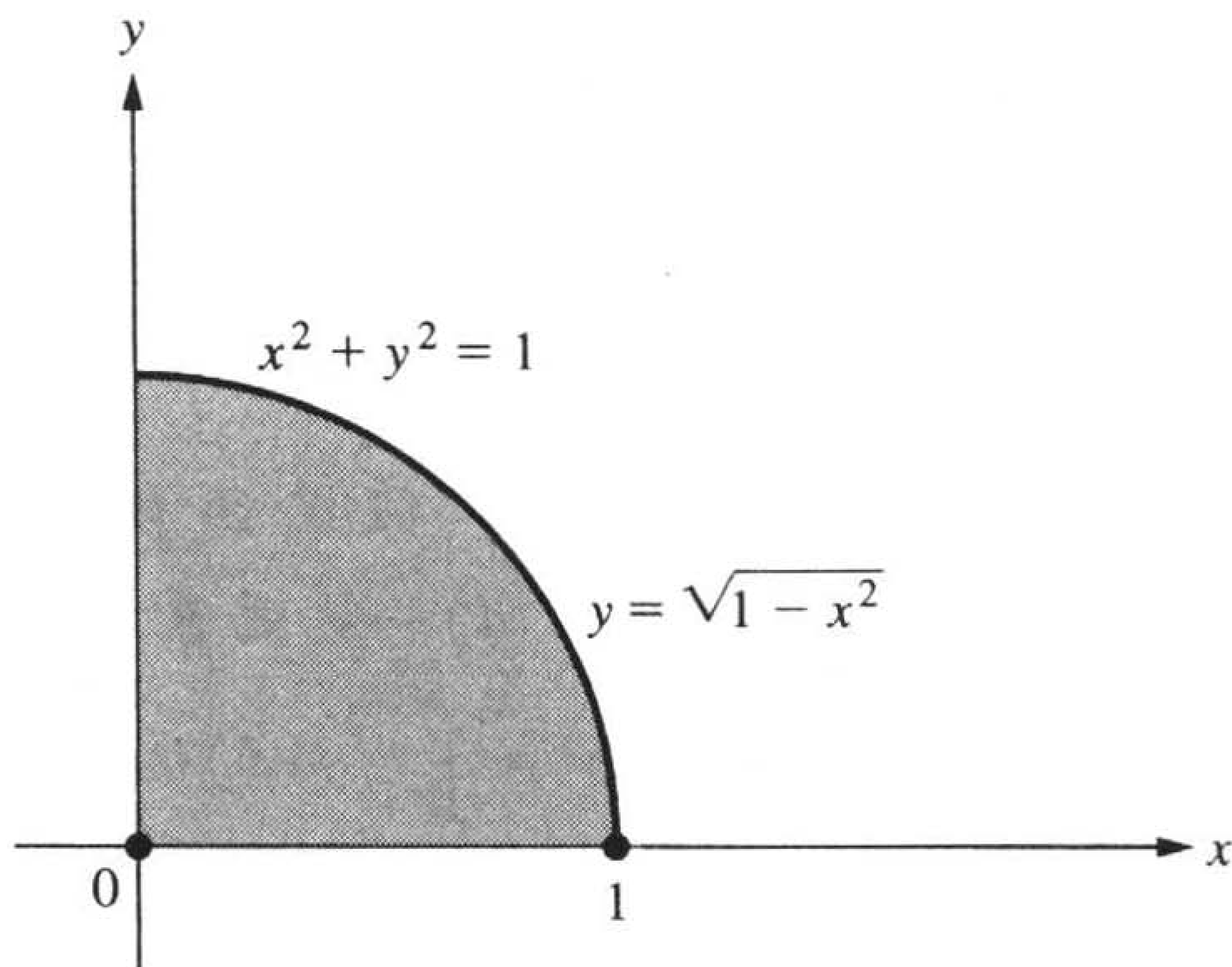


图 7.1 面积 $=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi/4$

证明 由于 $\sin 0=0$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，函数 $\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是递增且可微的. 由定理 7.7(即积分的换元性质)得到

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,dx.$$

另一方面，由于在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $\cos x\geqslant 0$，由毕达哥拉斯恒等式与余弦函数的加法公式[⊖]，对所有 $x\in[0,\pi/2]$，

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x=\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2.$$

这样，

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]dx.$$

由于对 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)=\frac{1+\cos 2x}{2}$，可用第一基本定理推断：由于 $\sin 0=\sin\pi=0$，所以

181

$$\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$ ■

例 7.9 考虑积分

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx.$$

对所有 $x\in[0,1]$，定义 $f(x)\equiv e^{x^2}$. 如果试图将函数 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 写成 $f=hg'$: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 以

⊖ 回顾 5.3 节中毕达哥拉斯恒等式及余弦函数的加法公式是在余弦函数是上三角函数的微分方程的唯一解的基础上导出的.

便于能够算出 $\int_0^1 gh'$，我们会发现无法做到这一点．类似地，如果试图换元，我们很快会发现很难选择函数 g：$[c, d]\to\mathbb{R}$ 以使得容易算出 $\int_c^d (f\circ g)g'$． ■

我们所考虑的例子说明了分部积分法与换元积分法的用处与局限性．当然，我们的目标是把一个积分问题转换成另一个可以直接应用第一基本定理的积分．但是当不能作这样的简化时，就需要开发估计积分的方法．在7.4节将讨论这方面的问题．

习题

1. 计算下列积分：

 a. $\int_1^2 xe^{x^2}dx$ b. $\int_0^1 (1-x)^2\sqrt{2+x}dx$ c. $\int_2^3 x^3e^{x^2}dx$ d. $\int_2^{\pi} x^2\cos x dx$

2. 计算下列积分：

 a. $\int_1^e (\ln x)^2dx$ b. $\int_4^5 \frac{1+x}{1-x}dx$ c. $\int_4^9 \frac{1}{1-x^2}dx$ d. $\int_3^4\left(\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)dx$

3. 证明对任意两个自然数 n 及 m，
$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^m x^n dx.$$

4. 假定函数 f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶导数．固定数 a．证明
$$\text{对所有 } x,\quad \int_a^x f''(t)(x-t)dt = -(x-a)f'(a)+f(x)-f(a).$$

182

5. 假定函数 f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶导数．证明对任意两个数 a 及 b，
$$\int_a^b xf''(x)dx = bf'(b)+f(a)-af'(a)-f(b).$$

6. 证明半径为 r 的圆的面积是 πr^2．

7. 计算例7.6中的三个积分．

8. 假定函数 f：$[0, \infty)\to\mathbb{R}$ 是连续且严格递增的，f：$(0, \infty)\to\mathbb{R}$ 是可微的．此外，假定 $f(0)=0$．考虑公式
$$\text{对所有 } x\geqslant 0,\quad \int_0^x f+\int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x).$$
用面积为这一公式提供几何解释，然后证明这一公式．（提示：对该公式求导并应用恒等准则．）

9. 假定函数 f：$[0, \infty)\to\mathbb{R}$ 是连续且严格递增的，并满足 $f(0)=0$ 及 $f([0, \infty))=[0, \infty)$．对所有 $x\geqslant 0$，定义
$$F(x)=\int_0^x f \quad 及 \quad G(x)=\int_0^x f^{-1}.$$

 a. 证明杨氏不等式(Young's Ineguality)：
$$\text{对所有 } a\geqslant 0 \text{ 及 } b\geqslant 0,\quad ab\leqslant F(a)+G(b).$$
（提示：如习题8中的公式那样，画张草图有助于思考．）

 b. 对 $f(x)=x^{p-1}$（其中 $x\geqslant 0$，且 p 是大于1的固定数），用杨氏不等式证明：如果选取数 q 满足 $1/p+1/q=1$，则
$$\text{对所有 } a\geqslant 0 \text{ 及 } b\geqslant 0 \text{ 有 } ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

7.3 达布和与黎曼和的收敛性

回忆对一有界函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$，称定义域 $[a, b]$ 的划分序列 $\{P_n\}$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的划

分的阿基米德序列，如果

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0. \quad (7.10)$$

阿基米德-黎曼定理断言：函数 f：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可积的，如果存在 f 在 $[a,b]$ 上的划分的阿基米德序列，此外，对任一这样的阿基米德序列，

183

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\int_a^b f \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\int_a^b f. \quad (7.11)$$

现在要证明一个定理，称为达布和收敛定理，它断言：对于在 $[a,b]$ 上可积的函数 f，如果划分序列 $\{P_n\}$ 有性质

$$\lim_{n\to\infty}\text{gap}P_n=0,$$

则此序列是 f 在 $[a,b]$ 上的阿基米德划分序列且因此有

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\int_a^b f \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\int_a^b f.$$

为证明达布和收敛定理，先建立一个比较两个不同划分的达布和的预备性结果. 对一可积函数 f：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 与 $[a,b]$ 的一个划分 P，加细引理断言：如果 P^* 是 P 的加细，则

$$L(f,P)\leqslant L(f,P^*)\leqslant\int_a^b f\leqslant U(f,P^*)\leqslant U(f,P). \quad (7.12)$$

估计式(7.12)当然要求 P^* 是 P 的加细. 但是，如果 P^* 不是 P 的加细，我们有下述关于两个不同划分的达布和比较的精确估计：如果 $\text{gap}P^*$ 很小，则基于 P^* 的达布和与 P^* 是 P 的加细情形下基于 P 的达布和一样.

引理 7.10(达布和比较引理) *假设函数 f：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界的并令 $M\geqslant 0$ 使得*

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M \quad x\in[a,b].$$

令 P 是 $[a,b]$ 的一个划分，它有 k 个划分点，令 P^* 是 $[a,b]$ 另外的任一划分，则

$$L(f,P)-E\leqslant L(F,P^*) \quad 及 \quad U(f,P^*)\leqslant U(f,P)+E, \quad (7.13)$$

其中

$$E\equiv k\cdot M\cdot\text{gap}P^*.$$

证明 令

$$P^*=\{x_0,\cdots,x_n\} \quad 及 \quad P=\{z_0,\cdots,z_{k-1}\}.$$

如通常一样，当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，令 $M_i\equiv\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$ 并观察到由 M 的选取，$M_i\leqslant M$. 从而由 gap 的定义，有

$$M_i(x_i-x_{i-1})\leqslant M\cdot\text{gap}P^* \quad (7.14)$$

对 $1\leqslant i\leqslant n$，我们称下标 i 是交叉下标，倘若 P^* 的第 i 个划分开区间 (x_{i-1},x_i) 包含有划分 P 的划分点 z_j. 令 $\mathcal{C}$ 是下标 $\{1,\cdots,n\}$ 中的所有交叉下标集，因为 P 含有 $k-2$ 个非端点的划分点，而 P 的每个划分点 z_j 至多属于一个开区间 (x_{c-1},x_i)，这样交叉下标是小于 k 的. 因此，由估计式(7.14)，我们有以下交叉下标对 $U(f,P^*)$ 贡献的估计：

184

$$\sum_{i\in C}M_i(x_i-x_{i-1})\leqslant k\cdot M\cdot\text{gap}P*. \quad (7.15)$$

现在估计 $U(f,P^*)$ 中那些非交叉下标部分的贡献. 如果下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 不是交叉下标，

则开区间(x_{i-1}, x_i)不包含P的任何划分点，因此划分P^*的区间$[x_{i-1}, x_i]$包含在P的某个划分区间中. 因此，$[x_{i-1}, x_i]$是P'的一个划分区间，这个P'是P与P^*的公共加细. 因此

$$\sum_{i\notin C} M_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant U(f,P').$$

但是，由加细引理知

$$U(f,P') \leqslant U(f,P).$$

这样，

$$\sum_{i\notin C} M_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant U(f,P). \tag{7.16}$$

我们把$U(f, P^*)$中交叉下标及非交叉下标相应贡献的估计相加得到下面对$U(f, P^*)$的上估计：

$$\begin{aligned} U(f,P^*) &\equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\notin C} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in C} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant U(f,P) + k \cdot M \cdot \mathrm{gap}P^*. \end{aligned}$$

用完全类似的论证，我们可获得对应的$L(f, P^*)$的下估计：

$$L(f,P) - k \cdot M \cdot \mathrm{gap}P^* \leqslant L(f,P^*).$$

至此建立了式(7.13)中的两个估计. ■

下述简单引理来自于阿基米德-黎曼定理(习题7).

引理 7.11 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的. 则对每一正数$\varepsilon>0$，区间$[a, b]$存在一划分P使得

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

185

定理 7.12(达布和收敛定理) 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是有界的. 则下述两个论断是等价的：

i. 函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的.

ii. 对$[a, b]$任一划分序列$\{P_n\}$，若

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{gap}P_n = 0,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0, \tag{7.17}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_a^b f. \tag{7.18}$$

证明 假设(ii)成立. 选取$[a, b]$的划分序列$\{P_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{gap}P_n = 0.$$

由于(ii)成立，故

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0. \tag{7.19}$$

依照阿基米德-黎曼定理，函数f在$[a, b]$上是可积的.

为证明其逆，假设f是可积的. 令$\{P_n\}$是$[a, b]$的任一划分序列，满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{gap}P_n = 0.$$

我们希望证明(7.17). 为此，由序列收敛的定义，选取 $\varepsilon>0$，需证明存在下标 N 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$0\leqslant U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon. \tag{7.20}$$

由于 $\varepsilon/2>0$，由引理7.11，可选取$[a,b]$的一个划分 P，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon/2.$$

令 k 是划分 P 的划分点数并令 $M\geqslant 0$，使得当 $x\in[a,b]$时有

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M.$$

这样，由上面的达布和比较引理，以 P_n 替代 P^*，对每个下标 n 有

$$L(f,P)-E_n\leqslant L(f,P_n)\quad 及\quad U(f,P_n)\leqslant U(f,P)+E_n, \tag{7.21}$$

其中

186

$$E_n\equiv k\cdot M\cdot \mathrm{gap}P_n.$$

由此对每个下标 n，

$$\begin{aligned}0\leqslant U(f,P_n)-L(f,P_n)&\leqslant[U(f,P)+E_n]-[L(f,P)-E_n]\\&=[U(f,P)-L(f,P)]+2E_n\\&<\varepsilon/2+[2k\cdot M\cdot \mathrm{gap}P_n].\end{aligned}$$

即对每个下标 n，

$$0\leqslant U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon/2+[2k\cdot M\cdot \mathrm{gap}P_n]. \tag{7.22}$$

由假定，

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{gap}P_n=0,$$

从而也有

$$\lim_{n\to\infty}[2k\cdot M\cdot \mathrm{gap}P_n]=0.$$

这样可选下标 N 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$0\leqslant[2k\cdot M\cdot \mathrm{gap}P_n]<\varepsilon/2.$$

从估计式(7.22)及上面 N 的选法，我们看到所需的估计(7.20)对下标 N 的这一选取也成立. 这样$\{P_n\}$是 f 在$[a,b]$上的阿基米德划分序列，故由阿基米德–黎曼定理知式(7.18)成立. ■

定义 考虑函数f: $[a,b]\to\mathbb{R}$，设 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$是区间$[a,b]$的划分. 对每个下标 $i\geqslant 1$，设 c_i 是区间$[x_{i-1},x_i]$中的点. 则和

$$\sum_{i=1}^{n}f(c_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{7.23}$$

称为函数f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 基于划分 P 的**黎曼和**(Riemann sum).

我们用符号 $R(f,P,C)$表示黎曼和(7.23)是方便的，其中 C 表示在划分 P 的诸划分区间内的选取点集$\{c_1,\cdots,c_n\}$[⊖]. 显然，如果函数f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界的，则对$[a,b]$的每一划分 P 及选取 C 有

$$L(f,P)\leqslant R(f,P,C)\leqslant U(f,P).$$

187

考虑这一不等式及达布和收敛定理，自然得到下述收敛结果.

⊖ 当使用符号 $R(f,P,C)$时，我们其实已隐含地假设 C 是已选定了的.

定理 7.13(黎曼和收敛定理) 假设函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$是可积的. 对每个自然数n, 令P_n是$[a, b]$的划分而$R(f, P_n, C_n)$是黎曼和. 若

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{gap}P_n = 0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}R(f,P_n,C_n) = \int_a^b f. \tag{7.24}$$

证明 对每个下标n,

$$L(f,P_n) \leqslant R(f,P_n,C_n) \leqslant U(f,P_n).$$

依照达布和收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n) = \int_a^b f \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}U(f,P_n) = \int_a^b f.$$

这样,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}L(f,P_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}R(f,P_n,C_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}U(f,P_n) = \int_a^b f.$$

所以(7.24)成立. ■

例 7.14 对每个自然数n, 定义P_n是$[0, 1]$的分成n个等长的划分区间的规则划分. 考虑积分$\int_0^1\sqrt{x}\,dx$基于划分P_n的黎曼和,其中对$1\leqslant i\leqslant n$,令$c_i = i/n$. 由上面的黎曼和收敛定理及第一基本定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right] = \int_0^1\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$ ■

习题

1. 对固定的正数β, 求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^\beta+2^\beta+\cdots+n^\beta}{n^{\beta+1}}\right].$$

2. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right].$$

188

3. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2}\right].$$

4. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}\right].$$

5. 设$b>1$. 对于$\int_1^b[1/\sqrt{x}]\,dx$, 求$[1, b]$的划分$P=\{x_0, \cdots, x_n\}$的由选取$c_i=[(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{i-1}})/2]^2\ (1\leqslant i\leqslant n)$所得到的黎曼和的值.

6. 假定函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$是可积的. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\right] = \int_0^1 f.$$

7. 证明引理 7.11.

8. 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的. 为确定定义域 $[a, b]$ 的划分序列 $\{P_n\}$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的阿基米德划分序列, 条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{gap}P_n=0$ 是必要的吗?

9. 假设函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 令 P 是定义域 $[a, b]$ 的任一划分. 证明存在黎曼和 $R(f, P, C)$ 等于 $\int_a^b f$. (提示: 对积分用中值定理.)

10. 假定函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是利普希茨函数, 即存在数 c 使得

$$\text{对}[a,b]\text{中的所有 } u \text{ 及 } v,\quad |f(u)-f(v)|\leqslant c|u-v|.$$

设 P 是 $[a, b]$ 的划分而 $R(f, P, C)$ 是基于 P 的黎曼和. 证明

$$\left|R(f,P,C)-\int_a^b f\right|\leqslant c\cdot(b-a)\cdot[\operatorname{gap}P].$$

11. 设 P 与 n 是自然数且 $n\geqslant 2$. 证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p\leqslant\frac{n^{p+1}}{p+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^p.$$

(提示: 用关于 n 的归纳法论证.)

12. 对自然数 p, 用上题证明

189

$$\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}.$$

13. (用费马(Fermat)方法计算 $\int_1^b x^\beta dx$) 设 $b>1$ 且 $\beta\neq -1$. 对所有 $x\in[1, b]$ 定义 $f(x)=x^\beta$. 对每个自然数 n, 令 $P_n=\{x_0, \cdots, x_n\}$ 是 $[1, b]$ 的划分, 其中 $x_i=b^{i/n}(0\leqslant i\leqslant n)$.

a. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b^{1/n}-1}{b^{1/n}}\left[\frac{1-(b^{\beta+1})^{\frac{n+1}{n}}}{1-b^{\frac{\beta-1}{n}}}-1\right].$$

b. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-(b^{1/n})^{\beta+1}}{1-b^{1/n}}=\beta+1.$$

c. 用(a)及(b)证明

$$\int_1^b x^\beta dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b^{\beta+1}-1}{\beta+1}.$$

7.4 积分的近似法

存在许多函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是可积的, 但是它们却不可能用换元法、分部积分法等方法来利用第一基本定理计算 $\int_a^b f(x)\,dx$. 然而, 在前几节中所确定的达布和或黎曼和的序列是收敛于积分的, 只要对应的划分序列的间隙序列是收敛于 0 的. 但是, 我们并没有提供它们与积分之间的差的估计. 本节讨论积分值的近似计算, 以及近似计算过程所产生的误差的界.

局部误差与整体误差

取 $[a, b]$ 的划分 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$. 则对每个下标 $i\geqslant 1$, 用某个 A_i 近似

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,dx,$$

并定义 E_i 为

$$E_i \equiv \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x - A_i.$$

定义 $A \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i$ 及 $E \equiv \sum_{i=1}^{n} E_i$，所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - A = E.$$

E_i 称为局部误差(local error)，E 称为整体误差(global error). 一旦估计了局部误差，也就容易得到整体误差的估计. 我们将介绍两种近似方法：梯形法则(Trapezoid Rule)与辛普森法则(Simpson's Rule).

190

梯形法则

对于梯形法则，考虑区间[a, b]的划分 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$. 对每个下标 $i \geqslant 1$，用

$$A_i \equiv \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

作为 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)$ 的近似值. 如果 $f(x_i) \geqslant 0$ 及 $f(x_{i-1}) \geqslant 0$，上面的 A_i 其实就是以 $(x_{i-1},0)$，$(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$，$(x_i, f(x_i))$ 及 $(x_i, 0)$ 为顶点的梯形的面积． 如图 7.2 所示. 下面先估计局部误差.

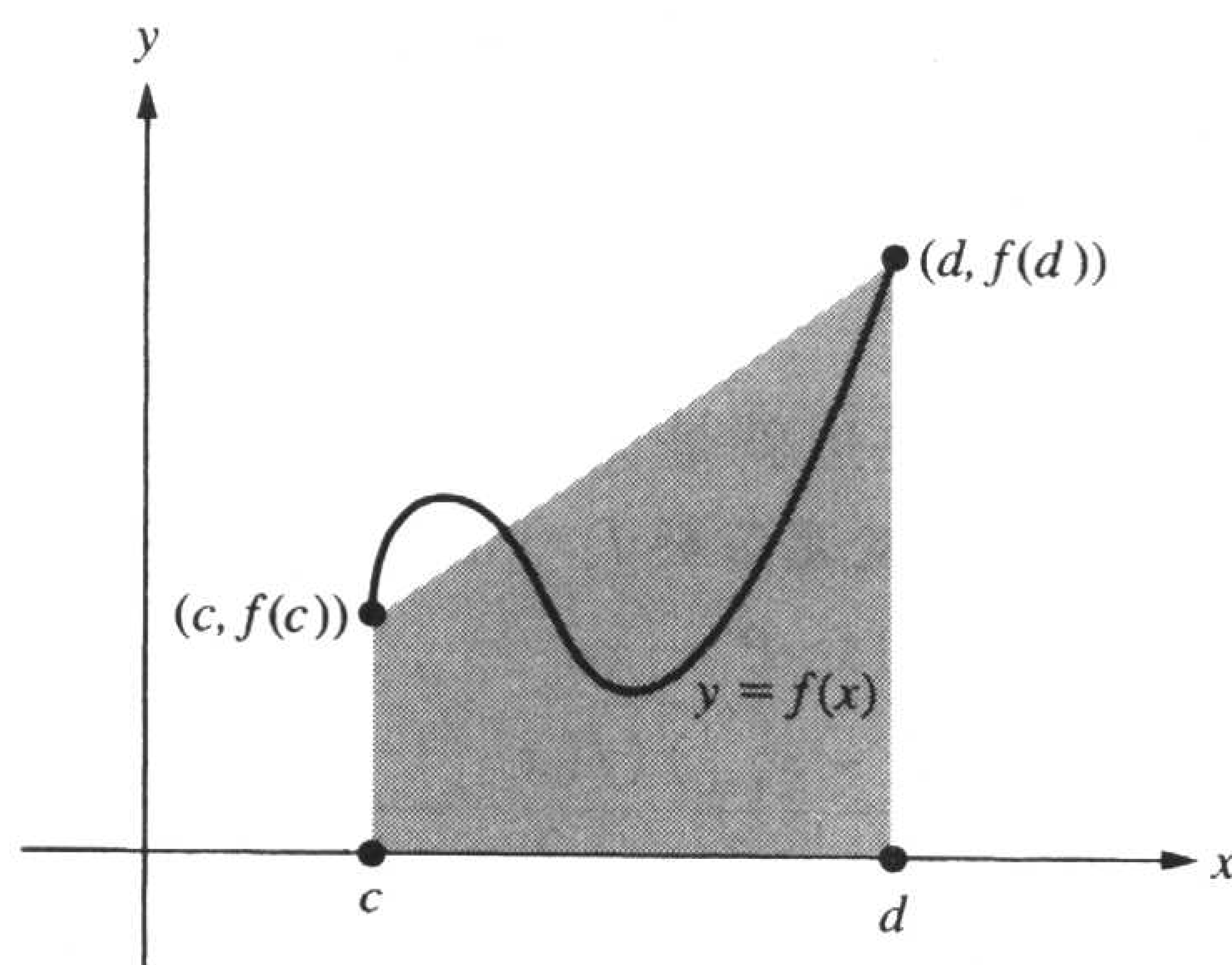


图 7.2 $\int_c^d f$ 的梯形近似

定理 7.15(梯形法则的局部误差) 假设函数 f：[c, d]$\to\mathbb{R}$ 是连续的，它在开区间(c, d)中有二阶导数. 则在开区间(c, d)中存在点 ζ 满足

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(d-c)(f(c)+f(d))}{2} = \frac{-(d-c)^3}{12} f''(\zeta). \tag{7.25}$$

证明 令 $m \equiv (d+c)/2$ 是区间[c, d]的中点，则若 $t_0 \equiv (d-c)/2$，我们有 $m - t_0 = c$ 及 $m + t_0 = d$. 对 $0 \leqslant t \leqslant t_0$，设 $E(t)$ 是 f 在区间[$m-t$, $m+t$]上积分的直接梯形近似的误差. 于是定义辅助函数 E：[0, t_0]$\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\text{对 } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad E(t) = \left[\int_{m-t}^{m+t} f(x)\,\mathrm{d}x\right] - t[f(m+t) + f(m-t)].$$

观察到(7.25)式左边恰好是 $E(t_0)$. 现在定义另一个函数 H：[0, t_0]$\to\mathbb{R}$ 如下：

191

$$\text{对 } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad H(t) = E(t) - \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 E(t_0).$$

由命题 6.27 得到函数 $E: [0, t_0] \to \mathbb{R}$ 是连续的，所以函数 $H: [0, t_0] \to \mathbb{R}$ 也是连续的. 此外，由第二基本定理及链式法则可得

$$\text{对 } 0 < t < t_0, \quad E'(t) = f(m+t) + f(m-t) - [f(m+t) + f(m-t)] - t[f'(m+t) - f'(m-t)]$$
$$= -t[f'(m+t) - f'(m-t)].$$

于是，对 $0 < t < t_0$,

$$H'(t) = -t[f'(m+t) - f'(m-t)] - \frac{3t^2}{t_0^3} E(t_0).$$

显然，$H(0) = H(t_0) = 0$. 可以将罗尔定理用于函数 $H: [0, t_0] \to \mathbb{R}$，从而在 $(0, t_0)$ 中选取点 t_*，在该点处有 $H'(t_*) = 0$，也就是

$$-t_*[f'(m+t_*) - f'(m-t_*)] - \frac{3t_*^2}{t_0^3} E(t_0) = 0.$$

现将中值定理用于函数 $f': [m-t_*, m+t_*] \to \mathbb{R}$，并在 $(m-t_*, m+t_*)$ 中选取 ζ，在该点处有

$$f'(m+t_*) - f'(m-t_*) = 2t_* f''(\zeta).$$

将上面的等式代入到前面的方程中，得到

$$2t_*^2 \left[f''(\zeta) + \frac{3}{2t_0^3} E(t_0)\right] = 0.$$

但 $t_* \neq 0$，由于 $t_0 = [d-c]/2$,

$$E(t_0) = \frac{-(d-c)^3}{12} f''(\zeta). \tag{7.26}$$

正如我们已注意到的，(7.25)的左边就是 $E(t_0)$，这样式(7.25)就由(7.26)得到. ■

定理 7.16(梯形法则的整体误差) *假设函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的，而它在开区间 (a, b) 上有有界的二阶导数. 对于区间 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$,*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i))}{2} + E, \tag{7.27}$$

$$|E| \leqslant \frac{M[\text{gap}P]^2(b-a)}{12}, \tag{7.28}$$

其中

192

$$M \equiv \sup\{|f''(x)| \mid x \in (a,b)\}.$$

证明 对每个下标 $i \geqslant 1$，可用划分区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上梯形法则的局部误差估计在开区间 (x_{i-1}, x_i) 中选取一点 ζ_i，在该点处有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{(x_i - x_{i-1})(f(x_i) + f(x_{i-1}))}{2} = \frac{-(x_i - x_{i-1})^3 f''(\zeta_i)}{12}.$$

将 n 个等式求和可知(7.27)式成立，其中

$$E = -\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^3 f''(\zeta_i)}{12}.$$

然而由三角不等式及 gap$P$ 与 M 的定义，

$$|E| \leqslant \frac{[\text{gap}P]^2}{12}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})|f''(\zeta_i)|$$
$$\leqslant \frac{[\text{gap}P]^2 M}{12}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{M[\text{gap}P]^2(b-a)}{12}.$$ ■

例 7.17 用梯形法则估计 $\ln 2 = \int_1^2 1/t\mathrm{d}t$. 对 $1 \leqslant t \leqslant 2$ 定义 $f(t) = 1/t$. 注意到

$$对\ 1 \leqslant t \leqslant 2,\quad 0 \leqslant f''(t) \leqslant 2.$$

对自然数 n，令 P_n 是将区间[1，2]分成几个长度相等的子区间的划分. 则(见习题 3)

$$\ln 2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2} + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \frac{1}{4}\right] + E_n,$$

其中

$$0 \leqslant |E_n| \leqslant \frac{1}{6n^2}.$$

取 $n=10$，经过简短的计算得到 ln2 的不足近似值(lower approximation)为 0.6937714，其误差至多是1/600. ■

从梯形法则的局部误差估计，我们注意到当 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的图形是一直线时，梯形法则给出积分的精确值. 此外，当对所有 $x\in(a, b)$，

$$f''(x) \geqslant 0$$

193

时，即意味着函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 是凸的(convex)，梯形法则给出积分的过剩近似值(upper approximation). 上面的每个论断在几何上是显而易见的.

辛普森法则

第二种近似方法称为辛普森法则. 虽然从几何上寻找这一方法并不容易，但一般说来该法则比梯形法则更精确. 给定可积函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 及区间 $[a, b]$ 的划分 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$，对每个下标 $i\geqslant 1$，用下式作为积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ 的辛普森法则近似值：

$$A_i \equiv \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right]. \qquad (7.29)$$

比较近似方法优劣的一种方式是看对什么函数积分的近似值与积分值严格地一致. 对梯形法则，只要函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 是次数小于 2 的多项式，也就是 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 的图形是直线，积分近似值与积分值就严格地一致. 我们将证明只要函数 f：$[a, b]\to\mathbb{R}$ 是次数小于 4 的多项式，辛普森法则的积分近似值与积分值就严格地一致[⊖].

为得出辛普森法则公式的局部误差估计，首先注意下面的罗尔定理的稍微推广.

定理 7.18(推广的罗尔定理) 假设函数 g：$[c, d]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 对于自然数 n，假设 g 在开区间 (c, d) 上有 $n+1$ 阶导数. 令 x_0 是 (c, d) 中一点且有

⊖ 辛普森法则公式可如下导出：对函数 f：$[c, d]\to\mathbb{R}$，存在唯一的二次多项式 p：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它在 $x=c$，$x=(c+d)/2$ 及 $x=d$ 处与函数 f：$[c, d]\to\mathbb{R}$ 取值一致. 对该多项式可以证明

$$\int_c^d p = \frac{(d-c)}{6}\left[f(c) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right].$$

$$g(x_0)=g'(x_0)=\cdots=g^{(n)}(x_0)=0.$$

则对$[c,d]$中每个点$x\neq x_0$(在该点处$g(x)=0$)，必存在点ζ严格地介于x_0与x之间，且在该点处

$$g^{(n+1)}(\zeta)=0.$$

证明 假设$x>x_0$. 将罗尔定理用于函数$g:[x_0,x]\to\mathbb{R}$，可在(x_0,x)内选取点z_1，在该点处$g(z_1)=0$. 再将罗尔定理用于函数$g':[x_0,z_1]\to\mathbb{R}$，在$(x_0,z_1)$中选取点$z_2$，在该点处$g''(z_2)=0$. 连续作这一过程$n$次，可在$(x_0,x)$中求得点$z_{n+1}=\zeta$，在该点处$g^{(n+1)}(\zeta)=0$. ■

194

定理 7.19(辛普森法则的局部误差) 假定函数$f:[c,d]\to\mathbb{R}$是连续的，而它在开区间(c,d)上有四阶导数. 则在开区间(c,d)中存在点ζ，在该点处

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(d-c)}{6}\left[f(c)+4f\left(\frac{c+d}{2}\right)+f(d)\right]=-\frac{1}{2880}(d-c)^5f^{(4)}(\zeta). \tag{7.30}$$

证明 令$m\equiv(c+d)/2$是区间$[c,d]$的中点. 那么，如果$t_0\equiv(d-c)/2$，我们有$m-t_0=c$及$m+t_0=d$. 对于$0\leqslant t\leqslant t_0$，令$E(t)$是$f$在区间$[m-t,m+t]$上的积分的辛普森近似的误差，这样定义辅助函数$E:[0,t_0]\to\mathbb{R}$如下：

$$\text{对 } -t_0\leqslant t\leqslant t_0,\quad E(t)=\int_{m-t}^{m+t}f-\frac{t}{3}[f(m+t)+4f(m)+f(m-t)].$$

注意到(7.30)式的左边是$E(t_0)$. 现定义函数$H:[-t_0,t_0]\to\mathbb{R}$如下：

$$\text{对 } -t_0\leqslant t\leqslant t_0,\quad H(t)=E(t)-\left(\frac{t}{t_0}\right)^5E(t_0). \tag{7.31}$$

由命题6.27推出函数$E:[-t_0,t_0]\to\mathbb{R}$是连续的，所以函数$H:[-t_0,t_0]\to\mathbb{R}$也是连续的，显然$H(0)=H(t_0)=0$，现在将证明$H'(0)=H''(0)=0$因而可应用推广的罗尔定理. 应用第二基本定理和链式法则，在$(-t_0,t_0)$的每一点t处，有下列导数的直接计算：

$$\begin{aligned}E'(t)&=f(m+t)+f(m-t)-\frac{1}{3}[f(m+t)+4f(m)+f(m-t)]\\&\quad-\frac{t}{3}[f'(m+t)-f'(m-t)]\\&=\frac{2}{3}[f(m+t)-2f(m)+f(m-t)]-\frac{t}{3}[f'(m+t)-f'(m-t)],\\E''(t)&=\frac{2}{3}[f'(m+t)-f'(m-t)]-\frac{1}{3}[f'(m+t)-f'(m-t)]\\&\quad-\frac{t}{3}[f''(m+t)+f''(m-t)]\\&=\frac{1}{3}[f'(m+t)-f'(m-t)]-\frac{t}{3}[f''(m+t)+f''(m-t)],\\E'''(t)&=-\frac{t}{3}[f'''(m+t)-f'''(m-t)].\end{aligned}$$

195

这些计算连同(7.31)式表明$H(0)=H'(0)=H''(0)=0$且

$$\text{对 } -t_0<t<t_0,\quad H'''(t)=-\frac{t}{3}[f'''(m+t)-f'''(m-t)]-\frac{60t^2}{t_0^5}E(t_0).$$

因此，由于$H(t_0)=0$，在$n=2$的情形下可应用推广的罗尔定理，在$(0,t_0)$中选取点t_*使得

$H'''(t_*)=0$，也就是

$$-\frac{t_*}{3}[f'''(m+t_*)-f'''(m-t_*)]-\frac{60t_*^2}{t_0^5}E(t_0)=0. \tag{7.32}$$

最后，将中值定理用于函数f'''：$[m-t_*,\ m+t_*]\to\mathbb{R}$，在$(m-t_*,\ m+t_*)$中选取点$\zeta$，在该点处

$$f'''(m+t_*)-f'''(m-t_*)=2t_*f^{(4)}(\zeta).$$

将上面等式代入式(7.32)推出

$$t_*^2\left[-\frac{2}{3}f^{(4)}(\zeta)-\frac{60}{t_0^5}E(t_0)\right]=0, \tag{7.33}$$

由于$t_*\neq 0$，$t_0=(d-c)/2$，因而有

$$E(t_0)=-\frac{(d-c)^5}{2880}f^{(4)}(\zeta). \tag{7.34}$$

由于$E(t_0)$是(7.30)式的左边，这样由(7.34)式可推出(7.30)式. ■

推论 7.20 对次数最多为 3 的多项式 P：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及数 $c<d$，

$$\int_c^d p(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(d-c)\left[p(c)+4p\left(\frac{c+d}{2}\right)+p(d)\right].$$

证明 由于对每个数ζ，$p^{(4)}(\zeta)=0$，于是由辛普森法则的局部误差界立即可得要证的结果. ■

定理 7.21（辛普森法则的整体误差） 设函数f：$[a,\ b]\to\mathbb{R}$是连续的，而它在开区间$(a,\ b)$上有有界的四阶导数. 令$P=\{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$是区间$[a,\ b]$的划分，则

$$\int_a^b f=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+f(x_{i-1})\right]+E, \tag{7.35}$$

$$|E|\leqslant\frac{M[\mathrm{gap}P]^4(b-a)}{2880},$$

[196]

其中

$$M\equiv\sup\{|f^{(4)}(x)|\mid a<x<b\}.$$

证明 对每个下标$i\geqslant 1$，可以应用划分区间$[x_{i-1},\ x_i]$上的辛普森法则的局部误差估计在开区间$(x_{i-1},\ x_i)$中选取点ζ_i，使得在该点处

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f-\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+f(x_{i-1})\right]=-\frac{1}{2880}(x_i-x_{i-1})^5f^{(4)}(\zeta_i).$$

将n个等式求和，可见(7.35)式成立，其中

$$E=-\frac{1}{2880}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})^5f^{(4)}(\zeta_i).$$

然而由三角不等式和$\mathrm{gap}P$及M的定义可得

$$|E|\leqslant\frac{[\mathrm{gap}P]^4}{2880}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})|f^{(4)}(\zeta_i)|\leqslant\frac{M[\mathrm{gap}P]^4}{2880}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})$$

$$=\frac{M[\mathrm{gap}P]^4(b-a)}{2880}.$$

■

习题

1. 用第一基本定理(对导数求积分)计算下列每一个积分. 以划分 $P=\{c, d\}$ 用梯形法则与辛普森法则计算积分的近似值. 比较由定理 7.14 与 7.19 所提供的误差估计与实际生成的误差.

 a. $\int_1^2 (2x+3)\,dx$ b. $\int_0^1 x^2\,dx$ c. $\int_0^1 x^4\,dx$

2. 对下面的每个积分, 通过直接计算验证推论 7.20.

 a. $\int_0^1 (x^2+x^3)\,dx$ b. $\int_2^3 (x+1)^2\,dx$

3. 假设函数 $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的, 而它在开区间 (a, b) 上有有界的二阶导数. 设 n 是自然数, 证明

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(a)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)+\frac{f(b)}{2}\right]+E,$$

其中

197

$$|E|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup\{|f''(x)|\,|\,x\in(a,b)\}.$$

4. 用习题 3 对 $n=3$ 估计 $\ln 4$ 并给出误差的一个上界.

5. 用习题 3 对 $n=4$ 估计 $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ 并给出误差的一个上界.

6. 用辛普森法则就 $P=\{1, 3/2, 2\}$ 估计 $\ln 2$ 并给出误差的一个上界.

7. 类似于梯形法则的一个近似法则是中点法则(Midpoint Rule), 该法则用 $(d-c)f([d+c]/2)$ 作为积分 $\int_c^d f(x)\,dx$ 的近似值. 证明:如果函数 $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是连续的, 而它的限制 $f: (c, d)\to\mathbb{R}$ 有二阶导数, 则对 (c, d) 中某个点 ζ,

$$\int_c^d f(x)\,dx=(d-c)f\left(\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{24}(d-c)^3 f''(\zeta).$$

(提示: 令 $m=(c+d)/2$, 令 $t_0=(d-c)/2$, 对 $-t\leqslant t\leqslant t_0$, 定义

$$H(t)=\left[\int_{m-t}^{m+t} f\right]-2tf(m)-\left(\frac{t}{t_0}\right)^3\int_{m-t_0}^{m+t_0} f+2\frac{t^3}{t_0^2}f(m).$$

就 $n=1$ 对函数 $H: [-t_0, t_0]\to\mathbb{R}$ 应用推广的罗尔定理.)

8. 对连续函数 $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ 及 $[a, b]$ 的一个划分 P, 证明 f 在 $[a, b]$ 上积分的梯形法则近似和辛普森法则近似都是 f 在 $[a, b]$ 上的黎曼和.

9. 求中点法则的整体误差估计.

10. 用中点法则(见习题 7)及梯形法则的局部误差估计求积分

$$\int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx$$

 的值, 以证明: 如果 $0<a<b$, 则

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}.$$

198

 (几何平均小于对数平均, 而对数平均小于算术平均.)

第8章 泰勒多项式逼近

8.1 泰勒多项式

多项式是最简单的函数类. 本章我们将研究如何用多项式来逼近一般函数.

两个函数接触的阶

定义 设 I 是点 x_0 的一个邻域. 函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 及 $g:I\to\mathbb{R}$ 称为在 x_0 有 0 阶接触(contact), 倘若 $f(x_0)=g(x_0)$. 对自然数 n, 函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 与 $g:I\to\mathbb{R}$ 称为在 x_0 有 n 阶接触, 倘若 $f:I\to\mathbb{R}$ 与 g: $I\to\mathbb{R}$ 有 n 阶导数, 且对 $0\leqslant k\leqslant n$ 有

$$f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0).$$

例 8.1 对 $0<x<\sqrt{2}$, 定义 $f(x)=\sqrt{2-x^2}$ 及 $g(x)=e^{1-x}$, 则

$$f(1)=g(1)\quad 且\quad f'(1)=g'(1)\quad 但\quad f''(1)\neq g''(1).$$

因此函数 f: $(0,\sqrt{2})\to\mathbb{R}$ 与 g: $(0,\sqrt{2})\to\mathbb{R}$ 在 $x_0=1$ 有 1 阶接触, 但没有 2 阶接触. 在点 $(1,1)$, 该点同时位于两个函数的图形上, 函数图形的切线相同. ■

对任一自然数 j 和任一数 x_0, 对所有 x 有

$$\frac{d}{dx}(x-x_0)^j=j(x-x_0)^{j-1}.$$

这样, 通过连续求导可得, 对每一对非负整数 k 及 ℓ,

$$\frac{d^k}{dx^k}[(x-x_0)^\ell]\bigg|_{x=x_0}=\begin{cases}k! & 若\ k=\ell\\ 0 & 若\ k\neq\ell.\end{cases}\tag{8.1}$$

命题 8.2 设 I 是点 x_0 的一个邻域而 n 是非负整数. 假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有 n 阶导数. 则存在唯一的次数最多为 n 的多项式, 它与函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 有 n 阶接触. 该多项式由以下公式定义:

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.\tag{8.2}$$

证明 如果 $n=0$, 函数仅是常数函数, 在 x_0 处的值为 $f(x_0)$, 结果显然成立. 假定 $n\geqslant 1$, 由式(8.1)幂的微分可得对 $0\leqslant k\leqslant n$,

$$\frac{d^k}{dx^k}[p_n(x)]\bigg|_{x=x_0}=f^{(k)}(x_0),$$

所以函数 f 与多项式 p_n 在 x_0 有 n 阶接触.

余下的是证明唯一性. 然而, 如果取次数最多为 n 的一般的多项式, 按 $(x-x_0)$ 的幂写成

$$p(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n,$$

则再次由公式(8.1)幂的微分, 显然对 $0\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\frac{d^k}{dx^k}[p(x)]\bigg|_{x=x_0}=k!c_k,$$

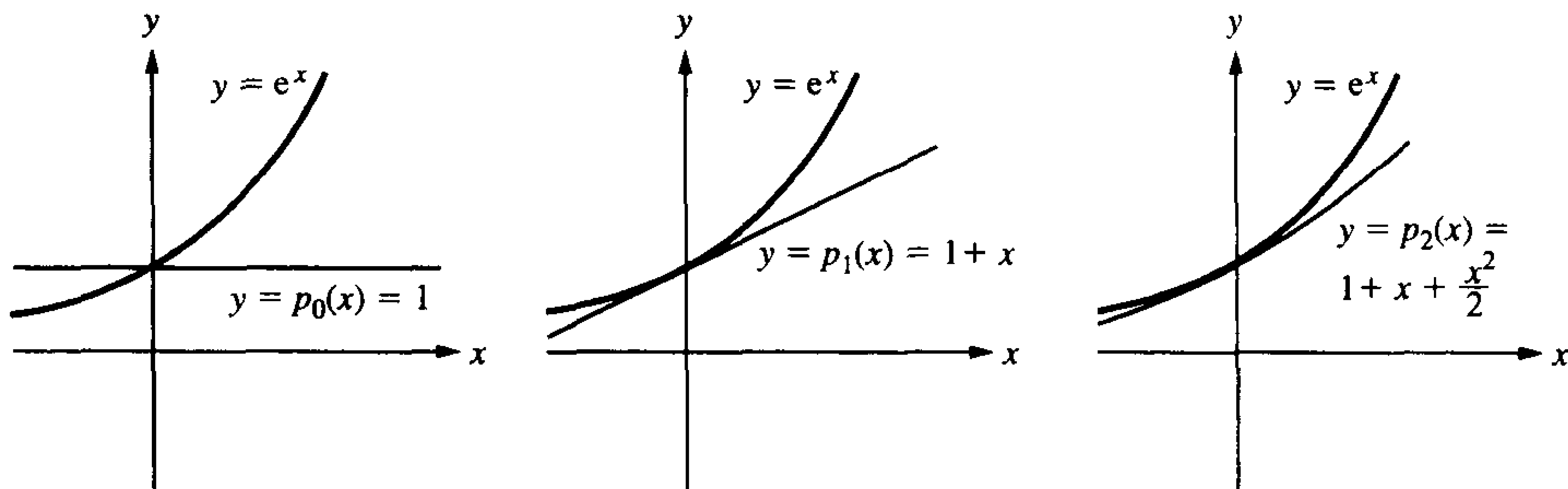
所以，如果多项式 p 与函数 f 有 n 阶接触，则对 $0 \leqslant k \leqslant n$，必有 $k!\ c_k = f^{(k)}(x_0)$，即 $p = p_n$. ■

由(8.2)式定义的多项式 p_n 称为函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处的 n 次泰勒多项式(Taylor polynomial).

泰勒多项式的例子

例 8.3 对所有 x 定义 $f(x) = \mathrm{e}^x$. 对每个自然数 k 及所有 x，$f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$. 如图 8.1 所示. 于是函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在点 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式由下式定义：

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$ ■



200

图 8.1 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 的 $p_0(x)$，$p_1(x)$ 及 $p_2(x)$

例 8.4 对 $x > -1$，定义 $f(x) = \ln(1 + x)$. 对每个自然数 k 及所有 $x > -1$，

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

于是 $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 处的 n 次泰勒多项式由下式定义：

$$p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$ ■

例 8.5 对所有 x，定义 $f(x) = \cos x$. 对每个自然数 k 及所有 x，$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ 而 $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$. 于是，对每个非负整数 n，余弦函数在 $x = 0$ 的泰勒多项式由下式给出：

$$p_{2n}(x) = p_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$ ■

例 8.6 对所有 $x > 0$，定义 $f(x) = \sqrt{x}$. 对每个自然数 k 及所有 $x > 0$，

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{1/2-k}.$$

于是函数 $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 在 $x = 1$ 处的三次泰勒多项式是

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.$$ ■

对于在一点有高阶接触的两个函数来说，当邻近这一点时有理由预料它们之间的差很小. 特别地，如果 I 是点 x_0 的一个邻域，而 p_n 是函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 x_0 的 n 次泰勒多项式，则对 I 中另一点 x，可以对差 $f(x) - p_n(x)$ 进行估计，并且当 x 逼近 x_0 及 n 很大时，该差会很小. 真正令

201

人吃惊的是即使当 x 远离 x_0 时，也常常会有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0.$$

在8.6节将会看到，某个函数的泰勒多项式并不对除 x_0 之外的任何 x 提供很好的近似值，而不管下标 n 有多么大[⊖]. 对所有 $x\in I$，定义 $R_n(x)\equiv f(x)-p_n(x)$，所以

$$\text{对所有 } x\in I,\quad f(x)=p_n(x)+R_n(x),$$

并称 $R_n:I\to\mathbb{R}$ 是 n 次余项(nth remainder). 在8.2节，我们将对这一余项加以分析.

习题

1. 对以下每一对函数，确定在指定点处的最高接触阶数：
   a. 对所有 x，$f(x)=x^2$ 及 $g(x)=\sin x$；$x_0=0$.
   b. 对所有 x，$f(x)=e^{x^2}$ 及 $g(x)=1+2x^2$；$x_0=0$.
   c. 对所有 $x>0$，$f(x)=\ln x$ 及 $g(x)=(x-1)^3+\ln x$；$x_0=1$.
   d. 对所有 $x>0$，$f(x)=\ln x$ 及 $g(x)=(x-1)^{200}+\ln x$；$x_0=1$.
2. 对以下每个函数，计算在指定点处的三次泰勒多项式：
   a. 对所有 x，$f(x)=\int_0^x 1/(1+t^2)\,dt$；$x_0=0$.
   b. 对所有 x，$f(x)=\sin x$；$x_0=0$.
   c. 对所有 x，$f(x)=\sin x+x^{200}$；$x_0=0$.
   d. 对所有 $x<2$，$f(x)=\sqrt{2-x}$；$x_0=1$.
3. 对所有 x，定义 $f(x)=x^6e^x$. 求函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处的6次泰勒多项式.
4. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有三阶导数且在 $x=0$ 处的3次泰勒多项式是 $p_3(x)=1+4x-x^2+x^3/6$. 证明存在点0的一个邻域使得 $f:I\to\mathbb{R}$ 是正的、严格递增的且有严格递增的导数.
5. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有二阶导数，且

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=e^{-x} & \text{对所有 } x \\ f(0)=0 \text{ 且 } f'(0)=2, \end{cases}$$

   求函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处的4次泰勒多项式.
6. 用 $x_0+(x-x_0)$ 替代 x，并用二项公式证明任一多项式 p 都可以表示成 $(x-x_0)$ 的幂的形式：

$$p(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n.$$

202

8.2 拉格朗日余项定理

本节对函数与它的 n 次泰勒多项式之间的差进行估计. 为便于参考，我们在此重述柯西中值定理的一个推论(定理4.24).

引理8.7 设 I 是开区间而 n 是非负整数，并假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有 $n+1$ 阶导数. 还假定在 I 中点 x_0 处，

$$f^{(k)}(x_0)=0,\quad 0\leqslant k\leqslant n.$$

则对 I 中每个点 $x\neq x_0$，存在严格介于 x 与 x_0 之间的点 c，在该点处

⊖ 在8.6节将叙述一个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它具有任意阶导数且若 $x\neq0$，$f(x)>0$，而若 $x=0$，f 的各阶导数都是0，因此 f 在 $x=0$ 处的所有泰勒多项式实际上就是常函数0.

$$f(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^n.$$

一般的余项定理是上述引理的简单推广.

定理 8.8(拉格朗日余项定理) 设 I 是点 x_0 的一个邻域并设 n 是非负整数，假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有 $n+1$ 阶导数. 则对 I 中每一点 $x\neq x_0$，存在严格介于 x 与 x_0 之间的点 c 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{8.3}$$

证明 考虑函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式，

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

由于函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 与 p_n 在 x_0 处有 n 阶接触，如果对所有 $x\in I$，定义函数 $R:I\to\mathbb{R}$ 如下：

$$R(x)\equiv f(x)-p_n(x),$$

则

$$R(x_0)=R'(x_0)=\cdots=R^{(n)}(x_0)=0.$$

按照上述引理，若在 I 中 $x\neq x_0$，则存在严格介于 x 与 x_0 之间的点 c，使得

$$R(x)=\frac{R^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

但由于 p_n 是次数最多为 n 的多项式，它的 $n+1$ 阶导数恒等于0，因此

203

$$R^{(n+1)}(c)=f^{(n+1)}(c)-p_n^{(n+1)}(c)=f^{(n+1)}(c).$$

所以从前面的方程可得

$$f(x)-p_n(x)=R(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$ ■

因此可得公式(8.3).

推论 8.9 假定 p 是次数最多为 n 的多项式，令 x_0 是任意点. 则 p 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式等于 p 本身.

证明 固定 $x\neq x_0$. 按照拉格朗日余项定理，可选取严格介于 x 与 x_0 之间的点 c 使得

$$p(x)-p_n(x)=\frac{p^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

但 p 是次数最多为 n 的多项式，所以 $p^{(n+1)}(c)=0$. 于是 $p_n(x)=p(x)$. ■

数 e 是无理数

我们用拉格朗日余项定理得到 e 的一个精确估计. 首先建立 e 的一个十分粗糙的估计：

$$e<4. \tag{8.4}$$

为证实它，注意到函数 ln：$(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是严格递增的，所以

$$e<4 \quad 当且仅当 \quad 1=\ln e<\ln 4.$$

但是，用自然对数的积分表示以及积分大于或等于任一下达布和这一事实，如取区间[1, 4]的划分$P=\{1,2,3,4\}$并对 $1\leqslant t\leqslant 4$ 设 $f(t)=1/t$，我们有

$$\ln 4=\int_1^4\frac{1}{t}dt\geqslant L(f,P)=\frac{1}{2}(1-0)+\frac{1}{3}(1-0)+\frac{1}{4}(1-0)>1.$$

如图 8.2 所示.

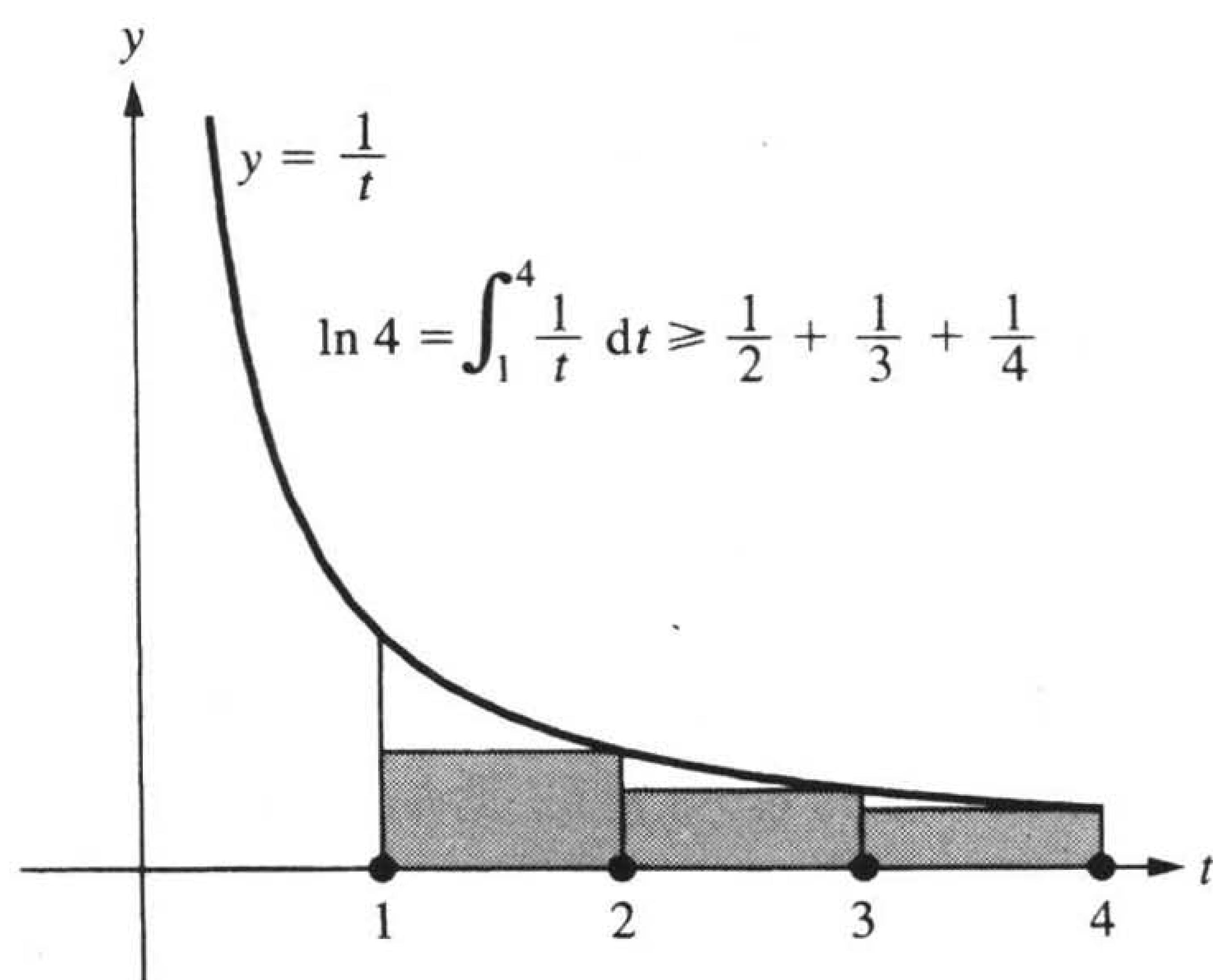


图 8.2 $\int_1^4 1/t\,dt$ 对划分 $P=\{1, 2, 3, 4\}$ 的下达布和

定理 8.10 对每个自然数 n 及每个非零数 x，存在严格介于 0 与 x 之间的点 c 使得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{8.5}$$

特别地，

$$\text{如果 } 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 < e^x - \left[1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right] < \frac{4}{(n+1)!}. \tag{8.6}$$

证明 公式(8.5)可直接由拉格朗日余项定理及例 8.3 得到. 前面刚证明过 $e<4$，由于函数 $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是严格递增的，可推得

$$\text{如果 } 0 < c < x \leqslant 1, \quad \text{则 } 1 = e^0 \leqslant e^c < e^1 < 4.$$

于是由(8.5)式可得估计式(8.6). ■

命题 8.11 数 e 是无理数.

证明 用反证法证明. 假定 e 是有理数，则存在自然数 n_0 与 m_0 使得 $e=n_0/m_0$. 则对于 $x=1$，(8.6)式变为

$$\text{对每个自然数 } n, \quad 0 < \frac{n_0}{m_0} - \left[2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] \leqslant \frac{4}{(n+1)!}.$$

用 $n!$ 乘此不等式得到

$$\text{对每个自然数 } n, \quad 0 < \frac{n!n_0}{m_0} - n!\left[2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] \leqslant \frac{4}{n+1}.$$

然而，如果 $n>4$ 且 $n \geqslant m_0$，由上述不等式可推出在区间(0, 4/5)中存在一个整数. 这一矛盾证明 e 是无理数. ■

204 ≀ 205

欧拉常数：自然对数的增长

回想在 2.2 节，我们证明了序列

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\}$$

是严格递增的但无上界，也就是调和级数发散. 另一方面，在5.1节，我们证明了序列$\{\ln n\}$是严格递增的但无上界. 事实上，在下面的命题中，这两个结果是等价的.

命题 8.12

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]=\gamma,\quad 其中\ 0<\gamma\leqslant 1.$$

证明 对每个自然数n，定义

$$c_n\equiv 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

下面将证明序列$\{c_n\}$严格递增且有上界1. 这样的话，命题的结论就是单调收敛定理的结果.

证明的关键一步是下述不等式，它的证明暂时延后. 对每个自然数k，

$$0<\frac{1}{k}-[\ln(k+1)-\ln k]<\frac{1}{2k^2}.\tag{8.7}$$

从不等式(8.7)的左边部分，其中$k=n+1$，我们看到对每个自然数n，

$$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+2)-\ln(n+1)]>0,$$

所以序列$\{c_n\}$是单调递增的.

我们对(8.7)的左边部分求前n项和得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]<\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k^2}\right].$$

现在看到

206

$$\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1),$$

所以对每一下标n，前述不等式可写成

$$c_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k^2}\right].\tag{8.8}$$

现对这个不等式的右端有下述估计：

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k^2}\right]=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{2k^2}\right]<\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{2k(k-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n}\right]<1.$$

这样，由(8.8)，$\{c_n\}$有上界1. 由单调收敛定理可推出$\{c_n\}$收敛于数γ，且$\gamma\leqslant 1$.

剩下的是证实不等式(8.7). 事实上，因为$\ln(k+1)-\ln k=\ln(1+1/k)$，所以式(8.7)是下述不等式的一个推论，其证明留作习题(习题4)：若$x>0$，

$$0<x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}.\tag{8.9}$$

■

命题8.12的叙述中定义的数γ称为欧拉常数，至于它是有理数还是无理数则是未知的. 由于

$$\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 1=0,$$

欧拉常数 γ 也可表示成

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right]=\gamma.$$

习题

1. 证明：当 $x>0$ 时有

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}.$$

特别地，证明 $1.375<\sqrt{2}<1.5$.

2. 证明：当 $x>0$ 时有

$$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}<(1+x)^{1/3}<1+\frac{x}{3}.$$

207

3. 把多项式 $p(x)=x^5-x^3+x$ 按 $(x-1)$ 幂次展开.

4. 在 $x=0$ 处将拉格朗日余项公式应用于 $f(x)=\ln(1+x)$，以证明不等式(8.9).

5. 证明：对每对数 x 与 h，

$$|\sin(x+h)-(\sin x+h\cos x)|\leq\frac{h^2}{2}.$$

6. 设 I 是点 x_0 的一个邻域及 n 是自然数．假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有 $n+1$ 阶导数．证明拉格朗日余项定理等价于下面的命题：对每个使得 $x_0+h\in I$ 的数 h，存在严格介于 0 与 1 之间的数 θ，使得

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}.$$

7. 用推论 8.9 证明：如果 p 是多项式而数 x_0 是 p 的根，即 $p(x_0)=0$，则存在多项式 q 使得对所有 x 有 $p(x)=(x-x_0)q(x)$.

8. 数 x_0 称为多项式 p 的 k 重根，倘若 k 是自然数使得 $p(x)=(x-x_0)^k r(x)$，其中 r 是多项式且 $r(x_0)\neq 0$．证明 x_0 是多项式 p 的 k 重根当且仅当

$$p(x_0)=p'(x_0)=\cdots=p^{(k-1)}(x_0)=0\quad 而\quad p^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

9. **a.** 对自然数 n，证明

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+x^n.$$

b. 用(a)给出二项公式的另一个根.

10. 假定函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有 $n+1$ 阶连续导数．证明 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 有 n 阶接触当且仅当

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n}=0.$$

11. 用拉格朗日余项定理验证确认局部极值点的如下准则：设 I 是点 x_0 的一个邻域而 n 是自然数．假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有 $n+1$ 阶导数且 $f^{(n+1)}:I\to\mathbb{R}$ 是连续的．假定若 $1\leq k\leq n$，则 $f^{(k)}(x_0)=0$ 而 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$.

a. 如果 $n+1$ 是偶数且 $f^{(n+1)}(x_0)>0$，则 x_0 是局部极小值点.

b. 如果 $n+1$ 是偶数且 $f^{(n+1)}(x_0)<0$，则 x_0 是局部极大值点.

c. 如果 $n+1$ 是奇数，则 x_0 既不是局部极大值点也不是局部极小值点.

208

12. 设 I 是点 x_0 的一个邻域，假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有连续的三阶导数且对所有 $x\in I$，$f'''(x)>0$.

a. 证明：如果在 I 中 $x_0+h\neq x_0$，在区间(0，1)中存在唯一的数 $\theta=\theta(h)$ 使得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0+\theta h)\frac{h^2}{2}.$$

b. 证明

$$\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{3}.$$

8.3 泰勒多项式的收敛性

对于用非负整数标记的数列 $\{a_k\}$，定义

$$\text{对每个非负整数 } n,\quad s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

由此得到新的序列 $\{s_n\}$. 序列 $\{s_n\}$ 称为级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 的部分和序列，a_k 称为级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 的第 k 项. 如果序列 $\{s_n\}$ 收敛，记

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right].$$

如果序列 $\{s_n\}$ 不收敛，则称级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 发散(diverge).

设 I 是点 x_0 的一个邻域并假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有任意阶的导数. $f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式定义为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

依照上面级数的记号，如果 x 是 I 中的点，在该点处

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=f(x),\tag{8.10}$$

记

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.\tag{8.11}$$

这一公式称为函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 关于点 x_0 的泰勒级数展开式. 根据定义，(8.10)在 x 处成立当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0.\tag{8.12}$$

本节我们将用拉格朗日余项定理提供一个确定在展开点的邻域内泰勒级数展开式有效性的准则. 首先证明一个有用的预备结果.

209

引理 8.13 对任意数 c，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0.$$

证明 选择 k 是自然数且满足 $k\geqslant 2|c|$. 如果 $n\geqslant k$，则

$$0\leqslant\left|\frac{c^n}{n!}\right|=\left[\frac{|c|}{1}\cdots\frac{|c|}{k}\right]\left[\frac{|c|}{k+1}\cdots\frac{|c|}{n}\right]\leqslant|c|^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=|c|^k2^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

但 $\lim_{n\to\infty}(1/2)^n=0$，所以也有 $\lim_{n\to\infty}c^n/n!=0$. ■

定理 8.14 设 I 是点 x_0 的一个邻域，并假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有任意阶导数. 还假定存在正数 r 及 M 使得区间 $[x_0-r,\ x_0+r]$ 包含在 I 中，并对每个自然数 n 及 $[x_0-r,\ x_0+r]$ 中每个点 x，

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M^n. \tag{8.13}$$

则如果 $|x-x_0|\leqslant r$，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{8.14}$$

证明 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式定义为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

按照拉格朗日余项定理，对 I 中每个点 x，存在严格介于 x 与 x_0 之间的点 c，使得

$$|f(x)-p_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

考察不等式(8.13)，对每个自然数 n 及 $[x_0-r,\ x_0+r]$ 中每个点 x，有

$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{8.15}$$

210

其中 $c=Mr$. 按照引理 8.13，$\lim\limits_{n\to\infty}c^n/n!=0$. 于是由(8.15)可见

$$\text{如果 } |x-x_0|\leqslant r,\quad \lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0.$$

显然这正是(8.14). ■

推论 8.15

$$\text{对所有 } x,\quad \mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{8.16}$$

$$\text{对所有 } x,\quad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}. \tag{8.17}$$

证明 先证明(8.16). 对所有 x，定义 $f(x)=\mathrm{e}^x$，并令 $x_0=0$. 固定 $r>0$. 若定义 $M=\mathrm{e}^r$，对每个自然数 n 及区间 $[-r,\ r]$ 中每个点 x，有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M\leqslant M^n.$$

按照定理 8.11，如果 $|x|<r$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

但 $r>0$ 的选取是任意的，所以泰勒展开式(8.16)得证.

(8.17)式可以类似地证明. 对所有 x，定义 $f(x)=\cos x$. 注意到对每个自然数 n 及每个数 x，$|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$. 则证明过程与上面相同. ■

习题

1. 证明下列函数在给定点的泰勒展开式对所有点 x 收敛：
   a. $f(x)=\sin x$ 在点 $x_0=0$.
   b. $f(x)=\cos x$ 在点 $x_0=\pi$.

2. 如果 $0<x<2$，定义 $f(x)=1/x$.

a. 求在 $x_0=1$ 处的 n 次泰勒多项式 p_n.

b. 用几何和公式证明对每个自然数 n,

$$\text{如果 } 0<x<2,\quad f(x)-p_n(x)=\frac{(1-x)^{n+1}}{x}.$$

c. 用(b)的结果证明

211

$$\text{如果 } |x-1|<1,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k.$$

3. 假定函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有任意阶导数并且

$$\begin{cases}F'(x)-F(x)=0 \text{ 对所有 } x\\ F(0)=2.\end{cases}$$

求 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处 n 次泰勒多项式的系数公式. 证明泰勒展开式在每一点收敛.

4. 假设函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有任意阶导数并且

$$\begin{cases}F''(x)-F'(x)-F(x)=0 \text{ 对所有 } x\\ F(0)=1 \text{ 且 } F'(0)=1.\end{cases}$$

求 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处 n 次泰勒多项式的系数的递归公式. 证明泰勒展开式在每一点收敛.

5. 对于数对 α 与 β，假定函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有任意阶导数并且

$$\text{对所有 } x,\quad f''(x)+\alpha f'(x)+\beta f(x)=0.$$

a. 证明对每个自然数 n,

$$\text{对所有 } x,\quad f^{(n+2)}(x)+\alpha f^{(n+1)}(x)+\beta f^{(n)}(x)=0.$$

b. 用(a)证明

$$\text{对所有 } x,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

8.4 对数函数的幂级数

在这一节，我们将分析自然对数的泰勒展开式的有效性. 为此，先平移自然对数并考虑如下定义的函数 $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$:

$$\text{若 } x>-1,\quad f(x)=\ln(1+x).$$

直接计算导数表明，对每个自然数 k,

$$\text{对所有的 } x>-1,\quad f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

特别地，$f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的 n 次泰勒多项式由下式定义:

$$p_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n. \tag{8.18}$$

为对差式 $f(x)-p_n(x)$ 导出明确表示的公式，最好是联合使用自然对数的积分公式及几何和公式而不是试图用拉格朗日余项定理研究该差式. 事实上，注意到对每个自然数 n，如果以 $1-t$ 代替 r，几何和公式

212

$$\frac{1}{1-r}=1+r+\cdots+r^{n-1}+\frac{r^n}{1-r}\quad \text{若 } r\neq 1$$

变为

$$\frac{1}{t}=1+(1-t)+\cdots+(1-t)^{n-1}+\frac{(1-t)^n}{t}\quad \text{若 } t\neq 0.$$

于是，用 $\ln x$ 的积分表示式、上述公式、积分的线性性质及公式(8.18)，我们有

$$\ln(1+x)=\int_1^{1+x}\frac{1}{t}dt=\int_1^{1+x}[1+(1-t)+\cdots+(1-t)^{n-1}]dt+\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt$$

$$=p_n(x)+\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt \quad 若\ x>-1. \tag{8.19}$$

定理 8.16

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k},\quad -1<x\leqslant 1. \tag{8.20}$$

证明 公式(8.19)蕴涵对每个自然数 n,

$$\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt \quad x>-1.$$

这样，为证明(8.20)，必须证明

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt\right]=0 \quad -1<x\leqslant 1. \tag{8.21}$$

首先，假设 $0\leqslant x\leqslant 1$，则对于每个自然数 n,

$$\left|\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt\right|=\int_1^{1+x}\frac{(t-1)^n}{t}dt\leqslant\int_1^{1+x}(t-1)^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}1/n=0$，可见当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，式(8.21)是成立的. 213

现在假设 $-1<x<0$. 则对每个自然数 n,

$$\left|\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt\right|=\int_{1+x}^{1}\frac{(1-t)^n}{t}dt\leqslant\frac{1}{1+x}\int_{1+x}^{1}(1-t)^n dt$$

$$=\left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leqslant\left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{n+1}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，可见当 $-1<x<0$ 时，式(8.21)也是成立的. ■

尽管对所有 $x>-1$，函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 有任意阶导数，但当 $x>1$ 时，泰勒展开式(8.20)并不成立. 事实上，由二项式公式，对每个自然数 n，当 $x>1$ 时，

$$x^{n+1}=[1+(x-1)]^{n+1}\geqslant 1+(n+1)(x-1).$$

利用这一结论与积分的单调性以及余项的积分表示式(8.19)，如果 $x>1$ 及 n 为任一自然数，则由(8.19)得

$$|\ln(1+x)-p_n(x)|=\int_1^{1+x}\frac{(1-t)^n}{t}dt$$

$$\geqslant\frac{1}{1+x}\int_1^{1+x}(1-t)^n dt$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{[1+(x-1)]^{n+1}}{n+1}$$

$$\geqslant\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1+(n+1)(x-1)}{n+1}$$

$$\geqslant \frac{x-1}{1+x}.$$

这样，

214

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right]\neq 0 \quad x>1.$$

习题

1. 证明对每个自然数 n，

$$\text{如果} -1<x\leqslant 0,\quad |\ln(1+x)-p_n(x)|\leqslant \frac{1}{1+x}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

而

$$\text{如果 } 0\leqslant x\leqslant 1,\quad |\ln(1+x)-p_n(x)|\leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

以最多为 10^{-4}的误差估计$\ln(1.1)$.

2. 证明按上题中的误差估计，以 10^{-4}为误差界估计 $\ln 2$ 需要 $n=10\,000$. 如何利用恒等式$\ln 2=\ln 4/3-\ln 2/3$ 更有效地估计 $\ln 2$ 呢？
3. 解释如果 $s\neq 0$，恒等式

$$s=\left(1+\frac{s-1}{s+1}\right)\Big/\left(1-\frac{s-1}{s+1}\right)$$

如何使我们在 $-1<x<1$ 且当 x 接近 1 时有效地计算$\ln(1+x)$.

4. 验证定理 8.16 的证明中的积分不等式.
5. 在区间$(-1, 1]$中的什么点可以用拉格朗日余项定理证明展开式

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}?$$

8.5 柯西积分余项定理

如果 I 是点 x_0 的一个邻域而函数$f:I\to\mathbb{R}$是可微的，则由中值定理，对 I 中的每个点 x，存在严格介于 x 和 x_0 之间的点 c，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0). \tag{8.22}$$

如果进一步假定导数$f':I\to\mathbb{R}$ 是连续的，则由第一基本定理(对导数求积分)，

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt. \tag{8.23}$$

拉格朗日余项定理的证明是以由(8.22)所表示的拉格朗日中值定理为基础的. 下面的柯西积分余项定理的证明将利用由(8.23)式所表示的第一基本定理.

215

定理 8.17(柯西积分余项公式) 设 I 是点 x_0 的一个邻域而 n 是自然数. 设函数$f:I\to\mathbb{R}$有 $n+1$ 阶导数且$f^{(n+1)}:I\to\mathbb{R}$ 是连续的. 则对 I 中每个点 x，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{8.24}$$

证明 根据第一基本定理，

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt. \tag{8.25}$$

由分部积分法可得

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{x_0}^{x} f'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-t)\,\mathrm{d}t = -f'(t)(x-t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.26}$$

当 $n=1$ 时由(8.25)及(8.26)可得(8.24)式. 一般的公式可用归纳法推出. 归纳的步骤依赖于如果 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则

$$\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(x-t)^{k+1}]\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}\,\mathrm{d}t. \qquad \blacksquare$$

二项式公式

回忆 1.3 节，对每个自然数 n 及数对 a 与 b，我们有

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \tag{8.27}$$

这一公式可以用初等代数直接证明，正如我们在 1.3 节所做过的. 另一种证明方法是先用推论 8.9(其中 n 次多项式等于任意 n 次泰勒多项式)证明

$$\text{对所有 } x,\quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \tag{8.28}$$

然后，若 $a \neq 0$，在式(8.28)中代入 $x=b/a$，再用 a^n 相乘得到(8.28)式. 216

牛顿二项展开式

我们将把式(8.28)推广到指数不一定是自然数的情形. 当然，如果 β 不是非负整数，则函数 $(1+x)^\beta$ 不是多项式，所以(8.28)的右端不是多项式，而是一无穷级数. 为求得 $(1+x)^\beta$ 的无穷级数展开式，需推广二项式系数的定义. 对每个自然数 k 及每个数 β，定义

$$\binom{\beta}{k} \equiv \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}$$

并且定义

$$\binom{\beta}{0} \equiv 1.$$

定理 8.18(牛顿二项展开式) 设 β 是任意实数. 则

$$(1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}x^k,\quad \text{如果 } -1<x<1. \tag{8.29}$$

证明二项展开式就是证明

$$\text{如果 } -1<x<1,\quad \lim_{n\to\infty}\left[(1+x)^\beta - \sum_{k=0}^{n}\binom{\beta}{k}x^k\right] = 0.$$

牛顿二项展开式的证明需要一些准备，所以先建立三个预备性引理，其中关键的第一步是证明

二项展开式是在 $x=0$ 处的泰勒展开式，从而柯西积分余项公式提供余项的积分表示. 我们把这一步概括为第一个预备性引理.

引理 8.19 对任意数 β 和任意自然数 n，如果 $x>-1$，则

$$(1+x)^{\beta}-\sum_{k=0}^{n}\binom{\beta}{k}x^{k}=(n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_{0}^{x}(1+t)^{\beta-n-1}(x-t)^{n}\mathrm{d}t. \tag{8.30}$$

证明 定义函数 $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\text{如果 } x>-1,\quad f(x)=(1+x)^{\beta}.$$

注意，对每个自然数 k，

$$\text{如果 } x>-1,\quad f^{(k)}(x)=\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)(1+x)^{\beta-k}.$$

所以

217

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}=\binom{\beta}{k}(1+x)^{\beta-k}.$$

特别地，

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\binom{\beta}{k}.$$

于是，$f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处的 n 次泰勒多项式是

$$p_{n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\beta}{k}x^{k}.$$

按照柯西积分余项定理，对每个自然数 n 及每个数 $x>-1$，

$$\begin{aligned}f(x)-p_{n}(x)&=\frac{1}{n!}\int_{0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n!}\int_{0}^{x}\binom{\beta}{n+1}(n+1)!(1+t)^{\beta-n-1}(x-t)^{n}\mathrm{d}t\\&=(n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_{0}^{x}(1+t)^{\beta-n-1}(x-t)^{n}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$ ■

为了分析当 n 很大时式(8.30)右边的大小，先证明下面的引理，它在第9章也有用.

引理 8.20(序列的比率引理) 假设 $\{c_n\}$ 是非零数序列且具有如下性质：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_{n}|}=\ell.$$

(i) 如果 $\ell<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}c_{n}=0.$$

(ii) 如果 $\ell>1$，则序列 $\{c_n\}$ 是无界的.

证明 首先，假定 $0\leqslant\ell<1$. 定义 $\alpha=(\ell+1)/2$. 由于 $\ell<\alpha$，可选自然数 N，使得

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N,\quad \frac{|c_{n+1}|}{|c_{n}|}\leqslant\alpha.$$

对每个下标 k，如果相继地应用上述不等式 k 次，可得

$$|c_{N+k}|\leqslant|c_{N}|\alpha^{k}.$$

于是若定义 $M=|c_N|\alpha^{-N}$，得到

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N,\quad |c_n|\leqslant M\alpha^n.$$

218

然而，$0\leqslant\alpha<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=0$. 上述不等式蕴涵 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

现设 $\ell>1$. 定义 $\beta=(\ell+1)/2$. 由于 $\beta<\ell$，可选自然数 N，使得

$$\text{对所有 } n\geqslant N,\quad \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\geqslant\beta.$$

于是，对每个自然数 k，

$$|c_{N+k}|\geqslant|c_N|\beta^k, \tag{8.31}$$

根据二项式公式，由于

$$\beta^k=(1+(\beta-1))^k\geqslant 1+k(\beta-1),$$

式(8.31)蕴涵了序列 $\{c_n\}$ 是无界的. ■

以下是证明牛顿二项展开式所需的最后一个引理.

引理 8.21 设 β 是任意数，则

$$\text{如果 } |x|<1,\quad \lim_{n\to\infty}n\binom{\beta}{n}x^n=0.$$

证明 注意到对每个自然数 n，

$$(n+1)\binom{\beta}{n+1}\Big/ n\binom{\beta}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\beta-n}{n+1}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|(n+1)\binom{\beta}{n+1}|x|^{n+1}\Big/ n\binom{\beta}{n}|x|^n\right|=|x|.$$

结论可立即由序列的比率引理推出. ■

牛顿二项展开式的证明 首先考虑 $-1<x<0$ 时的情形. 写 $(x-t)=-(t-x)$ 并交换积分限，式(8.30)变为

$$f(x)-p_n(x)=(-1)^{n+1}(n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_x^0\left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n(1+t)^{\beta-1}\mathrm{d}t. \tag{8.32}$$

但注意到

$$\text{如果 } -1<x\leqslant t\leqslant 0,\quad 0\leqslant\left(\frac{t-x}{1+t}\right)\leqslant -x=|x|,$$

所以对每个自然数 n，

$$\text{如果 } -1<x\leqslant t\leqslant 0,\quad 0\leqslant\left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n(1+t)^{\beta-1}\leqslant|x|^n. \tag{8.33}$$

219

从式(8.32)及(8.33)可得，对每个自然数 n，如果 $-1<x<0$，

$$\begin{aligned}|f(x)-p_n(x)|&=(n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_x^0\left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n(1+t)^{\beta-1}\mathrm{d}t\\&\leqslant(n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_x^0|x|^n\mathrm{d}t\\&\leqslant(n+1)\binom{\beta}{n+1}|x|^n\int_x^0\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= (n+1)\binom{\beta}{n+1}|x|^{n+1}. \tag{8.34}$$

按照引理8.21，如果$|x|<1$，

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\binom{\beta}{n+1}|x|^{n+1} = 0,$$

所以从(8.34)可得二项展开式在$-1<x<0$时成立.

接下来考虑$0<x<1$时的情形. 在这种情况下，从(8.30)可得

$$\begin{aligned}|f(x)-p_n(x)| &= (n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_0^x(1+t)^{\beta-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t\\ &= (n+1)\binom{\beta}{n+1}\int_0^x\left[\frac{x-t}{1+t}\right]^n(1+t)^{\beta-1}\mathrm{d}t\\ &\leqslant (n+1)\binom{\beta}{n+1}x^n\int_0^x(1+t)^{\beta-1}\mathrm{d}t\\ &= (n+1)\binom{\beta}{n+1}x^{n+1}\left[\frac{(1+x)^\beta-1}{\beta x}\right].\end{aligned} \tag{8.35}$$

再次运用引理8.21，由(8.35)可推得二项展开式在$0<x<1$时成立. ■

习题

1. 验证不等式(8.33)、(8.34)及(8.35)推导中的细节.
2. 证明对$\beta=-1$，二项展开式简化为几何级数.
3. 证明当β是自然数时，二项展开式简化为二项式公式.
4. 证明：如果函数g：$[a,b]\to\mathbb{R}$及h：$[a,b]\to\mathbb{R}$是连续的，且对$[a,b]$中所有x，$h(x)\geqslant 0$，则在(a,b)内存在点c，使得
$$\int_a^b h(x)g(x)\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

[220]

5. 用习题4证明：如果$f^{(n+1)}:I\to\mathbb{R}$连续，则柯西积分余项定理蕴涵拉格朗日余项定理.
6. 用柯西积分余项定理分析下列展开式：
$$\text{如果 } -1<x\leqslant 1,\quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$
7. 证明对$0\leqslant x<1$，可以用拉格朗日余项定理验证二项展开式.
8. 证明：如果$|x|>1$，二项展开式不收敛.
9. 序列$\{n^3r^n\}$对什么样的r值收敛？

8.6 一个无穷次可微的非解析函数

下面提出一个函数f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的具体例子，它有任意阶导数而仅仅在$x=0$它关于$x=0$的泰勒展开式与其函数值相一致.

定理8.22 定义

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(1/x^2)} & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

则函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有任意阶导数. 然而，能使

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{8.36}$$

成立的唯一一点是$x=0$.

证明　要证明定理，只需证明$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有任意阶导数且对每个自然数$n$，$f^{(n)}(0)=0$. 一旦这一点得到证明，则只需注意到(8.36)的右端恒等于零，而$f(x)=0$当且仅当$x=0$.

步骤1：我们断言对任意多项式$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，

$$\lim_{x\to 0}q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-(1/x^2)}=0. \tag{8.37}$$

为验证这一点，只需证明对任意自然数n，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-(1/x^2)}}{x^n}=0. \tag{8.38}$$

事实上，设n为自然数. 从式(8.5)可推出

$$若\ b>0,\quad e^b>\frac{b^n}{n!},$$

221

所以，

$$如果\ x\neq 0,\quad e^{(1/x^2)}\geqslant\frac{1}{n!x^{2n}},$$

于是

$$如果\ x\neq 0,\quad 0\leqslant\left|\frac{e^{-(1/x^2)}}{x^n}\right|\leqslant n!|x|^n.$$

这一不等式蕴涵式(8.38)，进而蕴涵式(8.37).

步骤2：用归纳论证法证明对每个自然数n，存在多项式$q_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得

$$如果\ x\neq 0, f^{(n)}(x)=q_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-(1/x^2)}. \tag{8.39}$$

事实上，如果$x\neq 0$，$f'(x)=(2/x^3)e^{-(1/x^2)}$，所以当$n=1$时，(8.39)式成立，其中$q_1(t)=2t^3$. 假定(8.39)式在$n=k$时成立. 则

$$如果\ x\neq 0,\quad f^{(k+1)}(x)=\left[q_k'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)+q_k\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)\right]e^{-(1/x^2)}.$$

所以(8.39)式在$n=k+1$时成立，其中$q_{k+1}(t)=q_k'(t)(-t^2)+q_k(t)(2t^3)$. 数学归纳法原理蕴涵对所有自然数$n$，(8.39)式成立.

从步骤2可得函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在每个$x\neq 0$的点有任意阶导数. 为完成证明，将再次用归纳法证明，对每个自然数n，

$$f^{(n)}(0)=0. \tag{8.40}$$

事实上，如果$n=1$，则对所有t，$q(t)=t$时用(8.37)可推出

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-(1/x^2)}=0.$$

现在假设k为自然数使得$f^{(k)}(0)=0$. 则用(8.39)连同(8.37)以及对所有t，$q(t)=tq_k(t)$，可

推出

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}q_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-(1/x^2)}=0,$$

所以$f^{(k+1)}(0)=0$. 数学归纳法原理蕴涵对每个自然数n, $f^{(n)}(0)=0$. ■

有任意阶导数的函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$称为*无穷次可微的*(infinitely differentiable).

有任意阶导数且使得

222

$$\text{对所有 } x,\quad g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

的函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$称为*解析的*(analytic). 我们已展示了无穷次可微但不解析的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

习题

1. 设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是定理8.22所定义的函数. 显式地计算$f''(x)$.
2. 设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是定理8.22所定义的函数. 证明不存在正数$M$使得对每个自然数$n$,
$$\text{对所有 } x,\quad |f^{(n)}(x)|\leqslant M^n.$$
3. 对自然数n, 函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$称为*n次连续可微的*($n$ times continuously differentiable), 倘若$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有$n$阶导数且$f^{(n)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的. 定义
$$\text{对所有 } x,\quad h(x)=\int_0^x|t|dt.$$
证明函数$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$一次连续可微但不是两次连续可微的. 对每个自然数$n$, 求$n$次连续可微但不$n+1$次连续可微的函数.
4. 假定函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有任意阶导数, 且对每个自然数$n$, 存在正数$c_n$及$\delta_n$使得
$$\text{如果 } |x|<\delta_n,\quad \text{就有 } |g(x)|\leqslant c_n|x|^n.$$
证明对每个自然数n, $g^{(n)}(0)=0$.

8.7 魏尔斯特拉斯逼近定理

正如我们在8.6节所见的, 即使函数有任意阶导数, 函数在其定义域内的点x_0处所算出的泰勒多项式也可能不提供函数在除x_0外的其他点的良好的逼近. 尽管如此, 还是存在下面值得关注的定理.

定理8.23(魏尔斯特拉斯逼近定理) *设I是有界闭区间并假定函数$f:I\to\mathbb{R}$是连续的, 则对每个正数ε, 存在多项式$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$使得*

$$\text{对所有 } x\in I,\quad |f(x)-p(x)|<\varepsilon. \tag{8.41}$$

关于这一定理值得关注之处在于没有关于可微性的假定. 例如, 允许函数$f:I\to\mathbb{R}$在任何一点都不可微. 当然, 满足(8.41)的多项式一般说来不是泰勒多项式.

223

我们给出的逼近定理的证明归功于伯恩斯坦(Bernstein), 该证明是相当巧妙的. 它基于下面三个恒等式:

对每个自然数n及任一数x,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1, \tag{8.42}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}=x,\tag{8.43}$$

以及如果 $n\geqslant 2$，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}=x^{2}.\tag{8.44}$$

第一个恒等式(8.42)可从二项式公式(8.27)通过令 $a=x$ 及 $b=1-x$ 而得到．恒等式(8.43)及(8.44)是(8.42)的推论．事实上，如果在(8.42)中用 $n-1$ 替换 n，两边再乘上 x，则由于

$$\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k},1\leqslant k\leqslant n,\text{而}\frac{k}{n}=0,k=0,$$

可得(8.43)．类似地，如果在恒等式(8.42)中用 $n-2$ 替换 n 且两边乘以 x^2，则由于

$$2\leqslant k\leqslant n\text{ 时，}\quad\binom{n-2}{k-2}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k},\text{而当 }k=0,1\text{ 时，}\frac{k}{n}=\frac{k-1}{n}=0,$$

可得(8.44)．

对自然数 n 及满足 $0\leqslant k\leqslant n$ 的整数 k，在记号上定义

$$\text{对所有 }x,\quad g_k(x)=x^k(1-x)^{n-k}$$

是方便的．

引理 8.24 对每个数 x 及每个自然数 $n\geqslant 2$，

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{2}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.\tag{8.45}$$

证明 对每个整数 $n\geqslant 2$，从(8.42)及(8.43)可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{2}\binom{n}{k}g_k(x)&=\sum_{k=0}^{n}\left[x^2-\frac{2xk}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right]\binom{n}{k}g_k(x)\\&=x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k(x)-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}g_k(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}g_k(x)\\&=x^2-2x^2+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}g_k(x).\end{aligned}$$

224

另一方面，从(8.43)及(8.44)我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}g_k(x)&=\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n(n-1)}\binom{n}{k}g_k(x)\\&=\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{k(k-1)}{n(n-1)}+\frac{k}{n(n-1)}\right]\binom{n}{k}g_k(x)\\&=\left[\frac{n-1}{n}\right]\left[x^2+\frac{x}{n-1}\right].\end{aligned}$$

于是，

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{2}\binom{n}{k}g_k(x)=x^2-2x^2+\left[\frac{n-1}{n}\right]\left[x^2+\frac{x}{n-1}\right]=\frac{x(1-x)}{n}.$$

■

魏尔斯特拉斯逼近定理的证明 首先考虑$I=[0,1]$时的情形. 一般情形容易由这种情形推出. 令$\varepsilon>0$. 我们要求一个使(8.41)成立的多项式$p(x)$. 我们已经证明有界闭区间上的连续函数是一致连续的. 利用一致连续性的ε-δ准则, 可选取$\delta>0$使得

$$\text{对 } I \text{ 中满足 } |u-v|\leqslant\delta \text{ 的所有点 } u \text{ 及 } v,\quad |f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.46}$$

还有, 从极值定理可得函数$f:I\to\mathbb{R}$是有界的. 于是可选取数$M>0$, 使得

$$\text{对 } I \text{ 中所有 } x,\quad |f(x)|\leqslant M. \tag{8.47}$$

用$\mathbb{R}$的阿基米德性质, 可选取自然数n, 使得

$$n>\frac{4M}{\varepsilon\delta^2}. \tag{8.48}$$

定义多项式$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$如下:

$$\text{对所有 } x,\quad p(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

以下将证明对如此选择的多项式, 所要求的逼近性质(8.41)成立. 事实上, 令x是I中的点而k是一整数且$1\leqslant k\leqslant n$, 则$|x-k/n|<\delta$或者$|x-k/n|\geqslant\delta$. 如果$|x-k/n|<\delta$, 由(8.46)可得$|f(x)-f(k/n)|<\varepsilon/2$. 如果$|x-k/n|\geqslant\delta$, 则由(8.47),

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant 2M\leqslant\frac{2M}{\delta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2.$$

于是,

225

$$\text{对 } 0\leqslant k\leqslant n,\ \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2. \tag{8.49}$$

由(8.42)可得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

所以

$$f(x)-p(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

用三角不等式、(8.49)、(8.42)及(8.45)可得

$$\begin{aligned}|f(x)-p(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}x(1-x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}.\end{aligned}$$

由于n满足(8.48), 因而$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

这就证明了若 $I=[0,1]$，定理成立. 现设 $I=[a,b]$. 若 $0\leqslant t\leqslant 1$，定义 $g(t)=a+t(b-a)$. 则复合函数 $f\circ g$: $[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 根据刚才所证的，存在多项式 $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对 $[0,1]$ 中所有点 t，$|f(g(t))-q(t)|<\varepsilon$. 现对所有 x 定义 $p(x)=q[(x-a)/(b-a)]$. 则 p: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是使逼近性质(8.41)得以成立的多项式. ■

习题

1. 证明：如果 $n\geqslant k\geqslant 1$，则
$$\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}.$$
由此连同以 $n-1$ 取代 n 的(8.42)式验证(8.43).
2. 证明：如果 $n\geqslant k\geqslant 2$，则
$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k}=\binom{n-2}{k-2}.$$
由此连同用 $n-2$ 代替 n 的(8.42)式验证(8.44).
3. 在逼近定理的证明中，何处用到对所有 $x\in[0,1]$及 $0\leqslant k\leqslant n$，$g_k(x)\geqslant 0$ 这一事实？ 226
4. 证明当把 I 替换成有界开区间 (a,b) 时，逼近定理不再成立. 为证明这一点，需证明：如果对所有 x 有 $f(x)=1/(b-x)$，则 f: $(a,b)\to\mathbb{R}$ 不可能被多项式一致逼近.
5. 通过证明如果对所有 x，$f(x)=e^x$，则 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 不能被多项式一致逼近来证明如果用 $\mathbb{R}$ 代替 I，则逼近定理不成立.
6. 对 $0\leqslant x\leqslant 1$，定义 $f(x)=|x-1/2|$. 用逼近定理的证明求多项式 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对所有 $x\in[0,1]$，$|f(x)-p(x)|<1/4$.
7. 验证在逼近定理证明的最后一行中所做的关于复合函数的论断.
8. 假定函数 h: $[-1,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 证明存在具有下述性质的多项式序列 $\{p_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$：
$$\text{对所有 } x\in[-1,1],\quad h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k(x).$$
227

第9章　函数序列与级数

9.1　序列与数级数

在第2章，我们研究了序列的收敛性．特别地，在2.2节证明了下列重要的结果．

定理9.1(单调收敛定理)　*单调数列收敛当且仅当它是有界的.*

这是序列本身所具有的收敛准则，它不需要所提到的极限的任何信息，但是，正如它的命名所提示的，单调收敛定理要求序列是单调的．序列$\{(-1)^n\}$表明，一般情况下任何有界序列收敛并不成立．我们将建立一个对所有的数列都适用的收敛准则，不管它是否单调．

序列的柯西收敛准则

定义　*数列$\{a_n\}$称为柯西序列(Cauchy sequence)，倘若对每个正数ε，存在下标N使得*

$$\text{只要 } n \geqslant N \text{ 及 } m \geqslant N, \quad \text{就有 } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

我们要证明数列收敛当且仅当它是柯西序列．这也是序列本身所具有的收敛准则．它不要求所提到的极限的任何信息．而且，不要求单调性．我们分几步证明这一结果．

命题9.2　*每个收敛序列都是柯西序列.*

证明　假定$\{a_n\}$是收敛到数a的序列．设$\varepsilon>0$，要求下标N，使得

$$\text{只要 } n \geqslant N \text{ 及 } m \geqslant N, \quad \text{就有 } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

但由于$\{a_n\}$收敛到a，可选取下标N，使得

$$\text{对每个下标 } k \geqslant N, \quad |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，若$n \geqslant N$，$m \geqslant N$，令

$$a_n - a_m = (a_n - a) + (a - a_m),$$

由三角不等式，

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

引理9.3　*每个柯西序列都是有界的.*

证明　假定$\{a_n\}$是柯西序列．对$\varepsilon=1$，可选择下标N，使得

$$\text{只要 } n \geqslant N \text{ 及 } m \geqslant N, \text{就有 } |a_n - a_m| < 1.$$

特别地，

$$\text{如果 } n \geqslant N, \quad |a_n - a_N| < 1.$$

但令

$$a_n = a_N + (a_n - a_N),$$

由三角不等式，

$$|a_n| = |a_N + (a_n - a_N)| \leqslant |a_N| + |a_n - a_N|.$$

因而可得

$$\text{如果 } n \geqslant N, \quad |a_n| \leqslant |a_N| + 1.$$

定义 $M = \max\{|a_N|+1, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$，则

$$\text{对每个下标 } n, \quad |a_n| \leqslant M.$$

■ [229]

定理 9.4(序列的柯西收敛准则) 数列收敛当且仅当它是柯西序列.

证明 按照命题9.2，每个收敛序列都是柯西序列. 余下的是要证其逆. 假定$\{a_n\}$是柯西序列. 前面的引理断定$\{a_n\}$是有界的. 于是，按照列紧定理，$\{a_n\}$有收敛到数 a 的子序列$\{a_{n_k}\}$.

我们断定整个数列收敛到 a. 事实上，设 $\varepsilon > 0$. 要求一下标 N，使得

$$\text{如果 } n \geqslant N, \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

由于$\{a_n\}$是柯西序列，可选取下标 N，使得

$$\text{只要 } n \geqslant N \text{ 及 } m \geqslant N, \text{就有} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.1}$$

另一方面，由于子序列$\{a_{n_k}\}$收敛到 a，存在下标 K，使得

$$\text{当 } k \geqslant K \text{ 时}, \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.2}$$

现选取任意下标 k，使得 $k \geqslant K$ 且 $n_k \geqslant N$. 利用不等式(9.1)及(9.2)连同三角不等式，可推得如果 $n \geqslant N$，则

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \\ &\leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

级数的收敛性检验法

回顾用自然数 k 作下标的数列$\{a_k\}$，对每个下标 n，定义

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

得到新的序列$\{s_n\}$. 序列$\{s_n\}$称为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和序列(sequence of partial sum)，而 a_k 称为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的第 k 项(kth term). 如果序列$\{s_n\}$收敛，记

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\right].$$

[230]

如果序列$\{s_n\}$不收敛，就说级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散(diverge)[⊖].

⊖ 对于用非负整数作下标的数列$\{a_k\}$，对每个非负整数 n，定义 $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$，如果序列$\{s_n\}$收敛，定义

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\right].$$

级数的项的初始下标的这一改变在理论上没有实质的影响.

命题 9.5 假定级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

证明 定义 $\{s_n\}$ 是级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 的部分和序列并定义 s 是序列 $\{s_n\}$ 的极限. 由于 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，所以也有 $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. 于是按照收敛序列的差的性质，

$$\lim_{n\to\infty}[s_n - s_{n-1}] = 0.$$

然而，对每个下标 $n \geqslant 2$，$a_n = s_n - s_{n-1}$，于是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ ■

我们在第 2 章已看到，调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

不收敛，尽管有 $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. 因此，序列 $\{a_n\}$ 各项收敛到 0 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件但不是充分条件. 本节的余下部分将专门用于提出为保证级数收敛级数的项应当满足的充分条件.

回想我们证明的关于收敛序列的第一个结果之一是

$$\text{如果} |r| < 1,\quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0. \tag{9.3}$$

这一极限连同几何和公式，恰好就是所要建立的几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ 的收敛性，只要 $|r| < 1$.

命题 9.6 对于使得 $|r| < 1$ 的数 r，

231

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

证明 几何和公式断定对每个下标 n，

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

但 $|r| < 1$，所以 $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$，于是由数列收敛的线性性质，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} r^k\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right] = \frac{1}{1-r}.$$ ■

给定两个序列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 及两个数 α 与 β，注意到对每个下标 n，

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

于是由收敛序列的线性性质可得，如果两个级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ 也收敛，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

对于数列的收敛有两个主要的一般准则，即单调收敛定理与柯西收敛准则. 把这些准则用到级数上，也就是用到部分和序列上，可以得到级数的收敛准则. 首先考察单调收敛定理的推论.

定理 9.7 设 $\{a_k\}$ 是非负数序列. 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛当且仅当部分和序列是有界的，即存在正数 M 使得对每个下标 n，$a_1 + \cdots + a_n \leqslant M$.

证明 由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的项是非负的，所以部分和序列单调递增. 单调收敛定理断定部分和序列收敛当且仅当部分和序列是有界的. ■ 232

推论 9.8(比较检验法) 假定 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 为数列，满足对每个下标 k,

$$0 \leqslant a_k \leqslant b_k.$$

(i) 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

(ii) 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散.

证明 注意到对每个下标 n,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

这些不等式表明，如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 的部分和是有界的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和也是有界的，另一方面，如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和是无界的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 的部分和也是无界的. 要证的结果可由此不等式及定理 9.7 得到. ■

例 9.9 考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}2^k}. \tag{9.4}$$

对每个下标 k, $1/(\sqrt{k}2^k) \leqslant 1/2^k$. 因为对 $r=\frac{1}{2}$几何级数收敛，所以由比较检验法可得级数(9.4)也收敛. ■

例 9.10 考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{9.5}$$

对每个下标 k, $1/\sqrt{k} \geqslant 1/k$. 因为调和级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ 发散，所以由比较检验法可得级数(9.5)也发散. ■

推论 9.11(积分检验法) 设 $\{a_k\}$ 是非负数列并假定函数 f: $[1, \infty) \to \mathbb{R}$ 是单调递减的连续函数且满足如下性质:

$$对每个下标 k, \quad f(k) = a_k.$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛当且仅当积分序列 $\left\{\int_1^n f(x)\,dx\right\}$ 是有界的. 233

证明 由于函数 f: $[1, \infty) \to \mathbb{R}$ 是连续的，它在每个有界区间上是可积的. 此外，对每个下标 k 及区间 $[k, k+1]$ 中的每个点 x，由于 f 是单调递减的,

$$a_k = f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1) = a_{k+1},$$

所以积分的单调性质蕴涵

$$a_k \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant a_{k+1}.$$

由积分在区间上的可加性，可以推出对每个下标 n，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n+1} a_k.$$

如图9.1所示. 这些不等式蕴涵了级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和序列是有界的当且仅当序列 $\left\{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ 是有界的. 我们假定项 a_k 是非负的. 由定理9.7可得，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛当且仅当序列 $\left\{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ 是有界的.

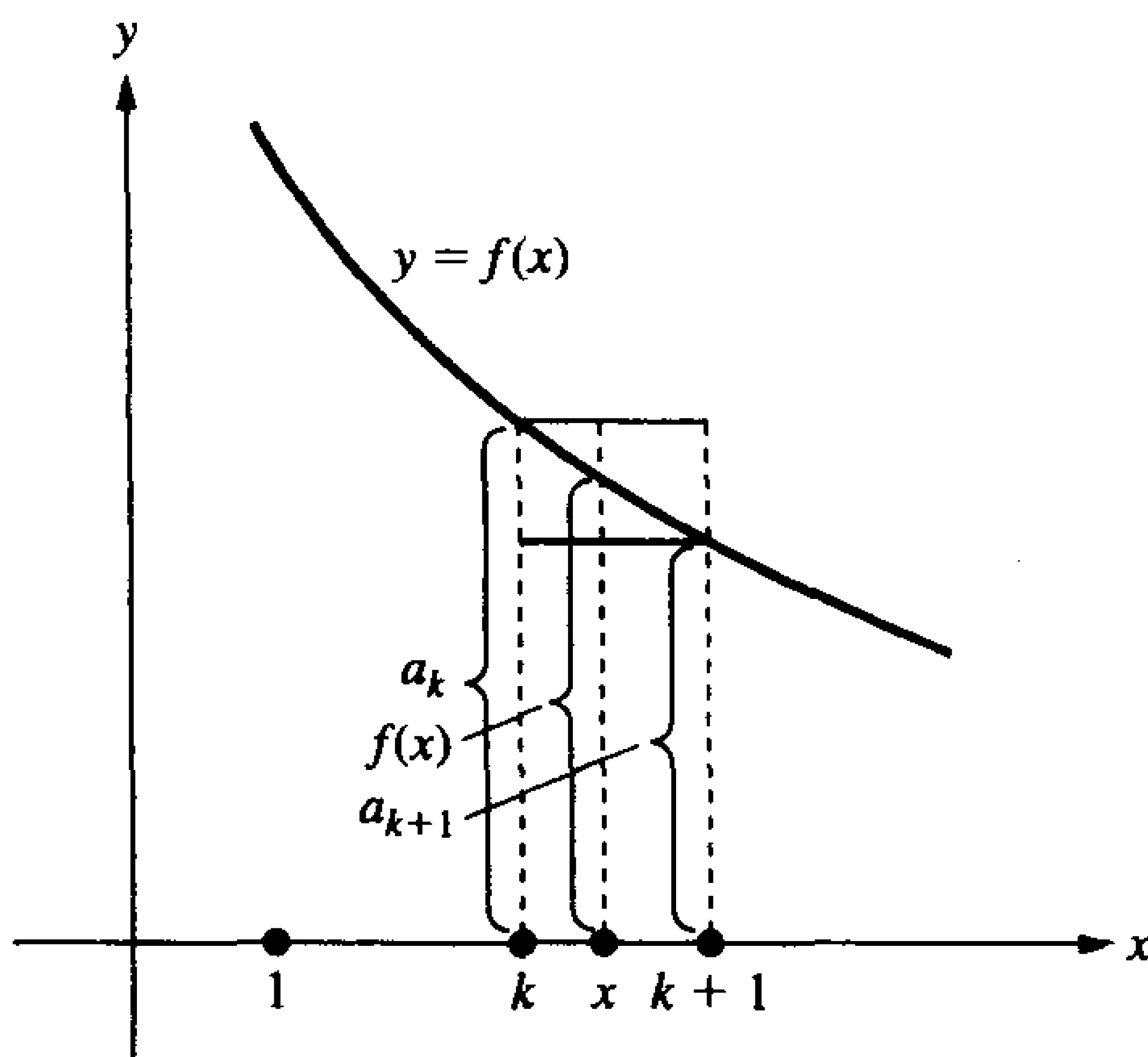


图9.1 $a_k \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a_{k+1}$ ■

例9.12 考虑级数

234

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}. \tag{9.6}$$

应用微积分学第一基本定理，可得对每个下标 n，

$$\int_1^n \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\mathrm{d}x = \ln[\ln(n+1)] - \ln(\ln 2).$$

由于序列 $\{\ln[\ln(n+1)] - \ln(\ln 2)\}$ 不是有界的，由积分检验法可得级数(9.6)发散. ■

推论9.13（p-检验法） 对正数 p，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

收敛当且仅当 $p > 1$.

证明 对 $x \geqslant 1$，定义 $f(x) = x^{-p}$. 函数 f: $[1, \infty) \to \mathbb{R}$ 是连续且单调递减的. 对每个下标 n，微积分学第一基本定理蕴涵了

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} (n^{1-p} - 1)/(1-p) & 若\ p \neq 1 \\ \ln n & 若\ p = 1. \end{cases}$$

于是序列 $\left\{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ 有界当且仅当 $p > 1$. 根据积分检验法，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ 收敛当且仅当 $p > 1$. ■

例 9.14 考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}.$$

在 8.2 节，由定理 8.10 得，对每一 $b>0$，在开区间 $(0,c)$ 内存在一点 c，使得

$$e^b = 1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6} + \frac{e^c}{24}.$$

因此当 $b>0$ 时有

$$e^b > \frac{b^3}{6}.$$

这样，对每个下标 k，$k/e^k < 6/k^2$. p-检验法蕴涵了级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ 收敛，于是级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 6/k^2$ 也收敛. 比较检验法蕴涵了级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k/e^k$ 也收敛. ■

当级数的项不是单一符号时，为检验收敛性而直接运用单调收敛定理是不可能的，这是因为相关的部分和序列不是单调序列. 然而，对于项的符号交错的级数可以间接地使用单调收敛准则得到下列的收敛性检验法. [235]

定理 9.15(交错级数检验法) 假设 $\{a_k\}$ 是收敛到 0 的非负单调递减数列. 则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

收敛.

证明 对每个下标 n 定义

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k.$$

为证明部分和序列 $\{s_n\}$ 收敛，先证明子序列 $\{s_{2n}\}$ 收敛. 事实上，对每个下标 n，注意到由于序列 $\{a_k\}$ 是单调递减的，

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0,$$

又由于序列 $\{a_k\}$ 也由非负数组成，

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} - a_{2k}) = a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{2k} - a_{2k+1}) - a_{2n} \leqslant a_1.$$

可推得 $\{s_{2n}\}$ 单调递增且以 a_1 为上界. 按照单调收敛定理，序列 $\{s_{2n}\}$ 收敛. 定义 $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. 但对每个下标 n，

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，可得序列 $\{s_{2n+1}\}$ 也收敛到同一极限 s.

可以断定整个序列收敛到 s. 事实上，设 $\varepsilon>0$. 可选取下标 N_1 与 N_2 使得

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon, \quad n \geqslant N_1$$

及

$$|s_{2n+1} - s| < \varepsilon, \quad n \geqslant N_2.$$

定义 $N=\max\{2N_1,\ 2N_2+1\}$. 则

236

$$|s_n - s| < \varepsilon, \quad n \geqslant N.$$

■

例 9.16 由交错级数检验法，可得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

收敛. 事实上，在 8.4 节，我们已证明它收敛到 ln2. ■

对于其项既非同一符号亦非交错符号的级数，为确定级数是否收敛则要对级数的部分和序列应用柯西收敛准则.

把柯西序列的定义改写如下：序列 $\{s_n\}$ 是柯西序列，倘若对每个正数 ε 存在下标 N，使得对每个下标 $n \geqslant N$ 及任意自然数 k，都有

$$|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon.$$

这样改写有时是有益的，特别是在考虑级数时.

定理 9.17（级数的柯西收敛准则） 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛当且仅当对每个正数 ε 存在下标 N 使得

对所有下标 $n \geqslant N$ 及所有自然数 k， $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

证明 对部分和序列应用序列的柯西收敛准则. ■

定义 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 称为是绝对收敛的，倘若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 收敛.

推论 9.18（绝对收敛检验法） 绝对收敛的级数收敛，即如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

证明 由三角不等式可推出对每一对自然数 n 及 k，

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j\right| \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j|.$$

由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 收敛，由级数的柯西收敛准则可得 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 的部分和序列是柯西序列. 上述不等式蕴涵了级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和序列也是柯西序列，再次运用级数的柯西收敛准则可得级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

237

收敛. ■

例 9.19 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

收敛. 为证明这一点，首先注意到由 p-检验法，当 $p=2$ 时级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ 收敛. 由于对每个下标 k，$|\sin k| \leqslant 1$，由比较检验法可得级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\sin k|/k^2$ 也收敛. 绝对收敛检验法蕴涵了级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k/k^2$ 收敛. ■

收敛但不绝对收敛的级数称为条件收敛(converge conditionally). 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ 条件收敛是因为根据交错级数检验法，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ 收敛，但调和级数不收敛.

定理 9.20 对于级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$，假定存在数 r(其中 $0\leqslant r<1$)及下标 N，使得

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N,\quad |a_{n+1}|\leqslant r|a_n|. \tag{9.7}$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 绝对收敛.

证明 首先，注意到对每个自然数 k，如果连续应用不等式(9.7) k 次，可得

$$|a_{N+k}|\leqslant r^k|a_N|.$$

由这一不等式及几何和公式，可推得对每个自然数 k，

$$\begin{aligned}|a_1|+\cdots+|a_{N+k}| &= |a_1|+\cdots+|a_{N-1}|+|a_N|+\cdots+|a_{N+k}|\\ &\leqslant |a_1|+\cdots+|a_{N-1}|+|a_N|[1+r+\cdots+r^k]\\ &= |a_1|+\cdots+|a_{N-1}|+|a_N|\left[\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right]\\ &\leqslant |a_1|+\cdots+|a_{N-1}|+|a_N|\left[\frac{1}{1-r}\right].\end{aligned} \tag{9.8}$$

定义

$$M\equiv|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|+|a_N|\left[\frac{1}{1-r}\right].$$

则由上面的不等式(9.8)可得，

$$\text{对每个下标 } n,\quad |a_1|+\cdots+|a_n|\leqslant M.$$

这意味着级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 的部分和序列有界. 按照定理 9.7，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 收敛. ■ [238]

回顾在 8.5 节中我们建立了引理 8.20，即序列的比率检验法. 对级数我们有下述相伴的结果.

推论 9.21(级数的比率检验法) 对于级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$，假定

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\ell.$$

(i)如果 $\ell<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(ii)如果 $\ell>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 首先，假定 $\ell<1$. 定义 $r=(1+\ell)/2$，则由 $\ell<1$ 得 $\ell<r$，所以可以选取下标 N，使得

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N,\quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<r.$$

而由于 $\ell<1$ 也有 $r<1$. 由定理 9.20 可得所要证明的结论.

现假设 $\ell>1$. 由序列的比率引理(引理 8.17)可得序列 $\{a_n\}$ 不收敛到 0. 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ■

级数的收敛与发散理论是数学的一个重要领域. 本节给出的只不过是某些方法的简述，即用数列的单调收敛定理及柯西收敛准则得到级数收敛的充分条件.

习题

1. 检验下列级数是否收敛.

   a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k^p}$，其中 $a>0$ 及 $p>0$

   b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3}$

   c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

   d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

   e. $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$

   f. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k^2+1}\right)^3$

   239

   g. $\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$

2. 对任意正数 α，证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{e^k}$$

   收敛.

3. 固定正数 α，考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)[\ln(k+1)]^\alpha}.$$

   对什么样的 α 值该级数收敛?

4. 在交错级数检验法的假设条件下，定义

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k.$$

   证明对每个下标 n，

$$\left| s - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$

5. 用级数的柯西收敛准则为交错级数检验法提供另一种证明.

6. 如果序列收敛，则它的每一个子序列收敛到同一极限. 但子序列的收敛性并不蕴涵整个级数的收敛性. 基于这一点，证明

$$\text{如果} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell, \quad \text{则} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} + a_{2k-1}) = \ell,$$

   但反过来未必成立. (提示：考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$.)

7. (柯西根值检验法)对级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$，假定存在数 γ(其中 $0 \leqslant \gamma < 1$)及自然数 N，使得

$$\text{对所有下标 } k \geqslant N, \quad |a_k|^{1/k} < \gamma.$$

   证明 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛.

8. 假定 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 是正项级数，满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \ell \quad \text{且 } \ell > 0,$$

   240

   证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛.

9.2 函数序列的逐点收敛

第 3 章主要研究了数列. 在 9.1 节我们研究了数列和级数. 现在转向函数项的序列研究.

定义 给定函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 及函数序列 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$. 称序列 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 逐点收敛到 $f:D\to\mathbb{R}$ 或 $\{f_n\}$ 在 D 上逐点收敛到 f, 倘若对 D 中的每一点 x,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

例 9.22 对每个自然数 n, 定义

$$f_n(x)=x^n\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由于 $\{f_n(1)\}$ 是常数序列，其常数值为 1，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(1)=1$. 如图 9.2 所示. 另一方面,

$$\text{如果 } 0\leqslant x\leqslant 1,\quad \lim_{n\to\infty}x^n=0.$$

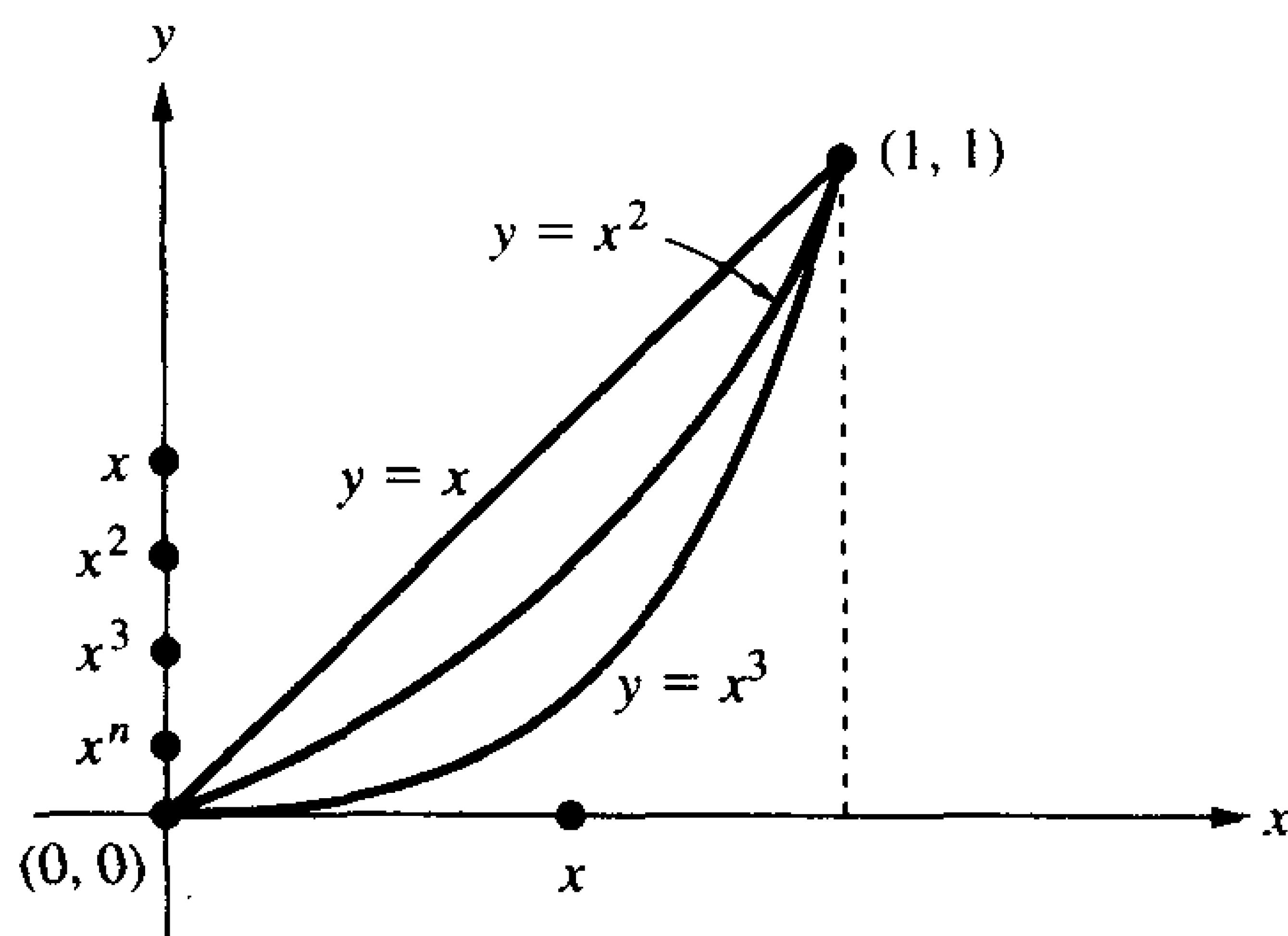


图 9.2 当 $0\leqslant x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}1^n=0$

这样，函数序列 $\{f_n:[0,1]\to\mathbb{R}\}$ 逐点收敛到由下式定义的函数 $f:[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x=1\\ 0 & \text{若 } 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

注意，这是一个逐点收敛到一个非连续函数的连续函数序列的例子. ■ [241]

例 9.23 对每个自然数 n, 定义

$$\text{对于所有 } x,\quad f_n(x)=e^{-nx^2}.$$

则 $\{f_n(0)\}$ 是常数序列，其常数值是 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=1$. 另一方面，由于当 $b>0$ 时 $e^b>1+b$, 可得

$$\text{对所有 } b>0,\quad \frac{1}{e^b}<\frac{1}{1+b}.$$

这样，对每个下标 n 及每个 $x\neq 0$,

$$0<f_n(x)<\frac{1}{1+nx^2},$$

所以，若 $x\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 这样，函数序列 $\{f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ 逐点收敛到由下式定义的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}0 & 当\ x\neq 0\\ 1 & 当\ x=0.\end{cases}$$

如图9.3所示. 注意这是一个函数序列的例子, 函数序列中每一个都是在ℝ内可微的, 它逐点收敛于ℝ上在 $x=0$ 不可微的函数.

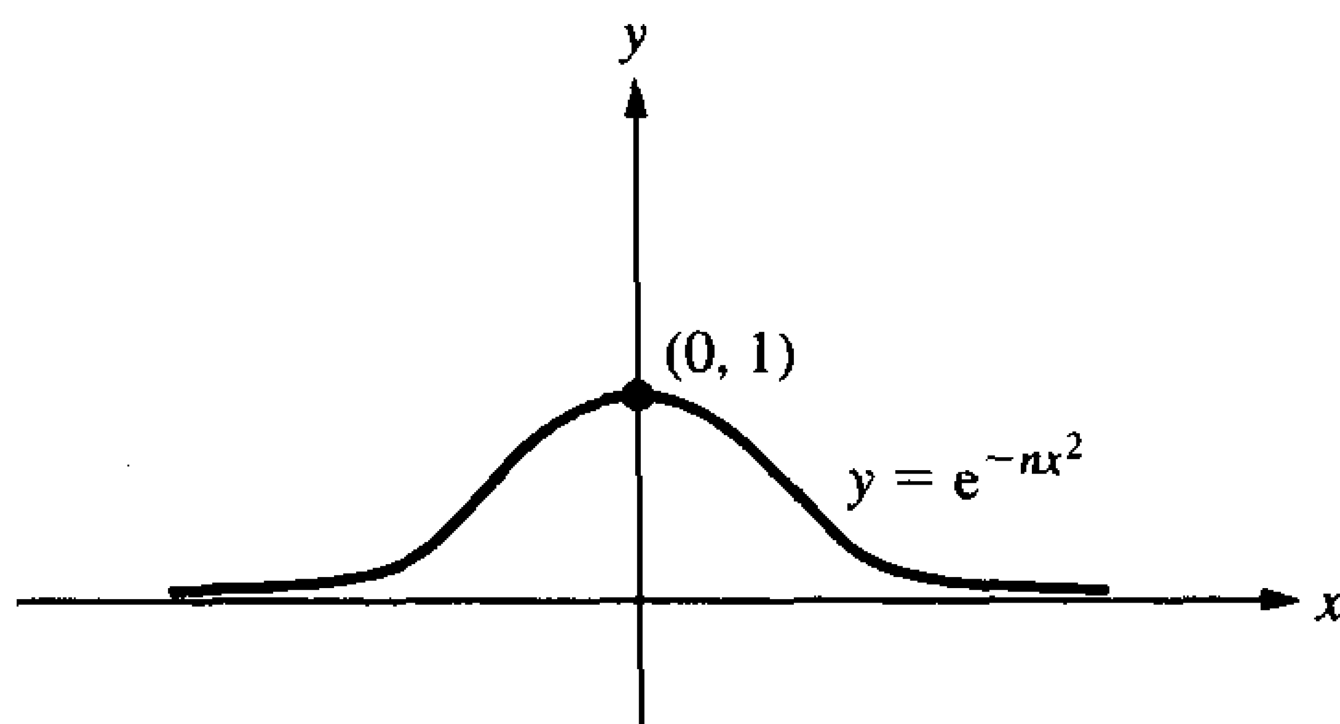


图9.3 当 $x\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx^2}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n[0]^2}=1$ ■

例9.24 形如 $x=k/2^n$ 的数 x(其中 k 是整数, n 是自然数)称为二进位有理数. 对每个自然数 n 及位于区间[0, 1]的每个数 x, 定义

242

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & 当\ x=k/2^n,\quad k\ 是自然数\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

显然, 当 $x=k/2^N$ 是二进位有理数时, 对每个下标 $n\geqslant N$, $f_n(x)=1$. 这样, 函数序列 $\{f_n\}$ 在[0, 1]上逐点收敛于如下定义的函数:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\ 是二进位有理数\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

这是一个在有界闭区间上可积的函数序列逐点收敛于一个不可积函数的例子(习题5). ■

例9.25 对每一个自然数 n, 定义 f_n: [0, 1]→ℝ 如下: $f_n(0)=f(2/n)=f_n(1)=0$, $f_n(1/n)=n$, f_n 在区间[0, 1/n], [1/n, 2/n]及[2/n, 1]上都是线性的. 如图9.4所示.

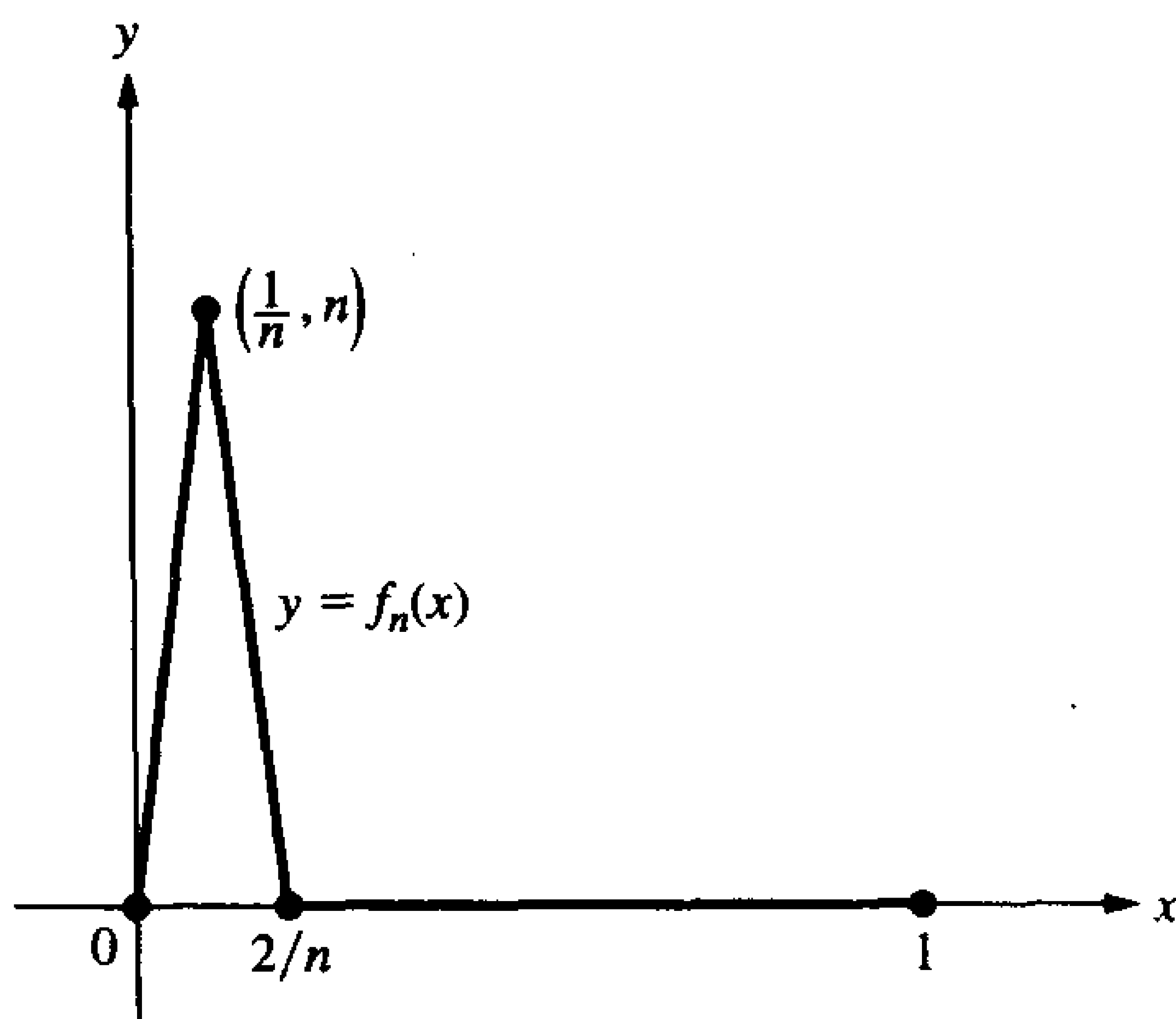


图9.4 当 $2/n\leqslant x\leqslant 1$, $f_n(x)=0$; $\int_0^1 f_n=1$

由于$\{f_n(0)\}$是常值序列，它的值是0，即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

另一方面，对$[0, 1]$中任一正数x，由$\mathbb{R}$的阿基米德性质，存在自然数N使得$1/2N < x$. 因此，对每一个$n \geqslant N$，$f_n(x) = 0$. 这样，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

于是，函数序列$\{f_n\}$在区间$[0, 1]$上逐点收敛于常值函数0(即在$[0, 1]$上恒等于0的函数). 观察到$\int_0^1 f = 0$，而对每个下标n，$\int_0^1 f_n = 1$. ■ 243

例 9.26 对每个自然数n，定义当$0 \leqslant x \leqslant 1$时，

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

依照泰勒级数展开式(8.16)，函数序列$\{f_n\}$在$[0, 1]$上逐点收敛于函数e^x. 用无穷级数记号，当$0 \leqslant x \leqslant 1$时，可表示成

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

在这个例子中没有什么反常. ■

习题

1. 对每个自然数n及每个数x，定义

$$f_n(x) = \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}.$$

求函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得序列$\{f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$逐点收敛于$f$.

2. 对每个自然数n及每个数$x \geqslant 2$，定义

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}.$$

求函数f: $[2, \infty) \to \mathbb{R}$，使得序列$\{f_n: [2, \infty) \to \mathbb{R}\}$逐点收敛于$f$.

3. 对每个自然数n及$(0, 1)$中每个数x，定义

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}.$$

求函数f: $(0, 1) \to \mathbb{R}$，使得序列$\{f_n: (0, 1) \to \mathbb{R}\}$逐点收敛于$f$.

4. 对每个自然数n及$[0, 1]$中每个数x，定义

$$f_n(x) = \frac{x}{nx + 1}.$$

求函数f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$，使得序列$\{f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}\}$逐点收敛于$f$.

5. 证明二进位有理数在$\mathbb{R}$中是稠密的，并由此推出例9.24中的极限函数是不可积的.

6. 对每个自然数n及$(-1, 1)$中每一个数x，定义

$$p_n(x) = x + x(1 - x^2) + \cdots + x(1 - x^2)^n.$$

证明序列$\{p_n: (-1, 1) \to \mathbb{R}\}$是逐点收敛的. 244

9.3 函数序列的一致收敛

对于逐点收敛到函数$f:D\to\mathbb{R}$的函数序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$，我们希望确定单个f_n的那些性质，这些性质被极限函数f: $D\to\mathbb{R}$所继承下来. 很自然地要考虑三个问题.

问题 A 假定每个函数$f_n:D\to\mathbb{R}$是连续的，极限函数$f:D\to\mathbb{R}$也连续吗?

答案：不. 例9.22就描述了一个多项式序列在区间[0, 1]上逐点收敛于一个不连续函数.

问题 B 如果$D=I$是开区间而每个函数$f_n:I\to\mathbb{R}$是可微的，极限函数$f:D\to\mathbb{R}$也可微吗? 如果它可微，是否有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)\right]=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)?$$

答案：不. 例9.23就描述了一个指数函数的序列，它在$\mathbb{R}$中逐点收敛于一个不可微函数.

问题 C 如果$D=[a,\ b]$而每个函数f_n: $[a,\ b]\to\mathbb{R}$是可积的，极限函数f: $[a,\ b]\to\mathbb{R}$也可积吗? 如果可积，是否有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n\right]=\int_a^b f?$$

答案：不. 例9.24描述了一个阶梯函数序列在[0, 1]上逐点收敛于一个不可积函数. 此外，正如例9.25所示，即使极限函数是可积的，极限的积分也未必等于积分的极限.

尽管三个问题的回答是令人沮丧的，然而，这无关紧要. 如果把逐点收敛的假定加强为称为一致收敛(uniform covergence)的假定，则第一个与第三个问题的回答是肯定的，而问题B也有十分满意的回答. 同等重要的是，在许多有意义的场合一致收敛性能够得到证实.

定义 给定函数$f:D\to\mathbb{R}$及函数序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$，称序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$一致收敛到$f:D\to\mathbb{R}$或$\{f_n\}$在D上一致收敛到f,倘若对每个正数ε存在下标N,使得

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N \text{ 及 } D \text{ 中所有的 } x,\text{都有 } |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{9.9}$$

从上述定义显然可以看出一致收敛蕴涵了逐点收敛，但反之不然. 为理解一致收敛与逐点 [245] 收敛之间的区别，注意到序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$逐点收敛到$f:D\to\mathbb{R}$，倘若对D中每个固定的点x，数列$\{f_n(x)\}$收敛到数$f(x)$; 这样，对D中给定的点x及正数ε，存在下标N使得对$n\geqslant N$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 与$\varepsilon$的要求相呼应的下标$N$可能依赖于点$x$. 在集合$D$上一致收敛的情形中，对于一给定的正数$\varepsilon$，存在一个对于$D$中的所有点，与$\varepsilon$的要求相呼应的下标$N$.

用图形来说，序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$一致收敛到$f:D\to\mathbb{R}$是指：如果对每个正数ε，存在一个自然数N，使得如果$n\geqslant N$，函数$f_n:D\to\mathbb{R}$的图形位于函数$f+\varepsilon:D\to\mathbb{R}$及$f-\varepsilon:D\to\mathbb{R}$的图形之间. 如图9.5所示.

现在回到前一节中讨论的两个逐点收敛的例子，我们从是否一致收敛的角度分析它们.

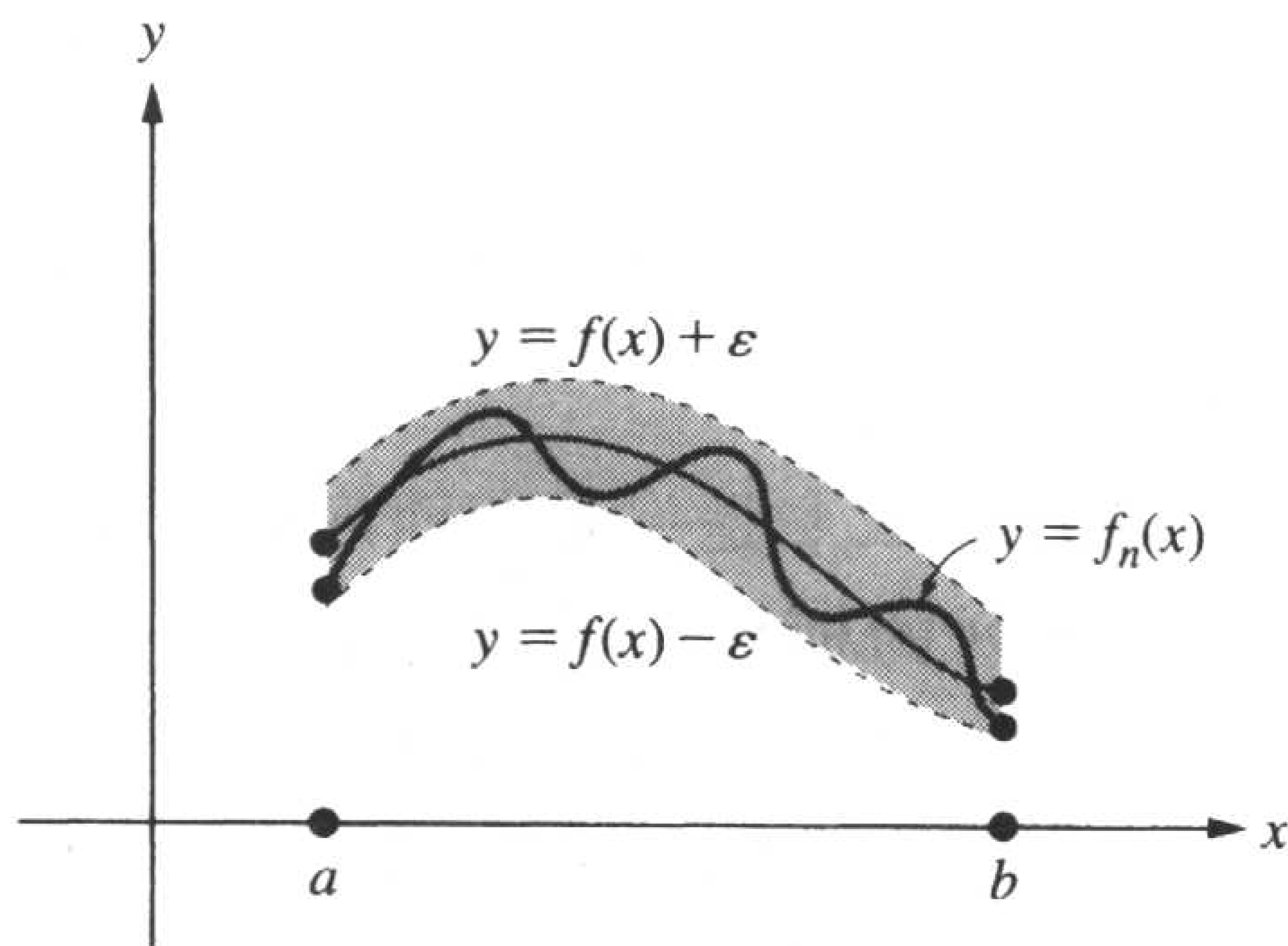


图 9.5　当 $a \leqslant x \leqslant b$ 及 $n \geqslant N$ 时，$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$

例 9.27　设序列$\{f_n: [0,1] \to \mathbb{R}\}$及函数$f$: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 如例 9.22 所示. 收敛不是一致的. 事实上，对 $\varepsilon=1/2$，不存在具有如下性质的下标 N:

$$\text{对所有下标 } n \geqslant N \text{ 及}[0,1] \text{ 中所有点 } x, |f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2}.$$

这是因为，无论选取怎样的下标 N，通过取 $x=(3/4)^{\frac{1}{N+1}}$，我们有

$$f_{N+1}(x)-f(x)=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}.$$ ■

例 9.28　设函数序列$\{f_n: [0,1] \to \mathbb{R}\}$及函数 f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 如例 9.26 所示. 可以断定$\{f_n: [0,1] \to \mathbb{R}\}$一致收敛到$f$: $[0,1] \to \mathbb{R}$. 为验证这一论断，需要从应用于指数函数的拉格朗日余项定理所得到的估计(8.6). 按照估计式(8.6)，对所有下标 n 和区间$[0,1]$中的所有点 x,

$$|f(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{4}{(n+1)!}. \tag{9.10}$$

246

现在令 $\varepsilon>0$，由$\mathbb{R}$的阿基米德性质，可选取自然数 N，使得 $N>4/\varepsilon$. 这样，

$$\text{对所有下标 } n \geqslant N \text{ 及}[0,1] \text{ 中的所有点 } x, \quad |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$ ■

在 9.1 节，我们提供了数列收敛的柯西准则. 对函数序列的一致收敛存在类似的准则.

定义　函数序列 $\{f_n: D \to \mathbb{R}\}$ 称为一致柯西序列或$\{f_n\}$称为在 D 上的一致柯西序列，倘若对每个正数 ε，存在下标 N 使得

$$\text{对每个下标 } n \geqslant N\text{、每个自然数 } k \text{ 及 } D \text{ 中每个点 } x, |f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{9.11}$$

定理 9.29(魏尔斯特拉斯一致收敛准则)　函数序列 $\{f_n: D \to \mathbb{R}\}$ 一致收敛到函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 当且仅当序列 $\{f_n: D \to \mathbb{R}\}$ 是一致柯西序列.

证明　假定 $\{f_n: D \to \mathbb{R}\}$ 一致收敛到$f: D \to \mathbb{R}$. 我们将证明 $\{f_n: D \to \mathbb{R}\}$ 是一致柯西序列. 事实上，令 $\varepsilon>0$，可选取下标 N 使得

$$\text{对所有下标 } n \geqslant N \text{ 及 } D \text{ 中每个点 } x, \quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

运用三角不等式，可得对每个下标 $n \geqslant N$、每个自然数 k 及 D 中每个点 x,

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)| = |f_{n+k}(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)|$$
$$\leqslant |f_{n+k}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这样，序列 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 是一致柯西序列.

为证其逆，假定函数序列 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 是一致柯西序列. 设 x 是 D 中的点. 则显然实数列 $\{f_n(x)\}$ 也是柯西序列，因而按照数列的柯西收敛准则，$\{f_n(x)\}$ 收敛. 用 $f(x)$ 表示其极限. 这就定义了函数 $f:D\to\mathbb{R}$，f 是仅有的 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 可以一致收敛到它的候选函数.

以下证明 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 确实一致收敛到 $f:D\to\mathbb{R}$. 令 $\varepsilon>0$. 由于 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 是一致柯西序列，可选取自然数 N，使得对每个 $n\geqslant N$、每个自然数 k 及 D 中每个点 x，

247

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.12}$$

令 x 是 D 中的点，选取 $n\geqslant N$. 注意到从不等式(9.12)有

$$\text{对每个自然数 } k,\quad f_n(x)-\frac{\varepsilon}{2}<f_{n+k}(x)<f_n(x)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.13}$$

但

$$\lim_{k\to\infty} f_{n+k}(x)=f(x),$$

所以从(9.13)得到

$$f_n(x)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant f(x)\leqslant f_n(x)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N \text{ 及 } D \text{ 中所有点 } x, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

这就推得 $\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$ 一致收敛到 $f:D\to\mathbb{R}$. ■

例 9.30 对每个自然数 n 及每个 $|x|\leqslant 1$ 的数 x，定义

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k2^k}.$$

注意到运用三角不等式与几何和公式，对每对自然数 n 和 k 及每个 $|x|\leqslant 1$ 的数 x，有

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)|\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}+\cdots+\frac{|x|^{n+k}}{(n+k)2^{n+k}}$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+k}}\leqslant\frac{1}{2^n}. \tag{9.14}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/2)^n=0$，这与不等式(9.14)一起蕴涵了序列 $\{f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}\}$ 是一致柯西序列. 按照魏尔斯特拉斯一致收敛准则，存在函数 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$，使得序列 $\{f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}\}$ 一致收敛到它. ■

习题

1. 对每个自然数 n 及每个数 x，定义

$$f_n(x)=\frac{1-|x|^n}{1+|x|^n}.$$

求函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得序列$\{f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$逐点收敛到它. 证明收敛不是一致的.

2. 对每个自然数n及每个数$x\geqslant 2$，定义

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}.$$

[248]

求函数f: $[2,\infty)\to\mathbb{R}$，使得序列$\{f_n$: $[2,\infty)\to\mathbb{R}\}$逐点收敛到它. 证明收敛是一致的.

3. 对每个自然数n及$(0,1)$中每个数x，定义

$$f_n(x)=\frac{1}{nx+1}.$$

求函数f: $(0,1)\to\mathbb{R}$，使得序列$\{f_n$: $(0,1)\to\mathbb{R}\}$逐点收敛到它. 证明收敛不是一致的.

4. 对每个自然数n及$[0,1]$中每个数x，定义

$$f_n(x)=\frac{x}{nx+1}.$$

求函数f: $[0,1]\to\mathbb{R}$使得序列$\{f_n$: $[0,1]\to\mathbb{R}\}$逐点收敛到它. 证明收敛是一致的.

5. 确定例9.23、9.24及9.25中的序列是否一致收敛.

6. 假定序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$及$\{g_n:D\to\mathbb{R}\}$分别一致收敛到函数$f:D\to\mathbb{R}$及g: $D\to\mathbb{R}$. 对任意两个数α及β，证明序列$\{\alpha f_n+\beta g_n:D\to\mathbb{R}\}$一致收敛到$\alpha f+\beta g$: $D\to\mathbb{R}$.

7. 对每个自然数n，令函数$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是有界的. 假定序列$\{f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$一致收敛到$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 证明极限函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$也是有界的.

8. 设$\{a_n\}$是有界数列. 对每个自然数n及每个数x，定义

$$f_n(x)=a_0+a_1x+\frac{a_2x^2}{2!}+\cdots+\frac{a_nx^n}{n!}.$$

证明对每个$r>0$，函数序列$\{f_n$: $[-r,r]\to\mathbb{R}\}$是一致收敛的.

9.4 函数序列的一致极限

对于9.3节开始所提出的三个问题，通过将逐点收敛的假定加强为一致收敛，可以得到某些肯定的回答.

一致收敛的连续函数序列

定理9.31 假定$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$是一致收敛到函数$f:D\to\mathbb{R}$的连续函数序列，则极限函数$f:D\to\mathbb{R}$也是连续的.

[249]

证明 设x_0是D中的点. 为证明函数$f:D\to\mathbb{R}$在x_0连续，我们将运用连续性的ε-δ准则. 事实上，令$\varepsilon>0$. 需找到一个$\delta>0$，使得

$$\text{对}D\text{中满足}|x-x_0|<\delta\text{的所有点}x,\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{9.15}$$

由于序列$\{f_n:D\to\mathbb{R}\}$一致收敛到函数$f:D\to\mathbb{R}$，可选取下标N，使得

$$\text{对所有下标}n\geqslant N\text{及}D\text{中所有点}x,\quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

应用$n=N$时的上述不等式及三角不等式，可得对D中所有点x，

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(x_0)+f_N(x_0)-f(x_0)|\\&\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.16}$$

由假设，函数f_N: $D \to \mathbb{R}$ 在 x_0 是连续的. 于是可选取 $\delta > 0$，使得

$$\text{对 } D \text{ 中满足 } |x - x_0| < \delta \text{ 的所有点 } x, \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.17}$$

不等式(9.16)及(9.17)表明，

$$\text{对 } D \text{ 中所有满足 } |x - x_0| < \delta \text{ 的 } x, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这样函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 处是连续的. ■

一致收敛的可积函数序列

定理 9.32 假定$\{f_n: [a, b] \to \mathbb{R}\}$是一致收敛到函数$f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 的可积函数序列，则极限函数f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 也是可积的. 而且，

$$\lim_{n \to \infty} \left[\int_a^b f_n \right] = \int_a^b f.$$

证明 从预备性的评述开始：从上积分和下积分的定义(习题6)知它保持了下述单调性：如果h: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 及 g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是有界的且

$$\text{对}[a,b] \text{ 中所有 } x, \quad h(x) \leqslant g(x),$$

则

250

$$\underline{\int_a^b} h \leqslant \underline{\int_a^b} g \quad \text{及} \quad \overline{\int_a^b} h \leqslant \overline{\int_a^b} g.$$

为证明f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 是可积的，即它的上积分等于下积分，只需证明对任一 $\varepsilon > 0$，

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon. \tag{9.18}$$

令 $\varepsilon > 0$，则 $\varepsilon' \equiv \varepsilon / 4[b - a]$也是正的. 因为$\{f_n\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f$，故存在$f_n$使得当 $x \in [a, b]$时，有

$$f_n(x) - \varepsilon' \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon'. \tag{9.19}$$

从上积分的单调性及f_n 在$[a, b]$上的可积性，可得

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} [f_n + \varepsilon'] = \overline{\int_a^b} f_n + \frac{\varepsilon}{4} = \int_a^b f_n + \frac{\varepsilon}{4},$$

所以

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b f_n + \frac{\varepsilon}{4}.$$

类似地，用下积分的单调性，得到估计

$$\int_a^b f_n - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \underline{\int_a^b} f.$$

这样，

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \left[\int_a^b f_n + \frac{\varepsilon}{4} \right] - \left[\int_a^b f_n - \frac{\varepsilon}{4} \right] < \varepsilon.$$

(9.18)式已经被证实，所以f在$[a, b]$上可积.

现在只剩下证实

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n\right]=\int_a^b f.$$

令$\varepsilon>0$，我们需找到一个自然数N使得当$n\geqslant N$时，

$$\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right|<\varepsilon. \tag{9.20}$$

对$\varepsilon'=\varepsilon/[6(b-a)]$，由于$\{f_n\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f$，故存在一下标$N$使得(9.19)对每一下标$n\geqslant N$成立. 由积分的线性性与单调性，不等式(9.19)蕴涵不等式(9.20). ■

一致收敛的可微函数序列

对于9.3节中问题B的关于可微函数的极限的可微性的回答要比另外两个问题的回答更加小心. 可微函数一致收敛的极限未必是可微的(见习题1). 然而，存在十分合理的情况，在这种情况下极限函数是可微的，并且极限的导数是导数的极限. 251

定义在开区间上的函数$f: I\to\mathbb{R}$称为连续可微函数，倘若该函数是可微的且它的导数是连续的.

定理9.33 *设I是开区间，假定$\{f_n:I\to\mathbb{R}\}$是连续可微函数的序列且满足下列两条性质：*

(i)序列$\{f_n\}$在I上逐点收敛到函数f.

(ii)导函数序列$\{f'_n\}$在I上一致收敛到函数g.

则函数$f:I\to\mathbb{R}$是连续可微的并且

$$\text{对} I \text{中所有} x,\quad f'(x)=g(x).$$

证明 固定I中的点x_0. 按照微积分学第一基本定理，对每个下标n及I中每个点x，

$$f_n(x)-f_n(x_0)=\int_{x_0}^x f'_n. \tag{9.21}$$

而定理9.22蕴涵了对I中每个点x，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{x_0}^x f'_n\right]=\int_{x_0}^x g. \tag{9.22}$$

还有，根据假设，序列$\{f_n\}$在I上逐点收敛到函数f，对I中每个点x，

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(x_0)]=f(x)-f(x_0). \tag{9.23}$$

从(9.21)、(9.22)及(9.23)可得，

$$\text{对} I \text{中所有点} x,\quad f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^x g. \tag{9.24}$$

根据假设，对每个自然数n，函数$f'_n:I\to\mathbb{R}$是连续的，所以，根据定理9.31，一致极限$g:I\to\mathbb{R}$也是连续的，从(9.24)及微积分学第二基本定理可知，

$$\text{对} I \text{中所有} x,\quad f'(x)=g(x). \qquad ■$$

定理9.34 *设I是开区间，假定$\{f_n:I\to\mathbb{R}\}$是连续可微函数序列且具有下列两条性质：*

(i) 序列 $\{f_n\}$ 在 I 上逐点收敛到函数 f.

252 (ii) 导函数序列 $\{f'_n\}$ 在 I 上是一致柯西序列.

则函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是连续可微的且对 I 中每个 x,

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x).$$

证明 魏尔斯特拉斯一致收敛准则蕴涵了存在函数 $g: I \to \mathbb{R}$，使得序列 $\{f'_n: I \to \mathbb{R}\}$ 一致收敛到它. 从定理 9.33 即得所要证的结论. ■

一致收敛的性质频频地得到证实. 然而，存在许多有意义的情形，在这些情形中，函数序列并不一致收敛，但尽管如此，极限函数还是继承了逼近序列中单个函数所具有的性质[⊖]. 我们将描述这样一个例子：关于 π 的一个经典公式的证明.

命题 9.35（牛顿-格雷戈里(Newton-Gregory)公式）

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \tag{9.25}$$

证明 由于对每个数 x,

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2},$$

从微积分学第一基本定理可得

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 - \arctan 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx. \tag{9.26}$$

设 n 为自然数，用 $-x^2$ 替换几何和公式中的 γ，可见对每个数 x,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}dx. \tag{9.27}$$

积分的单调性质给出估计式

253

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}dx = \frac{1}{2n+3},$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right] = 0.$$

这样，从(9.26)及(9.27)可得(9.25). ■

对每个自然数 n 及 $[0, 1]$ 中每个数 x，定义

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}.$$

定义 $f(x) = 1/(1+x^2)$. 则牛顿-格雷戈里公式可以重述如下：

⊖ 推动基于勒贝格积分的更一般的积分理论发展的因素之一是，它研究在一致收敛不存在的情况下，何时有极限的积分等于积分的极限，见 H. L. Roydon 的书《Real Analysis》(实分析，中文版已由机械工业出版社引进出版).

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 f_n\right]=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

我们没有证明函数序列$\{f_n: [0, 1]\to\mathbb{R}\}$一致收敛到函数$f: [0, 1]\to\mathbb{R}$就证明了以上式子. 事实上，甚至连在整个区间$[0, 1]$上逐点收敛都没有，因为序列$\{f_n(1)\}$不收敛到$f(1)$.

习题

1. 对每个自然数n及$(-1, 1)$中每个数x，定义
$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$$
并定义$f(x)=|x|$. 证明序列$\{f_n\}$在开区间$(-1, 1)$上一致收敛到函数f. 验证每个函数f_n是可微的，但极限函数f在$x=0$处不可微. 这与定理9.33矛盾吗?
2. 对每个自然数n及$[0, 1]$中每个数x，定义
$$f_n(x)=nxe^{-nx^2}.$$
证明序列$\{f_n\}$在区间$[0, 1]$上逐点收敛到常数函数0，但积分序列$\left\{\int_0^1 f_n\right\}$不收敛到0. 这与定理9.32矛盾吗?
3. 证明：如果$\{f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$是连续的可微函数序列，使得导函数序列$\{f_n': \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$是一致收敛的且序列$\{f_n(0)\}$也是收敛的，则$\{f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$是逐点收敛的. 序列$\{f_n(0)\}$收敛的假定是必要条件吗?
4. 给出一个可微函数序列$\{f_n: (-1, 1)\to\mathbb{R}\}$：它一致收敛但$\{f'_n(0)\}$是无界的.
5. 在定理9.33的假定之下，证明对每个包含在I中的区间$[\alpha, \beta]$，序列$\{f_n: [\alpha, \beta]\to\mathbb{R}\}$一致收敛到$f: [\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$.

254

6. 令$h: [a, b]\to\mathbb{R}$及$g: [a, b]\to\mathbb{R}$是有界函数，使得对$[a, b]$中的所有x有
$$h(x)\leqslant g(x).$$
证明：若P是定义域$[a, b]$的一个划分，则
$$L(h,P)\leqslant L(g,P)\quad 及\quad U(h,P)\leqslant U(g,P).$$
用这些不等式建立上、下积分的单调性.（这一性质在定理9.32的证明中有过叙述.）

9.5 幂级数

在泰勒级数的研究中，我们是从无穷次可微函数开始，然后构筑泰勒级数，对它收敛到给定的函数进行过分析. 现在换一个观点，在这一节，用幂级数展开式定义一个函数，并研究这样的函数的性质.

定义 给定用非负整数作下标的实数序列$\{c_k\}$，定义级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$的收敛域是使得级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$收敛的全体数$x$的集合. 用$D$表示收敛域，然后定义函数$f:D\to\mathbb{R}$如下：

$$对D中所有x,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\right]=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k. \tag{9.28}$$

把(9.28)称为幂级数展开式，集合D称为展开式的收敛域.

例 9.36 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k+2}. \tag{9.29}$$

固定数 x，由于

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}x^{k+1}}{k+3}\Big/\frac{(-1)^{k}x^{k}}{k+2}\right| = |x|,$$

从级数的比率检验法可得，若 $|x|<1$，则幂级数(9.29)收敛；若 $|x|>1$，则幂级数(9.29)发散. 对 $x=1$，由交错级数检验法可推得(9.29)收敛. 对 $x=-1$，积分检验法表明级数发散. 这样，幂级数(9.29)的收敛域是区间$(-1, 1]$. ■

255

例 9.37 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k. .$$

对任意非零数 x，级数 $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ 的项不收敛到0，于是级数不收敛. 这样，幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ 的收敛域由单个点 $x=0$ 组成. ■

例 9.38 考虑幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k!)}x^k.$$

固定数 x. 由于

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{(1+(k+1)!)}x^{k+1}\Big/\frac{1}{(1+k!)}x^{k}\right] = 0,$$

级数的比率检验法表明这个级数的收敛域是所有实数的集合. ■

本节的主要目标是证明：如果函数 f：$(-r, r)\to\mathbb{R}$ 由幂级数展开式

$$\text{对 } |x|<r,\quad f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

所定义，则 f：$(-r, r)\to\mathbb{R}$ 是可微的，而且，

$$\begin{aligned}\text{如果 } |x|<r,\quad f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right]\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}.\end{aligned}$$

上述计算以级数展开式的逐项微分(term-by-term differentiation)而著称. 从第一式过渡到第二式(译者注：求导与求极限次序的交换，即和无穷时，和的导数是导数的和)，其合理性一点也不明显. 一旦这一计算是合理的，就很容易得到函数 f：$(-r, r)\to\mathbb{R}$ 有任意阶导数，因而任意阶的逐项微分是合理的.

256

幂级数的一致收敛性

对于函数序列，已对逐点收敛与一致收敛加以区分. 而对幂级数的收敛性有必要作出类似的区分.

定义 设 A 是幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛域的一个子集. 定义函数 f:$A\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\text{对 } A \text{ 中所有 } x,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,$$

而对每个自然数 n，定义函数 s_n：$A\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\text{对 } A \text{ 中所有 } x,\quad s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k.$$

级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 称为在集合 A 上一致收敛，倘若部分和序列 $\{s_n:A\to\mathbb{R}\}$ 一致收敛到函数 $f:A\to\mathbb{R}$.

引理 9.39 设 A 是幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 的收敛域的一个子集，假设下列条件成立：存在正数 M 及满足 $0\leqslant\alpha<1$ 的数 α，使得对每个下标 k 及对 A 中所有的 x，

$$|c_kx^k|\leqslant M\alpha^k. \tag{9.30}$$

证明 定义 $\{s_n:A\to\mathbb{R}\}$ 是级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 在集合 A 上的部分和序列. 根据集合上一致收敛的定义，必须证明函数序列 $\{s_n:A\to\mathbb{R}\}$ 一致收敛. 然而，魏尔斯特拉斯一致收敛准则断言，函数序列一致收敛当且仅当序列是一致柯西序列. 这样只要证明部分和序列是 A 上的一致柯西序列就足够了.

设 $\varepsilon>0$，需要求一个下标 N 使得对每个下标 $n\geqslant N$ 及每个自然数 k，

$$\text{对 } A \text{ 中所有的 } x,\quad |s_{n+k}(x)-s_n(x)|<\varepsilon. \tag{9.31}$$

257

然而，由三角不等式、假设(9.30)及几何和公式，可得对任意的自然数对 k 及 n，

$$\begin{aligned}\text{对 } A \text{ 中所有的 } x,\quad |s_{n+k}(x)-s_n(x)| &= |c_{n+k}x^{n+k}+\cdots+c_{n+1}x^{n+1}|\\ &\leqslant |c_{n+k}x^{n+k}|+\cdots+|c_{n+1}x^{n+1}|\\ &\leqslant M[\alpha^{n+k}+\cdots+\alpha^{n+1}]\\ &= M\alpha^{n+1}[1+\cdots+\alpha^{k-1}]\\ &= M\alpha^{n+1}\left[\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right]\leqslant M\alpha^{n+1}\left[\frac{1}{1-\alpha}\right].\end{aligned} \tag{9.32}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$，可选取自然数 N 使得

$$\text{对所有下标 } n\geqslant N,\quad \alpha^n<\frac{\varepsilon}{M}(1-\alpha).$$

如此选取 N 后，则从不等式(9.32)可得所要证明的不等式(9.31)成立. ■

为用上述引理证明幂级数逐项微分的合理性，请注意(见习题9)，如果数 α 与 β 满足 $0\leqslant\alpha<\beta$，则存在一个数 c 使得对每一非整数 k 有

$$k\alpha^k\leqslant c\beta^k. \tag{9.33}$$

命题 9.40 假定非零数 x_0 在幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 的收敛域中. 设 r 是小于 $|x_0|$ 的任意正数. 则区间 $[-r,r]$ 在幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 的收敛域之中且也在导出幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}$ 的收敛域之中. 此

外，幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad 及 \quad \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

在区间$[-r, r]$上一致收敛.

证明 首先证明幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 在区间$[-r, r]$上一致收敛. 由于级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 收敛，所以该级数的项收敛到0，特别是级数的项有界. 这样，可选取数 M，使得

$$对每个下标 k, \quad |c_k x_0^k| \leqslant M.$$

定义 $\alpha \equiv r/|x_0|$并注意到 $0 \leqslant \alpha < 1$. 此外，把 x 写作 $x = (x/x_0)x_0$，可见对每个下标 k 及 $x \in [-r, r]$，

258

$$|c_k x^k| \leqslant M\alpha^k. \tag{9.34}$$

可从引理9.39推出级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 在区间$[-r, r]$上的一致收敛性.

现考虑导出级数(derived series) $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$，注意到级数中 x^k 的系数是$(k+1)c_{k+1}$. 这样，由引理9.39，欲建立导出级数在$[-r, r]$上的一致收敛性，只需找到数 $\alpha'(0 < \alpha' < 1)$及一个正数 M'使得对每个下标 k 及 $x \in [-r, r]$有

$$|(k+1)c_{k+1}x^k| \leqslant M'[\alpha']^k. \tag{9.35}$$

为此，注意到如果在 $x = r$ 处用估计(9.34)有$|x| \leqslant r$，对每一下标 k 及 $x \in [-r, r]$，我们有下述估计：

$$\begin{aligned} |(k+1)c_{k+1}x^k| &\leqslant (k+1)|c_{k+1}|r^k = \frac{(k+1)}{r}|c_{k+1}|r^{k+1} \\ &\leqslant \frac{(k+1)}{r}M\alpha^{k+1} \leqslant \left[\frac{(k+1)}{\alpha k r}M\right]k\alpha^k \leqslant \left[\frac{2M}{\alpha r}\right]k\alpha^k. \end{aligned} \tag{9.36}$$

然而，由于$0 \leqslant \alpha < 1$，如果取 $\alpha' = [\alpha + 1]/2$，则有$0 \leqslant \alpha < \alpha' < 1$. 由(9.4)，可选取 $c > 0$ 使得对每一下标 k，

$$k\alpha^k \leqslant c[\alpha']^k. \tag{9.37}$$

从这个不等式与不等式(9.36)，可以看到不等式(9.35)对选定的 α'及 $M' \equiv c \cdot \left[\frac{2M}{\alpha r}\right]$是成立的.

■

令 D 是幂级数展开式 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛域，从命题9.40可得，若 D 无界，则 $D = \mathbb{R}$. 若 D 有界，则定义

$$r = \sup D.$$

因此

$$(-r, r) \subseteq D \subseteq [r, r].$$

因为上述原因，我们称数 r 是级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛半径.

我们把下述结论的证明留作习题：当序列$\{|a_n|^{1/n}\}$收敛于 α 时，若 $\alpha=0$，则 $D=\mathbb{R}$；若 $\alpha>0$，则 $r=\alpha^{-1}$.（习题 14.） [259]

幂级数的逐项微分

定理 9.41 设 $r>0$，区间$(-r,r)$在级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛域内，定义若$|x|<r$，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

则函数 f: $(-r,r)\to\mathbb{R}$ 有任意阶导数. 对每个自然数 n 及$|x|<r$ 有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[c_k x^k],$$

特别地，

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=c_n.$$

证明 显然，只需证明

$$若|x|<r,\quad f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c_k x^k),$$

于是

$$f'(0)=c_1.$$

由于按照定理 9.40，任意在$(-r,r)$收敛的幂级数的导出级数在$(-r,r)$也收敛，所以一般的结果可由归纳法推出.

选取 R 是小于 r 的任意正数. 由于级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 在 R 和 r 间的每一点都收敛，按照定理 9.40，下面的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad 和 \quad \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

在区间$[-R,R]$上一致收敛.

对每个自然数 n，定义

$$如果|x|<R,\quad s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

则每个函数序列

$$\{s_n:(-R,R)\to\mathbb{R}\}\quad 和\quad \{s_n':(-R,R)\to\mathbb{R}\}$$ [260]

都是一致收敛的. 定理 9.34 蕴涵了

$$如果|x|<R,\quad \lim_{n\to\infty} s_n'(x)=f'(x),$$

即

$$如果|x|<R,\quad \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}=f'(x).$$

由于对区间$(-r,r)$中的每一点 x，都可选取小于 r 的正数 R，而$|x|<R$，可得

$$对区间(-r,r)中所有点 x,\quad f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$ ■

上述定理蕴涵了在区间$(-r, r)$中由幂级数展开式定义的函数与它关于0的泰勒级数展开式一致，这是幂级数展开式中关于系数的唯一的结果.

再论三角函数的微分方程

$$\begin{cases}F''(x)+F(x)=0 & \text{对所有 } x\\ F(0)=1, \quad F'(0)=0.\end{cases} \tag{9.38}$$

回忆在5.2节中，我们证明了三角函数的微分方程至多有一个解，且预先假定它有解. 现在我们把该假定去掉，叙述它有解且可表示为一个幂级数.

定理 9.42 对每个数x，级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

收敛. 定义

$$\text{对所有 } x, \quad F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}. \tag{9.39}$$

则函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有任意阶导数且满足微分方程(9.38).

证明 由级数的比率检验法可得，级数$\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k/(2k)!]x^{2k}$的收敛域是所有实数的集合. 于是，上述函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是恰当定义的. 因此，根据定理9.41可得，对所有x，

261

$$F'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1},$$

$$F''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-2)!}x^{2k-2}=-F(x).$$

于是，幂级数展开式(9.39)定义了函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它满足微分方程(9.38). ■

习题

1. 确定下列各幂级数的收敛域：

   a. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k5^k}$ b. $\sum_{k=1}^{\infty}k!x^k$ c. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k-1}}{(2k+1)!}$

2. 证明

$$\text{如果 } |x|<1, \quad \frac{1}{(1+x)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k.$$

3. 证明

$$\text{如果 } |x|<1, \quad \frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{k-1}.$$

4. 证明

$$\text{如果 } |x|<1, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{2k-2}.$$

5. 证明

$$\text{如果 } |1-x|<|x|, \quad x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^k.$$

6. 定义如果$|x|<1$，$f(x)=1/(1-x)^3$. 求函数f：$(-1,1)\to\mathbb{R}$ 的幂级数展开式.

7. 假定幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 的收敛域包含区间$(-r,r)$. 定义

$$\text{如果 } |x|<r,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k.$$

设区间$[a,b]$包含在区间$(-r,r)$之中. 证明

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}[b^{k+1}-a^{k+1}].$$

262

8. 对积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}}1/(1+x^4)\,dx$$

建立幂级数展开式并证明你的结论.

9. 证明不等式(9.33). (提示：对数α和β，其中$0\leqslant\alpha\leqslant\beta$，定义$r\equiv\alpha/\beta$，注意到由于$0\leqslant r\leqslant1$，可从序列的比率引理得到$\lim\limits_{n\to\infty}kr^k=0$. 特别地，可选取$c>0$使得对每一个下标$k$有$kr^k\leqslant c$.)

10. 对每个数x，定义

$$h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\quad\text{及}\quad g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

证明对任意一对数α和β，函数

$$f=\alpha h+\beta g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

是下面微分方程的解：

$$\begin{cases}f''(x)-f(x)=0 & x\in\mathbb{R}\\ f(0)=\alpha\text{ 及 }f'(0)=\beta.\end{cases}$$

11. 证明：如果$0\leqslant\alpha<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\alpha^n=0$.

12. 改写几何和公式如下：对每个自然数n，

$$\frac{1}{1-x}-(1+x+\cdots+x^n)=\frac{x^{n+1}}{1-x},\quad\text{若 } x\neq1.$$

对该恒等式求导得到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)-(1+2x+\cdots+nx^{n-1})=\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

用这个不等式及习题 11 直接证明几何级数逐项微分的正确性.

13. 证明级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+|x|^k}$$

收敛当且仅当$|x|>1$. 特别地，证明级数在$x=2$收敛但在$x=1$不收敛. 这与定理 9.40 矛盾吗？(提示：这不是幂级数.)

14. 假设$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\alpha$.

   a. 如果$\alpha>0$，证明：如果$|x|<1/\alpha$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，而如果$|x|>1/\alpha$，则该级数发散.

   b. 如果$\alpha=0$，证明 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对所有$x\neq0$都收敛.

263

9.6 一个无处可微的连续函数

魏尔斯特拉斯提出第一个这样的连续函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的例子，该函数具有以下值得关注的性质：它在任何一点上都不可微，这样的函数称为无处可微(nowhere differentiable). 我们将分析

这样一个例子，其中f定义为展开式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x),\text{对所有 }x,$$

且函数f继承单个h_k所具有的不可微性.

我们先证明一个预备命题，它是关于用连续函数构造连续函数的级数的.

命题 9.43 假设$\sum_{k=0}^{\infty}c_k$是收敛的非负数列. 对每个非负整数k，令h_k: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续函数且对所有x

$$|h_k(x)|\leqslant c_k. \tag{9.40}$$

定义对所有x,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}h_k(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x). \tag{9.41}$$

则函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的.

证明 该命题的证明基于判断数列收敛的柯西收敛准则及判断函数序列一致收敛的魏尔斯特拉斯一致收敛准则. 对每个自然数n及数x，定义

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}h_k(x).$$

由于h_k是连续的，故每个f_n也是连续的. 现在证明$\{f_n\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛. 一旦这一点得到证实，就可由魏尔斯特拉斯一致收敛准则推出$\{f_n\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛. 由定理9.31，可得极限函数f是连续的，f是函数序列的一致极限.

由假设(9.40)及三角不等式，对每个下标n、自然数k及任意数x,

$$\begin{aligned}|f_{n+k}(x)-f_n(x)|&=|h_{n+k}(x)+\cdots+h_{n+1}(x)|\\&\leqslant|h_{n+k}(x)|+\cdots+|h_{n+1}(x)|\\&\leqslant c_{n+k}+\cdots+c_{n+1}\end{aligned} \tag{9.42}$$

264

将数列的柯西收敛准则应用到级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_k$的部分和序列上，可以得出部分和序列是柯西序列. 于是，由估计(9.42)可得函数序列$\{f_n\}$在$\mathbb{R}$上是一致收敛的柯西序列. ■

现在对h_k作一特殊选择，使得f在每一点上都是可微的.

回忆函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$称为是周期的，其周期为$p$，倘若对所有$x$有

$$f(x+p)=f(x).$$

若函数f有周期p，k为任意整数，则它也以kp为周期.

引入下述术语是很方便的：对正数ℓ，定义基长为2ℓ的帐篷函数(tent function)是以2ℓ为周期的周期函数h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它在区间$[-\ell,\ell]$上定义为

$$h(x)=|x|,\quad -\ell\leqslant x\leqslant\ell.$$

如图9.6所示. 对整数m，我们称区间$[m\ell,(m+1)\ell]$是这个帐篷函数的单调区间.

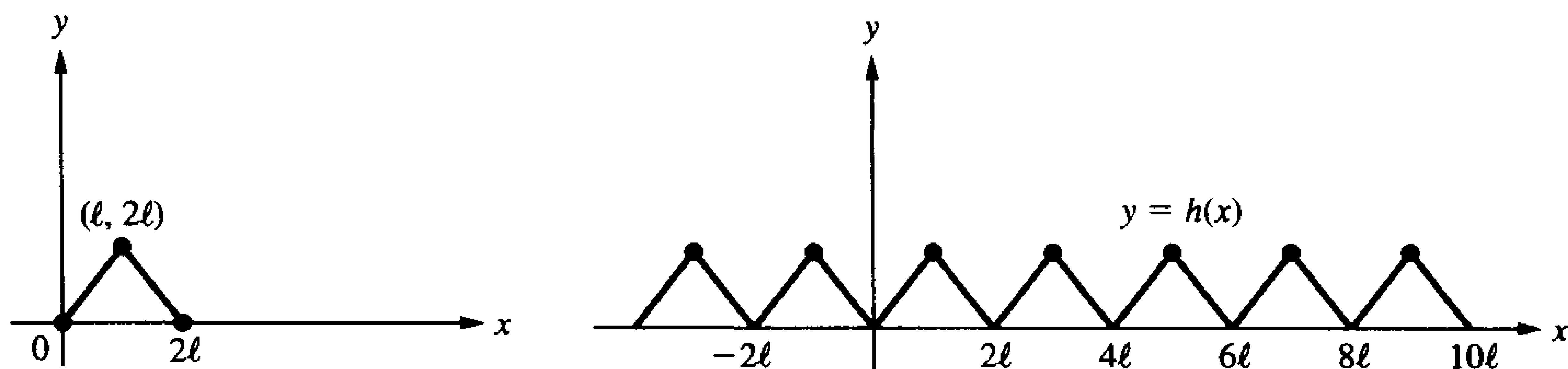


图 9.6 基长为 2ℓ 的帐篷函数

引理 9.44 对 $\ell>0$，令 h：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是基长为 2ℓ 的帐篷函数. 设 x_0 为任意数. 则区间 $[x_0, x_0+\ell/2]$ 或区间 $[x_0-\ell/2, x_0]$ 中包含在函数 h 的单调区间内.

证明 回忆定理 1.8，它断言对任意数 c，区间 $[c, c+1)$ 内存在唯一整数. 我们应用这个定理，取 $c=x_0/\ell-1$，并选择一整数 m，使得

$$x_0/\ell-1\leqslant m<x_0/\ell.$$

这个不等式的左边可产生 $x_0\leqslant(m+1)\ell$. 而它的右边可产生

$$m\ell<x_0\leqslant(m+1)\ell.$$

265

考虑区间 $[m\ell, (m+1)\ell]$ 的中点 z. x_0 或属于左边区间 $(m\ell, z]$ 或属于右边区间 $(z, (m+1)\ell]$. 在第一种情况下，$[x_0, x_0+\ell/2]$ 包含在区间 $[m\ell, (m+1)\ell]$ 内；而在第二种情况下，$[x_0-\ell/2, x_0]$ 包含在 $[m\ell, (m+1)\ell]$ 内. 当然，$[m\ell, (m+1)\ell]$ 是帐篷函数 h 的一个单调区间. ■

我们需要帐篷函数 h：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的以下两个性质：若 u，v 同属于 h 的单调区间，则

$$\frac{h(u)-h(v)}{u-v}=\pm 1. \tag{9.43}$$

由于 h 的基长为 2ℓ，所以 2ℓ 的任何整数倍都是 h 的周期，即对任意整数 j 和任意数 u，有

$$h(u+j[2\ell])=h(u). \tag{9.44}$$

定理 9.45 对每个非负整数 k，令 $h_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是基长为 $2\ell_k$ 的帐篷函数，其中 $\ell_k=(1/4)^k$. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(x), \text{对所有 } x.$$

则

i. 函数 f 是连续的.

ii. 函数 f 是无处可微的.

证明 由帐篷函数的定义，对每个非负整数 k 及任意数 x，

$$|h_k(x)|\leqslant \ell_k=(1/4)^k.$$

因此，由于几何级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1/4)^k$ 收敛，所以由命题 9.43 知 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

令 x_0 为任意数. 我们将证明 f 在 x_0 处是不可微的，选取一序列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$ 且收敛于 x_0，但极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

是不存在的.

令 n 是自然数. 取 $\ell=\ell_n$，应用引理9.44. 这样，$[x_0, x_0+\ell_n/2]$或$[x_0-\ell_n/2, x_0]$包含在 h_n 的单调区间内. 在第一种情况下，取 $x_n=x_0-\ell_n/2$；而在第二种情况下，则取 $x_n=x_0+\ell_n/2$. 于是，由于 x_0 与 x_n 同属于函数 h_n 的单调区间，由(9.43)，

266

$$\frac{h_n(x_n)-h_n(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1.$$

对 $k>n$，函数 $h_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有周期 $2\ell_k$. 由于 $\ell_n/2=j[2\ell_k]$，其中 $j\equiv\ell_n/(4\ell_k)=4^{k-n-1}$是自然数，因此由(9.44)有

$$h_k(x_0)-h_k(x_n)=h_k(x_0)-h_k(x_0\pm j[2\ell_k])=0.$$

从而有

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{h_k(x_n)-h_k(x_0)}{x_n-x_0}\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{h_k(x_n)-h_k(x_0)}{x_n-x_0}\right]. \tag{9.45}$$

另一方面，对 $0\leqslant k<n$，由于 ℓ_k/ℓ_n 是自然数，所以 h_n 的任一单调区间包含在 h_k 的单调区间内. 这样，再次利用(9.43)，当 $0\leqslant k\leqslant n$ 时，有

$$\frac{h_k(x_n)-h_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1.$$

(9.45)的右边部分是$(n+1)$个1或-1的和. 这样，

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\begin{cases}\text{奇数} & \text{当 } n \text{ 是偶数}\\ \text{偶数} & \text{当 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

因此，极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

是不存在的. 这样，由于序列$\{x_n\}$收敛于 x_0，而且 $x_n\neq x_0$，故函数 f 在点 x_0 处不可微. ■

习题

1. 假设函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有周期 p. 证明对任意整数 k，g 也以 kp 为周期.
2. 假设$\{t_n\}$是一个序列，当下标 k 是偶数，t_k 是奇数；而当下标 k 是奇数时，t_k 是偶数. 证明$\{t_n\}$是不收敛的. 267
3. 令 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是帐篷函数，其基长分别是2ℓ、$2\ell'$，而 ℓ'是 ℓ 的整数倍. 证明 g 的每个单调区间包含在 h 的单调区间内.
4. 寻找一个函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它是连续可微的，但不存在使得它有二阶导数的点. 268

第 10 章　欧几里得空间$\mathbb{R}^n$

10.1　$\mathbb{R}^n$ 的线性结构与内积

对每一个正整数 n，实数的 n 元组

$$u = (u_1, \cdots, u_n)$$

的集合用$\mathbb{R}^n$ 表示，其中对每个满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的下标 i，u_i 是实数. 称 u_i 是 $\boldsymbol{u}$ 的第 i 个分量(component)，并把$\mathbb{R}^n$ 中的元称为$\mathbb{R}^n$ 中的点(point). 此外，考虑$\mathbb{R}^n$ 中两个点 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ 与 $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)$是相等的(to be equal)，如果它们有相同的分量，即

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \quad \text{当且仅当} \quad \text{对每个下标 } i(1 \leqslant i \leqslant n), \quad u_i = v_i.$$

对$\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，用公式

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \equiv (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)$$

定义 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的和(sum)，用 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ 表示. 对每个实数 α，用公式

$$\alpha\boldsymbol{u} \equiv (\alpha u_1, \cdots, \alpha u_n)$$

定义点 $\alpha\boldsymbol{u}$，称为点 $\boldsymbol{u}$ 的 α 的标量倍数(scalar multiple). $\mathbb{R}^n$ 中分量全是零的点用 $\mathbf{0}$ 表示. 在代数环境中，它称为零(zero)，在几何环境中，它称为原点(origin). 最后，对$\mathbb{R}^n$ 中的一对点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，用公式

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$$

定义它们的差(difference)，用 $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ 表示.

加法、减法及标量倍数如图 10.1 所示.

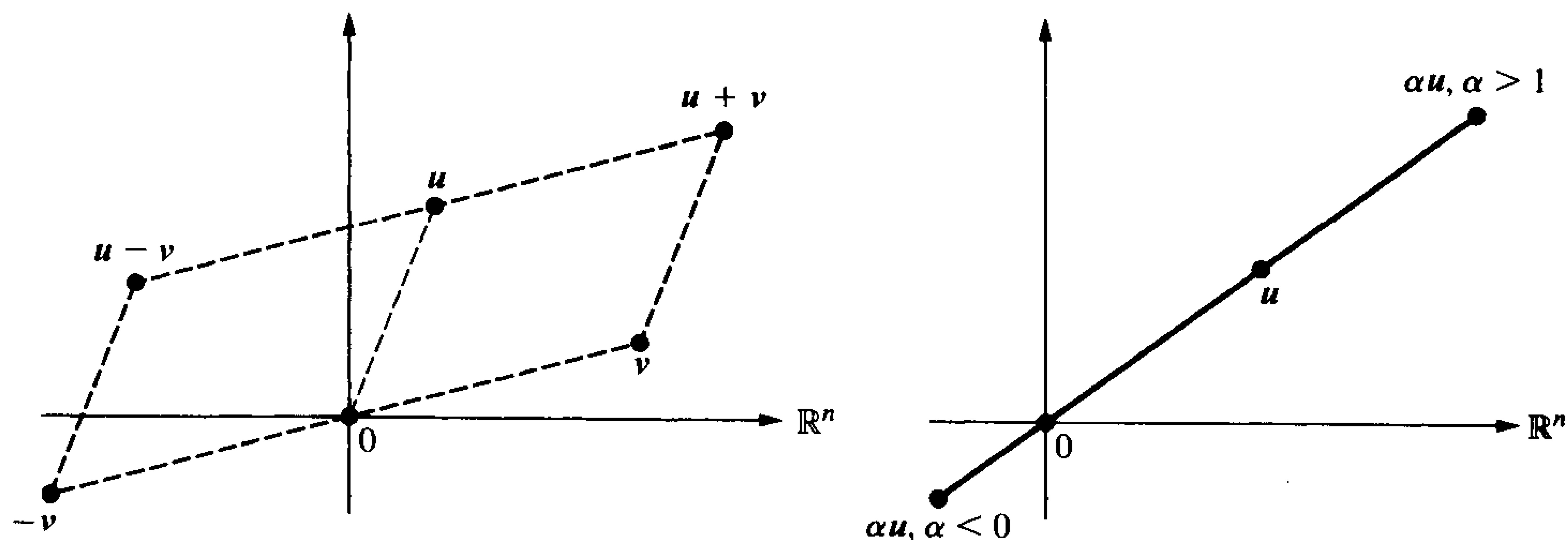


图 10.1　加法、减法及标量倍数

当然，$\mathbb{R}^1$ 就是熟悉的实数集$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^1$ 中用实数定义的点的加法及乘法恰恰就是在$\mathbb{R}$ 中所使用的实数的加法与乘法的定义. 在预备知识中，我们把$\mathbb{R}$ 中加法与乘法的性质编写成域公理. 用这些公理及$\mathbb{R}^n$ 中两点相等(即对应分量相等)的定义，推出下述命题.

命题 10.1　设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，则

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}),$$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u},$$

如果α与β是实数，则

$$\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v},$$
$$(\alpha + \beta)(\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u},$$
$$(\alpha\beta)\boldsymbol{u} = \alpha(\beta\boldsymbol{u}).$$

证明 注意$\mathbb{R}$的域公理蕴涵我们已有按点的分量的等式，由此推出上述等式. ■

内积

定义 设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是$\mathbb{R}^n$中的点. $\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$的**内积**(inner product)，用$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$表示，定义如下：

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \equiv u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$

269 ~ 270

内积也用$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$表示，通常称为点积(dot product)或标量积(scalar product). 内积的下列代数性质是实数加法和乘法交换性质与分配性质的扩充.

命题 10.2 设$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$是$\mathbb{R}^n$中的点，则

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle, \qquad \text{(对称性)}$$

如果α与β是任意实数，则

$$\langle \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \beta\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle. \qquad \text{(线性性)}$$

证明 实数乘法的交换性质蕴涵

$$\sum_{i=1}^{n} u_iv_i = \sum_{i=1}^{n} v_iu_i,$$

即第一个恒等式. 实数加法和乘法的分配性质蕴涵

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha u_i + \beta w_i)v_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} u_iv_i + \beta\sum_{i=1}^{n} w_iv_i,$$

即第二个恒等式. ■

范数和两点间的距离

定义

(i)设$\boldsymbol{w}$是$\mathbb{R}^n$中的点，则$\boldsymbol{w}$的**范数**(norm)，用$\|\boldsymbol{w}\|$表示，定义如下：

$$\|\boldsymbol{w}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}.$$

(ii)设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是$\mathbb{R}^n$中的点，则点$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$之间的**距离**(distance)，用$\text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$表示，定义如下：

$$\text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \equiv \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|.$$

由此推出点$\boldsymbol{w}$的范数是从原点到$\boldsymbol{w}$的距离. 而且，点$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$之间的距离也可以由内积用以下公式表示：

$$\text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = (\langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\rangle)^{1/2}.$$

当把至此所引进的加法、标量乘法(scalar multiplication)及点之间的距离的概念联系在一起考虑集$\mathbb{R}^n$时，习惯上把$\mathbb{R}^n$称为n维欧几里得空间(Euclidean n-space). 此外，对$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$，为方便起见，常把从$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{p}$到$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}$的所有线段(segment)看作与$\boldsymbol{u}$一致，称这些线段的汇集为向量(vector)$\boldsymbol{u}$. 基点(based at the point)为$\boldsymbol{p}$的向量$\boldsymbol{u}$是指从点$\boldsymbol{p}$到点$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}$的线段. 把加法、标量乘法及内积延伸到向量. 点$\boldsymbol{u}$的范数称为向量$\boldsymbol{u}$的长度(length)，它等于与向量$\boldsymbol{u}$相关联的线段端点之间的距离. [271]

当然，在维数$n=1$，$n=2$及$n=3$的情况下，读者已经十分熟悉加法及标量乘法的几何意义. 范数和内积也有几何意义：在$n=1$的情况下，内积就是通常的实数的乘法，数的范数是它的绝对值. 在$n=2$的情况下，如果$\boldsymbol{u}=(u_1, u_2)$是平面$\mathbb{R}^2$中的点，则毕达哥拉斯定理断言：由

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

给出的$\boldsymbol{u}$的范数是从原点到点$\boldsymbol{u}$的距离. 它也是与向量$\boldsymbol{u}$相关联的那个线段的长度. 如图10.2所示.

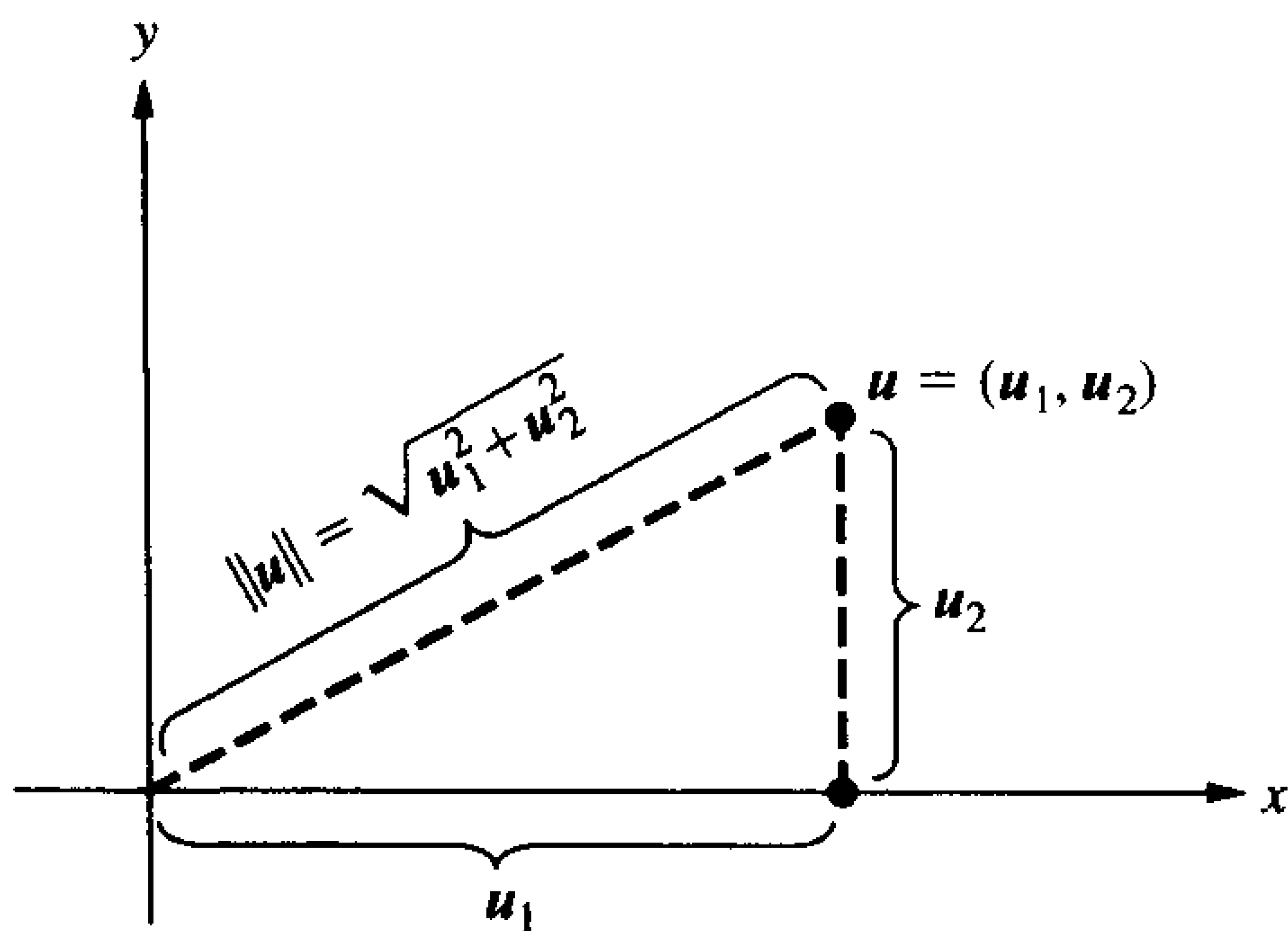


图10.2 毕达哥拉斯定理

在平面$\mathbb{R}^2$中，两个点(或两个向量)的内积的几何意义由下述命题所描述.

命题10.3 *设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是平面$\mathbb{R}^2$中的两个非零向量，则*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta, \tag{10.1}$$

其中θ是以原点为基点的向量$\boldsymbol{u}$及以原点为基点的向量$\boldsymbol{v}$之间夹角的弧度.

证明 首先，如果$\boldsymbol{u}$是平面中任意非零点，而θ是顶点在$\boldsymbol{0}$，由点$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{0}$及(1, 0)所形成的角的弧度，则$\boldsymbol{u}$的分量可借助于$\boldsymbol{u}$的范数及角θ用公式

$$\boldsymbol{u} = (\|\boldsymbol{u}\|\cos\theta, \|\boldsymbol{u}\|\sin\theta)$$

来表示. 设θ_1是顶点在$\boldsymbol{0}$，由点$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{0}$及(1, 0)所形成的角的弧度，θ_2是顶点在$\boldsymbol{0}$，由点$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{0}$及(1, 0)所形成的角的弧度. 假定$\theta_2>\theta_1$. 由内积的定义及余弦的加法公式可得 [272]

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle &= u_1v_1 + u_2v_2 \\ &= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 θ 是顶点在 $\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{u}$，$\mathbf{0}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 所决定的角. ■

从公式(10.1)可得对平面$\mathbb{R}^2$ 中的两个非零向量 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的内积等于零当且仅当以原点为基点的向量 $\boldsymbol{u}$ 正交于(垂直于)以原点为基点的向量 $\boldsymbol{v}$. 这引出$\mathbb{R}^n$ 中两个向量正交的下述定义.

正交性与正交投影

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两向量 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 称为**正交的**，如果$\langle u, v\rangle = 0$.

引理 10.4 对$\mathbb{R}^n$ 中的两个向量 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，下列断言是等价的：

(i) 向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是正交的.

(ii) 毕达哥拉斯恒等式成立，即$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$.

证明 根据范数的定义，

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle,$$

用内积的线性性与对称性化简右端，得到恒等式

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle.$$

(i)与(ii)的等价性可由这个恒等式得到. ■

在内积$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \neq 0$ 的情形下，借助于 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 的范数对$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$的大小作出估计. 对任意实数 θ，$|\cos\theta| \leqslant 1$. 因此由公式(10.1)可得，如果 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 是平面$\mathbb{R}^2$ 中任意两个向量，则

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|. \tag{10.2}$$

由于我们仅对平面$\mathbb{R}^2$ 中的向量建立公式(10.1)，当 $n>2$ 时，对$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 证明不等式(10.2)，这一论据是不充分的. 尽管如此，不等式(10.2)对$\mathbb{R}^n$ 中的向量仍是成立的，即使 $n>2$. 在证明这一点之前，为方便起见，先证明下面的引理，对一向量 $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$ 及任一向量 $\boldsymbol{u}$，把 $\boldsymbol{u}$ 表示成 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}+\lambda\boldsymbol{v}$，此处 $\boldsymbol{w}$ 正交于 $\boldsymbol{v}$. 向量 $\lambda\boldsymbol{v}$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 在向量 $\boldsymbol{v}$ 上的正交投影.

273

引理 10.5 对$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$，定义 $\lambda=\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle/\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$，则向量 $\boldsymbol{w}\equiv\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}$ 正交于向量 $\boldsymbol{v}$，且

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \lambda\boldsymbol{v}.$$

$\lambda\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的正交投影，如图 10.3 所示.

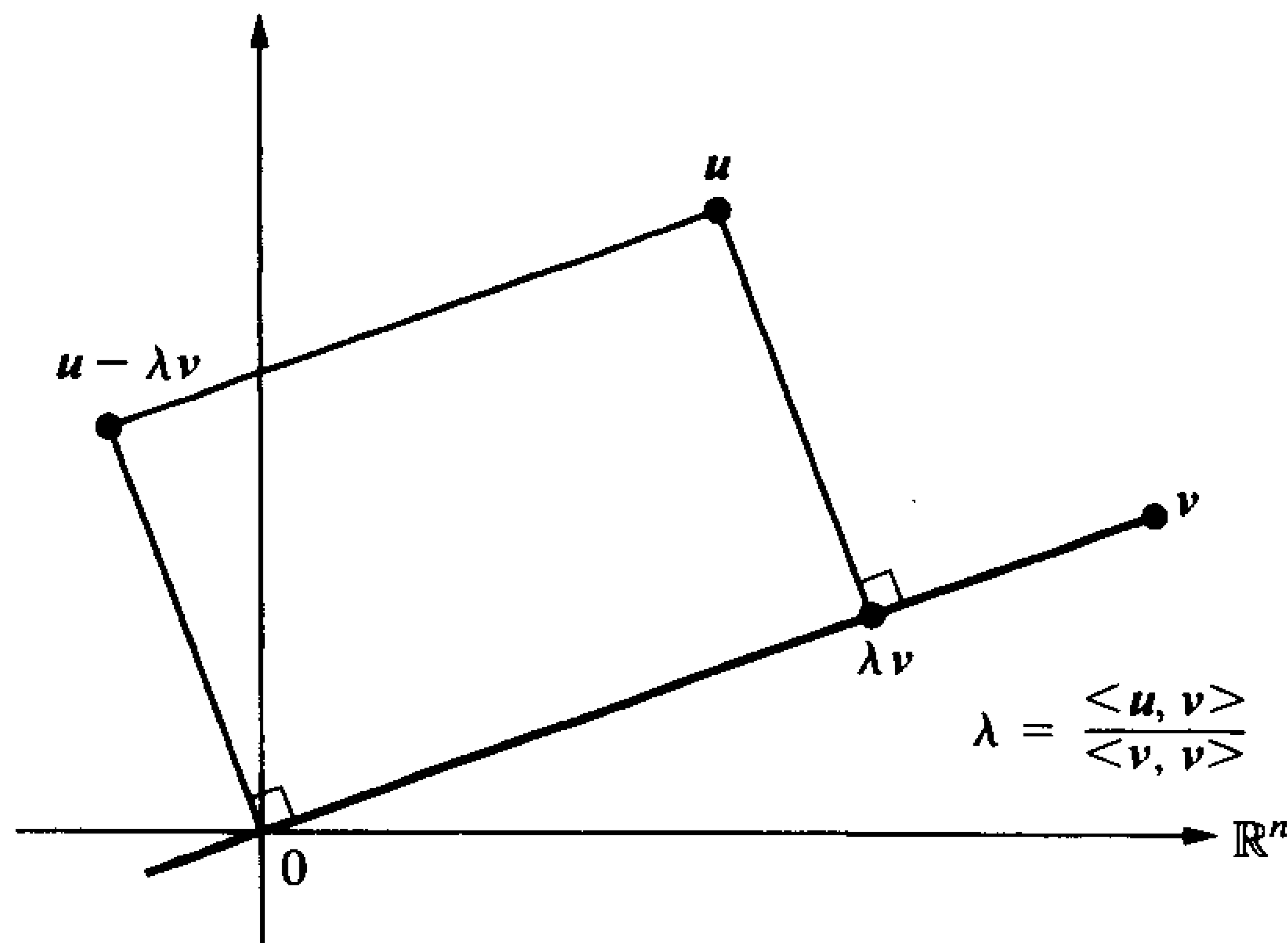


图 10.3 $\lambda\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的正交投影

证明 由内积的线性性及 λ 的定义，

$$\langle u-\lambda v, v\rangle=\langle u, v\rangle-\lambda\langle v, v\rangle=0.$$ ■

柯西-施瓦茨不等式

定理 10.6(柯西-施瓦茨不等式) 对$\mathbb{R}^n$中任意两个向量 u 及 v,

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant\|u\| \cdot\|v\|. \tag{10.3}$$

证明 如果向量 $v=\mathbf{0}$，由于不等式的每一端都是0，所以柯西-施瓦茨不等式当然成立，因此假定 $v \neq \mathbf{0}$. 定义 $\lambda=\langle u, v\rangle /\langle v, v\rangle$. 由引理 10.5 知，向量 $u-\lambda v$ 正交于向量 v，从而也 [274] 正交于向量 λv. 这样，由于向量与其自身的内积总是非负的，由内积的线性性得到

$$0 \leqslant\langle u-\lambda v, u-\lambda v\rangle=\langle u-\lambda v, u\rangle=\|u\|^2-\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}.$$

用$\|v\|^2$ 乘这一不等式得到$\langle u, v\rangle^2 \leqslant\|u\|^2 \cdot\|v\|^2$，它与柯西-施瓦茨不等式等价. ■

三角不等式

在研究多元函数时，常常要估计向量的和及差的范数，也要估计点与点之间的距离. 为此，要扩展对实数已建立的最有用的不等式，也就是三角不等式. 在 1.3 节证明了对任意实数 a 及 b，$|a+b|$ 有下面的上界：

$$|a+b| \leqslant|a|+|b|.$$

$\mathbb{R}^n$ 中向量的长度扩展了实数绝对值的概念，因此下面的不等式是一对数的三角不等式的直接推广.

定理 10.7(三角不等式) 对$\mathbb{R}^n$中的两个向量 u 及 v，存在下面的估计：

$$\|u+v\| \leqslant\|u\|+\|v\|. \tag{10.4}$$

证明 如果对不等式(10.4)两端平方，显然这个不等式成立，当且仅当

$$\|u+v\|^2 \leqslant(\|u\|+\|v\|)^2. \tag{10.5}$$

但

$$\|u+v\|^2=\langle u+v, u+v\rangle=\langle u, u\rangle+2\langle u, v\rangle+\langle v, v\rangle,$$

所以(10.5)可以改写成

$$\langle u, u\rangle+2\langle u, v\rangle+\langle v, v\rangle \leqslant\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2. \tag{10.6}$$

然而，因为柯西-施瓦茨不等式$|\langle u, v\rangle| \leqslant\|u\|\|v\|$，所以有$\langle u, v\rangle \leqslant\|u\|\|v\|$. 这正是证明不等式(10.6)所需要的. ■ [275]

习题

1. 考虑$\mathbb{R}^3$ 中的两点 $u=(1, 3, -2)$及 $v=(2, 2, 4)$. 求 u 的范数及 v 的范数，并证明 u 和 v 是垂直的. 证明：
$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$$
2. 当(x, y, z)在$\mathbb{R}^3$ 的非零点之中变动时，求
$$\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
的最大值.

3. 对于$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$，证明：(a) $\|\boldsymbol{u}\|=0$当且仅当$\boldsymbol{u}=0$，及(b)对任意数α，$\|\alpha\boldsymbol{u}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|$.

4. 对$\mathbb{R}^n$中的向量$\boldsymbol{u}$及$\boldsymbol{v}$，证明：恒等式

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2-2\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle.$$

证明：当$n=2$时，该恒等式等价于三角学的余弦定律.

5. 设$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$是$\mathbb{R}^n$中的向量. 证明：

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\frac{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2}{4}.$$

该恒等式称为极化恒等式(Polarization Identity).

6. 设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是$\mathbb{R}^n$中的向量. 证明：如果$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$或者对某个数$\alpha$，$\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{u}$，则柯西–施瓦茨不等式变为等式. 然后证明逆命题：如果$|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$，则或者$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$或者对某个数$\alpha$，$\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{u}$.

7. 对于正整数n及实数$a_1,\cdots,a_n$，证明：

$$|a_1+\cdots+a_n|\leqslant\sqrt{n}\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}.$$

8. 设$\boldsymbol{u}=(a,b)$及$\boldsymbol{v}=(c,d)$是平面$\mathbb{R}^2$中的非零点，θ是顶点在$\boldsymbol{0}$，由$\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}$及$\boldsymbol{v}$所形成的角的弧度.

   a. 证明：

$$\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle)^2=(\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta)^2.$$

   b. 上述等式的左边用分量表示得

$$|ad-bc|=\big|\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta\big|.$$

   c. 用(b)证明：$|ad-bc|/2$是顶点为$\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}$及$\boldsymbol{v}$的三角形的面积. 并且作为推论，$|ad-bc|$是以$\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$及$\boldsymbol{v}$为顶点的平行四边形的面积.

276

9. 设$\boldsymbol{u}$是$\mathbb{R}^n$中的点，假定$\|\boldsymbol{u}\|<1$. 证明：如果$\boldsymbol{v}$在$\mathbb{R}^n$之中且$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|<1-\|\boldsymbol{u}\|$，则$\|\boldsymbol{v}\|<1$.

10. 设$\boldsymbol{u}$是$\mathbb{R}^n$中的点且r是正数. 假定$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{v}$及$\boldsymbol{w}$与点$\boldsymbol{u}$的距离小于r. 证明：如果$0\leqslant t\leqslant1$，则点$t\boldsymbol{v}+(1-t)\boldsymbol{w}$与$\boldsymbol{u}$的距离也小于$r$.

11. 对$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$，对$\mathbb{R}$中的t，用$p(t)=\|\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}\|^2$定义函数$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 证明：$p(t)$是只取非负值的二次多项式. 由此证明此二次多项式的判别式是非正的. 从而为柯西–施瓦茨不等式提供了另外一种证明.

12. $\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k$称为规范正交集(orthonormal set)，如果对$1\leqslant i\leqslant k$，$\|\boldsymbol{u}_i\|=1$且如果$1\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant k$，$i\neq j$时，$\langle\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\rangle=0$. 假定$\mathbb{R}^n$中的$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k$是规范正交集. 对$\boldsymbol{u}=\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{u}_k$，证明：

$$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2}.$$

13. 给定两个连续函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$及$g:[0,1]\to\mathbb{R}$，用下面公式定义用$\langle f,g\rangle$表示的f与g的内积，

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. 证明：这个内积具有在命题10.2中所列出的$\mathbb{R}^n$中内积的性质.

   b. 仿照$\mathbb{R}^n$中点的柯西–施瓦茨不等式的证明来证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1[g(x)]^2\mathrm{d}x}.$$

10.2 $\mathbb{R}^n$中序列的收敛性

在第2章中我们研究了实数序列的收敛性概念. 实数序列$\{x_k\}$定义为收敛到实数x，如果对每个正数ε，存在自然数K，使得

$$\text{对所有下标 } k\geqslant K,\quad |x-x_k|<\varepsilon.$$

将序列$\{x_k\}$收敛(converging)到x表示为：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

称 x 为序列 $\{x_k\}$ 的极限(limit). 显然有

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad 当且仅当 \quad \lim_{k\to\infty} |x - x_k| = 0. \tag{10.7}$$

说到$\mathbb{R}^n$ 中点的序列，是指由自然数集到$\mathbb{R}^n$ 的函数，习惯上用诸如 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 符号表示这样一个序列，对每个下标 k，k 的函数值是 $\boldsymbol{u}_k$. 如果 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，则 A 中的序列是指$\mathbb{R}^n$ 中具有如下性质的点的序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$：对每个下标 k，$\boldsymbol{u}_k$ 在 A 中，本节的目的是把实数序列收敛的概念推广为$\mathbb{R}^n$ 中点的序列的收敛并建立这样的序列的各种性质. 277

在 10.1 节，已定义$\mathbb{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 之间的距离 $\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$，其公式为

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|.$$

在 $n=1$ 及 u 与 v 是实数的情形下，距离公式变为

$$\mathrm{dist}(u,v) = |u - v|,$$

所以根据准则(10.7)，有理由把收敛性概念推广如下：

定义 设 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中点的序列且设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点. 序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 称为**收敛**到 $\boldsymbol{u}$，如果对每个正数 ε，存在自然数 K，使得

$$对所有下标\ k \geq K, \quad \mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}) < \varepsilon.$$

遵照对实数序列所建立的记号，如果 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中点的序列，那么将 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 收敛到点 $\boldsymbol{u}$ 写成

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}.$$

且称 $\boldsymbol{u}$ 是序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 的极限.

由不等式(10.4)所述的三角不等式断言两个向量和的长度小于或等于每个向量长度的和. 把三角不等式改写成如下同两点之间的距离相关的等价形式是十分有用的.

推论 10.8(三角不等式的另一种形式) 对于$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$，

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \leq \mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + \mathrm{dist}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}). \tag{10.8}$$

证明 记 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})$，由不等式(10.4)，

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})\| \\ &\leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\| + \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}\| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + \mathrm{dist}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

■

由收敛的定义推出，$\mathbb{R}^n$ 的序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 收敛于$\mathbb{R}^n$ 的点 $\boldsymbol{u}$，当且仅当实数序列 $\{\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u})\}$ 收敛于 0. 请注意，极限存在则至多一个，因为若序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{u}'$，则由三角不等式，对每个下标 k 278

$$0 \leq \mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') \leq \mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_k) + \mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}'),$$

从而

$$0 \leq \mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') \leq \lim_{k\to\infty}[\mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_k) + \mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}')] = 0,$$

所以 $\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = 0$ 且因此有 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$.

收敛序列的按分量收敛准则

为建立向量序列这种推广的收敛概念的性质，宁可不直接利用定义，而从已经了解的实数序列的收敛性着手是方便的. 在 2.1 节中，我们已经证明实数收敛序列的和、积及商性质. 我

们还建立了比较引理(引理 2.9)，这个引理蕴涵，若$\{c_k\}$是非负数列，$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中点的序列，且$\boldsymbol{u}$是$\mathbb{R}^n$中这样一点，存在一下标K，对所有下标$k\geqslant K$有

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u})\leqslant c_k,$$

于是，若$\lim\limits_{k\to\infty}c_k=0$，则

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{u}.$$

定义 对下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，定义第$i$个分量的射影函数$p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是

$$对在\mathbb{R}^n中的\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n),\quad p_i(\boldsymbol{u})\equiv u_i.$$

由此定义直接可得

$$对\mathbb{R}^n中的\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{u}=(p_1(\boldsymbol{u}),\cdots,p_n(\boldsymbol{u})),$$

所以$\mathbb{R}^n$中的点完全地由分量射影函数在该点的值所决定.

我们将经常利用射影函数的下列线性性质：对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，$\mathbb{R}^n$中的每一对点$\boldsymbol{u}$及$\boldsymbol{v}$和每一对实数$\alpha$及$\beta$,

$$p_i(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha p_i(\boldsymbol{u})+\beta p_i(\boldsymbol{v}).$$

该性质可从和及标量倍数的定义得到. 还将利用不等式

279

$$对每个下标 i(1\leqslant i\leqslant n),\quad |p_i(\boldsymbol{u})|\leqslant\|\boldsymbol{u}\|,$$

这个不等式可从$\|\boldsymbol{u}\|$的借助于$\boldsymbol{u}$的分量的定义推出.

定义 $\mathbb{R}^n$中点的序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$称为**按分量收敛**(converge componentwise)到$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$，如果对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\lim_{k\to\infty}p_i(\boldsymbol{u}_k)=p_i(\boldsymbol{u}).$$

定理 10.9(按分量收敛准则) 设$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中的序列而$\boldsymbol{u}$是$\mathbb{R}^n$中的点，则$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到$\boldsymbol{u}$，当且仅当$\{\boldsymbol{u}_k\}$按分量收敛到$\boldsymbol{u}$.

证明 首先假定序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到$\boldsymbol{u}$. 固定下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$对每个下标 k,\quad 0\leqslant|p_i(\boldsymbol{u}_k)-p_i(\boldsymbol{u})|=|p_i(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u})|\leqslant\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|.$$

由于按定义，实数序列$\{\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|\}$收敛到 0，故可得

$$0\leqslant\lim_{k\to\infty}|p_i(\boldsymbol{u}_k)-p_i(\boldsymbol{u})|\leqslant\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|=0,$$

即序列$\{p_i(\boldsymbol{u}_k)\}$收敛到$p_i(\boldsymbol{u})$，从而序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$按分量收敛到$\boldsymbol{u}$.

反之，假定序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$按分量收敛到$\boldsymbol{u}$. 则按定义，对每个$i(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\lim_{k\to\infty}p_i(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u})=0.$$

但由收敛的实数序列的乘法及加法性质，可得

$$\lim_{k\to\infty}[(p_1(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}))^2+\cdots+(p_n(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}))^2]=0.$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|^2=0,$$

因此由平方根函数的连续性得

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|=0,$$

即序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛于$\boldsymbol{u}$. ■

定理 10.10 设$\{\boldsymbol{u}_k\}$及$\{\boldsymbol{v}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中的序列，满足$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到点$\boldsymbol{u}$，$\{\boldsymbol{v}_k\}$收敛到点$\boldsymbol{v}$，则

$$\lim_{k\to\infty}[\alpha\boldsymbol{u}_k+\beta\boldsymbol{v}_k]=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}.$$

280

证明 由按分量收敛定理，对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，可得

$$\lim_{k\to\infty}p_i(\boldsymbol{u}_k)=p_i(\boldsymbol{u}) \quad 及 \quad \lim_{k\to\infty}p_i(\boldsymbol{v}_k)=p_i(\boldsymbol{v}). \tag{10.9}$$

由收敛的实数序列的线性性质，可得

$$\lim_{k\to\infty}[\alpha p_i(\boldsymbol{u}_k)+\beta p_i(\boldsymbol{v}_k)]=\alpha p_i(\boldsymbol{u})+\beta p_i(\boldsymbol{v}).$$

由射影的线性性，可得

$$\lim_{k\to\infty}p_i(\alpha\boldsymbol{u}_k+\beta\boldsymbol{v}_k)=p_i(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}).$$

从而，$\{\alpha\boldsymbol{u}_k+\beta\boldsymbol{v}_k\}$按分量收敛到$\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}$，所以由按分量收敛性准则得，序列$\{\alpha\boldsymbol{u}_k+\beta\boldsymbol{v}_k\}$收敛到点$\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}$. ■

习题

1. 设$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中收敛到点$\boldsymbol{u}$的序列. 证明：对$\mathbb{R}^n$中每个点$\boldsymbol{v}$，
$$\lim_{k\to\infty}\langle\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle.$$
2. 设$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中的序列而$\boldsymbol{u}$是$\mathbb{R}^n$中的点. 假定对$\mathbb{R}^n$中每个$\boldsymbol{v}$，
$$\lim_{k\to\infty}\langle\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle.$$
证明$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到$\boldsymbol{u}$.（提示：对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$及$\mathbb{R}^n$中每个$\boldsymbol{u}$，$p_i(\boldsymbol{u})=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i\rangle$，其中$\boldsymbol{e}_i$是$\mathbb{R}^n$中这样的点：它的第$i$个分量为1，其他的分量是0.）
3. 假定$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中收敛到点$\boldsymbol{u}$的点的序列. 证明：实数序列$\{\|\boldsymbol{u}_k\|\}$收敛到$\|\boldsymbol{u}\|$.
4. 假定$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中收敛到点$\boldsymbol{u}$的点的序列. 还假设对所有k，$\boldsymbol{u}_k\neq\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$. 定义$\boldsymbol{v}_k=(1/\|\boldsymbol{u}_k\|)\boldsymbol{u}_k$及$\boldsymbol{v}=(1/\|\boldsymbol{u}\|)\boldsymbol{u}$. 证明序列$\{\boldsymbol{v}_k\}$收敛到$\boldsymbol{v}$.
5. 假定$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中收敛到点$\boldsymbol{u}$的点的序列且$\|\boldsymbol{u}\|=r>0$. 证明：存在下标K，使得
$$如果 \quad k\geqslant K, \quad 则 \quad \|\boldsymbol{u}_k\|>r/2.$$
281
6. 假定$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中收敛到点$\boldsymbol{u}$的序列. 令$\boldsymbol{v}$是$\mathbb{R}^n$中与每个$\boldsymbol{u}_k$正交的点. 证明$\boldsymbol{v}$也与$\boldsymbol{u}$正交.
7. 用$\mathbb{R}^n$中点的和的三角不等式给出定理10.10的一个直接证明.
8. $\mathbb{R}^n$中点的序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$称为*柯西序列*(Cauchy sequence)，如果对每个正数ε，存在下标K，使得
$$如果 k\geqslant K 及 \ell\geqslant k, 则 \operatorname{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_\ell)<\varepsilon.$$
   a. 证明：$\{\boldsymbol{u}_k\}$是柯西序列当且仅当每个分量序列是柯西序列.
   b. 证明：$\mathbb{R}^n$中序列收敛当且仅当它是柯西序列（提示：对实数序列，该命题已在9.1节中证明.）

10.3 $\mathbb{R}^n$中的开集与闭集

集合的内部

本书前九章专门研究一元实变量实值函数. 在此研究中，主要讨论了定义域为实数区间的函数. 在研究其定义域为$\mathbb{R}^n$的子集的函数时，先研究以$\mathbb{R}^n$中一般的子集为定义域的函数是必要的，但$\mathbb{R}^n$中不存在特别一类能与$\mathbb{R}$中的区间起同样作用的子集. 作为研究这种函数的准备，

在本节将考虑$\mathbb{R}^n$中某些特殊类型的子集，其中有开子集及闭子集.

定义 给定$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$及正数r，称集

$$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u}) \equiv \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) < r\}$$

为$\boldsymbol{u}$的半径为r的**开球**(open ball)

在$n=1$的情况下，$\mathbb{R}$中的点u的半径为r的开球，就是开区间$\{v\in\mathbb{R} \mid u-r<v<u+r\}$. 在$n=2$的情况下，$\mathbb{R}^2$中的点$\boldsymbol{u}=(x_0, y_0)$的半径为$r$的开球，就是由平面$\mathbb{R}^2$中中心在点$(x_0, y_0)$半径为$r$的圆的内部的所有点组成. $\mathbb{R}$与$\mathbb{R}^2$的开球如图10.4所示.

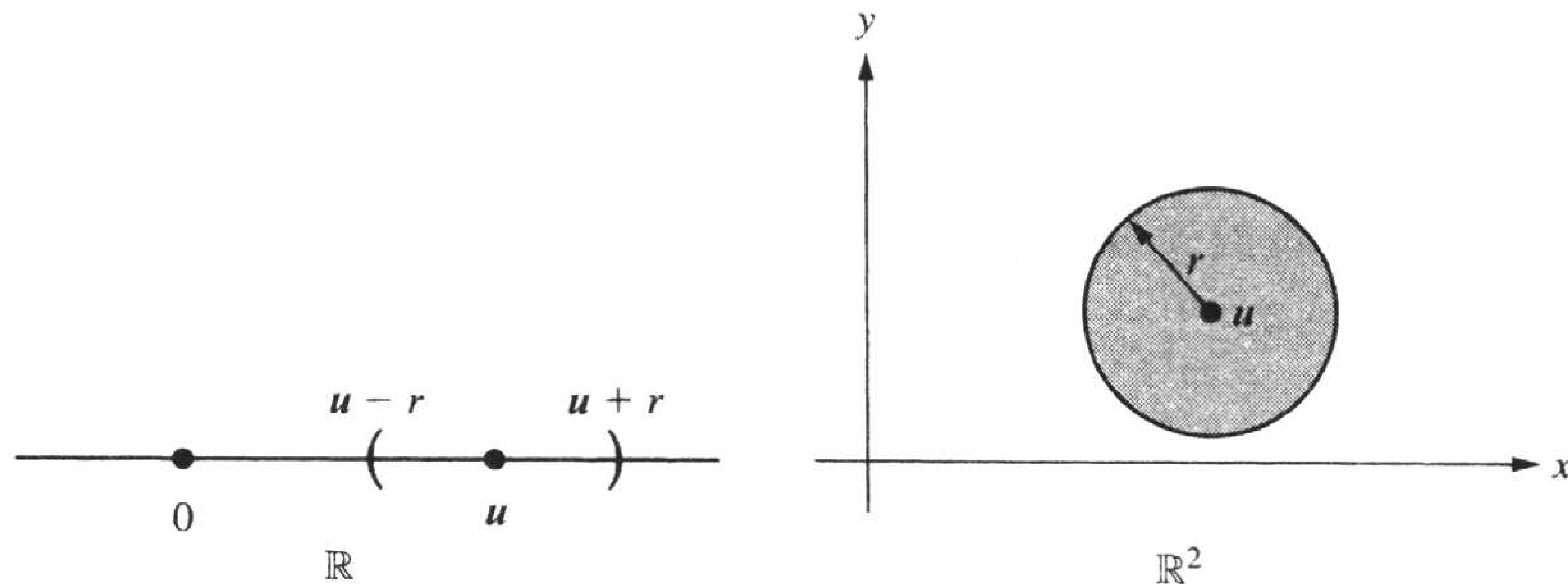


图10.4 $\mathbb{R}$与$\mathbb{R}^2$的开球

定义 设A是$\mathbb{R}^n$的子集. $\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$称为A的**内点**(interior point)，如果存在$\boldsymbol{u}$的一个开球，它包含在A中. A的所有内点的集合，称为A的**内部**(interior)，用int A表示.

显然一个集合的内部包含在该集合之中，但集合中可能存在并非是内点的点并且一个集合可能没有内点.

例10.11 设a与b是实数，满足$a<b$. 定义A为区间$(a, b]=\{u\in\mathbb{R} \mid a<u\leqslant b\}$. 对于$(a, b)$中的点$u$，定义$r$是正数$u-a$及$b-u$中较小者. 则$\mathcal{B}_r(u)\subseteq(a, b]$. 于是$u$是$A$的内点. 另一方面，点$b$在$A$中但不是$A$的内点，因为点$b$的每个开集包含大于$b$的点. 因此，$A$的内部是区间$(a, b)$，即

$$\operatorname{int}\,(a,b] = (a,b).$$

■

例10.12 设Q是有理数集，则无理数的稠密性等价于断言Q没有内点，即int $Q=\varnothing$[⊖]. ■

$\mathbb{R}^n$中的开集

定义 $\mathbb{R}^n$中的子集A称为在$\mathbb{R}^n$中是**开的**(open)，如果A中的每个点是A的内点，即

$$\operatorname{int} A = A.$$

立即可得$\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的开子集且空集$\varnothing$也是$\mathbb{R}^n$的开子集. 进而，如果a与b是实数，满足$a<b$，则由例10.11的讨论知，区间$(a, b)=\{u\in\mathbb{R} \mid a<u<b\}$在$\mathbb{R}$中是开的. 于是前面对形容词开的使用与刚才给出的一般的定义是一致的.

282 ~ 283

⊖ 记号$\varnothing$表示没有元素的集合，即空集.

命题 10.13 $\mathbb{R}^n$ 中点的每个开球在$\mathbb{R}^n$ 中是开的.

证明 设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点而 r 是正实数. 考虑开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$. 必须证明$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$中的每个点是$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$的内点. 令 $\boldsymbol{v}$ 是$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$中的点. 定义 $R=r-\operatorname{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, 注意到 R 是正的, 可断言

$$\mathcal{B}_R(\boldsymbol{v}) \subseteq \mathcal{B}_r(\boldsymbol{u}). \tag{10.10}$$

如图 10.5 所示.

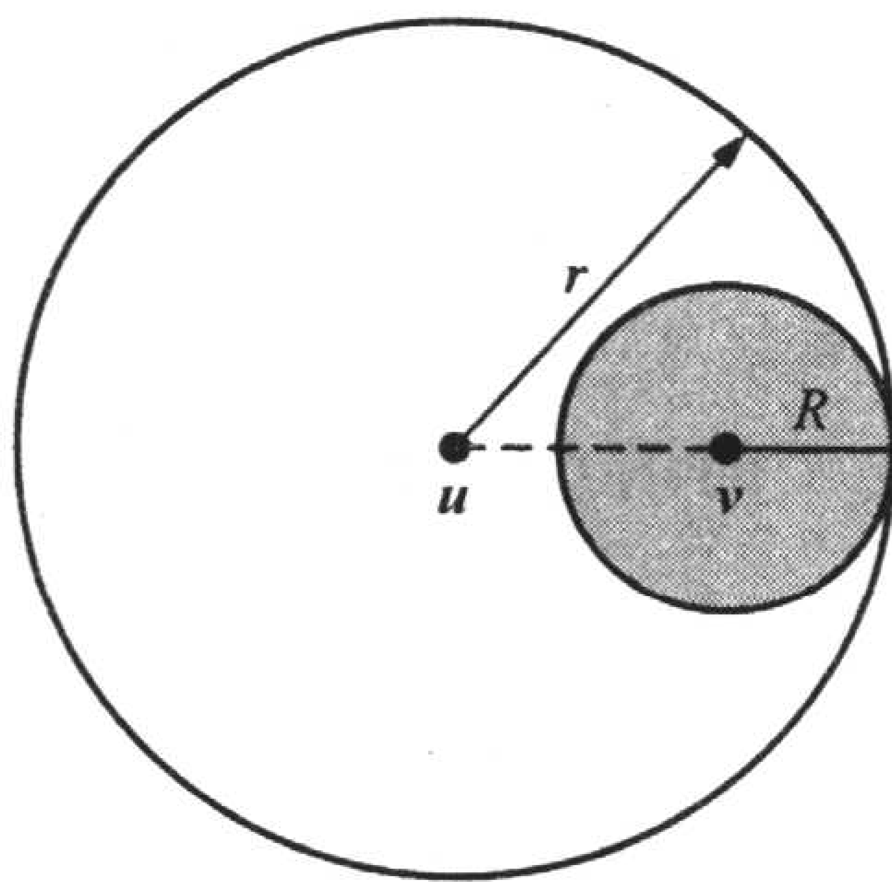


图 10.5 当 $R=r-\operatorname{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$时, $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{v})\subseteq\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$

事实上, 如果 $\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}_R(\boldsymbol{v})$, 则

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) < R = r-\operatorname{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),$$

运用三角不等式, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}) &\leqslant \operatorname{dist}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+\operatorname{dist}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\\ &< [r-\operatorname{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]+\operatorname{dist}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = r.\end{aligned}$$

于是包含关系(10.10)式成立, 所以 $\boldsymbol{v}$ 是$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$的内点. ■

$\mathbb{R}^n$ 中的闭集

在 2.2 节我们曾定义$\mathbb{R}$ 中闭集, 这个定义可扩张到$\mathbb{R}^n$ 中.

定义 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 称为在$\mathbb{R}^n$ 中是闭的, 如果 A 中的点的序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{u}$, 则 $\boldsymbol{u}\in A$.

284

例 10.14 设 a 与 b 为实数, 满足 $a<b$, 则区间$[a, b]=\{u\in\mathbb{R} \mid a\leqslant u\leqslant b\}$是闭的. 这是定理 2.22 的内容. ■

例 10.15 定义

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

则集 A 在$\mathbb{R}^2$ 中是闭的. 这可以从例 10.14 及按分量收敛准则推出. ■

开集与闭集的余集特征

如果 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集, A 在$\mathbb{R}^n$ 中的余集(complement of A), 用$\mathbb{R}^n\setminus A$ 表示, 定义为$\mathbb{R}^n$ 中不属于 A 的所有点的集合, 即

$$\mathbb{R}^n\setminus A \equiv \{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{u}\notin A\}.$$

给定$\mathbb{R}^n$的子集的集族$\{A_s\}_{s\in S}$，其下标集为S. 由并集、交集及余集的定义可得：

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{s\in S} A_s = \bigcup_{s\in S} (\mathbb{R}^n \setminus A_s) \quad 及 \quad \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{s\in S} A_s = \bigcap_{s\in S} (\mathbb{R}^n \setminus A_s).$$

这些公式通常称为德·摩根定律(De Morgan's Law).

定理 10.16(余集特征) $\mathbb{R}^n$的子集是$\mathbb{R}^n$中的开集，当且仅当它在$\mathbb{R}^n$中的余集是$\mathbb{R}^n$中的闭集.

证明 设A是$\mathbb{R}^n$的开子集，于是A中每一点都是A的内点. 所以$\mathbb{R}^n \setminus A$中的序列不能收敛到A中的点，由此推出$\mathbb{R}^n \setminus A$中的序列必收敛到$\mathbb{R}^n \setminus A$的点，于是$\mathbb{R}^n \setminus A$是$\mathbb{R}^n$中的闭集.

反之，假定A是$\mathbb{R}^n$中的子集，满足$\mathbb{R}^n \setminus A$是$\mathbb{R}^n$中的闭集. 必须证明A中每一点是A的内点. 设$\boldsymbol{u}$是A中的点，假定$\boldsymbol{u}$不是A的内点，设k是自然数，则开球$\mathcal{B}_{1/k}(\boldsymbol{u})$不是$A$的子集，所以可选择一点，记为$\boldsymbol{u}_k$，使得

$$\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^n \setminus A \text{ 且 } \mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}) < 1/k.$$

285 于是序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到$\boldsymbol{u}$. 但$\mathbb{R}^n \setminus A$是闭集. 所以$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus A$. 这一矛盾证明了$\boldsymbol{u}$是$A$的内点. ■

开集与闭集族的交集与并集

命题 10.17 (i)$\mathbb{R}^n$的开子集的集族的并集是$\mathbb{R}^n$中的开集.

(ii)$\mathbb{R}^n$的闭子集的集族的交集是$\mathbb{R}^n$中的闭集.

(i)的证明 假定$\mathcal{O} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{O}_s$，其中每个$\mathcal{O}_s$是$\mathbb{R}^n$中开子集. 可以断言$\mathcal{O}$是开集，即$\mathcal{O}$的每一点是$\mathcal{O}$的内点. 事实上，设$\boldsymbol{u} \in \mathcal{O}$，则对某个$s \in S$，$\boldsymbol{u} \in \mathcal{O}_s$. 由于$\mathcal{O}_s$是开集，所以必存在$\boldsymbol{u}$的包含于$\mathcal{O}_s$的开球，因而这个开球也包含于$\bigcup_{s\in S} \mathcal{O}_s = \mathcal{O}$中，所以$\boldsymbol{u}$是$\mathcal{O}$的内点.

(ii)的证明 假设$C = \bigcap_{s\in S} C_s$，其中每个C_s是$\mathbb{R}^n$中的闭集. 则由德·摩根律得

$$\mathbb{R}^n \setminus C = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{s\in S} C_s = \bigcup_{s\in S} (\mathbb{R}^n \setminus C_s).$$

由(i)及余集特征可推得C是$\mathbb{R}^n$中的闭集. ■

开集集族的交集还是开集并非总能成立. 例如，对每一正整数k，实数区间$(-1/k, 1/k)$是$\mathbb{R}$的开子集，可是这个开集集族的交集是由单个点0组成的集合，但由单个点组成的集合显然不是开集. 所以，交集不是开集. 然而，以下证明开集的有限(finite)集族的交集是开集.

命题 10.18 (i)$\mathbb{R}^n$的开子集的有限集族的交集是$\mathbb{R}^n$中的开集.

(ii)$\mathbb{R}^n$的闭子集的有限集族的并集是$\mathbb{R}^n$中的闭集.

(i)的证明 假设对某个正整数k，$\mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i$，其中每个$\mathcal{O}_i$是$\mathbb{R}^n$中的开集. 设$\boldsymbol{u}$是$\mathcal{O}$的一员. 如果$1 \leqslant i \leqslant k$，$\boldsymbol{u}$属于$\mathcal{O}_i$而$\mathcal{O}_i$是$\mathbb{R}^n$中的开集，所以存在正数$r_i$，使得$\mathcal{B}_{r_i}(\boldsymbol{u}) \subseteq \mathcal{O}_i$. 定义$r = \min\{r_1, \cdots, r_k\}$，则$r$是正的，且点$\boldsymbol{u}$的开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$包含于每个$\mathcal{O}_i$中，因此包含于$\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}$中，于是$\boldsymbol{u}$是$\mathcal{O}$的内点. 因此，$\mathcal{O}$中的每一点都是$\mathcal{O}$的内点，所以$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$中的开集.

(ii)的证明 假设对某个正整数 k，$C=\bigcup_{i=1}^{k} C_i$，其中每个C_i是$\mathbb{R}^n$中的闭集．注意到根据德·摩根定律，$\mathbb{R}^n\setminus C=\bigcap_{i=1}^{k}(\mathbb{R}^n\setminus C_i)$．由(i)及余集特征可得$\bigcup_{i=1}^{k} C_i$是$\mathbb{R}^n$中的闭集． ■ 286

集合的外部与边界

定义 设 A 是$\mathbb{R}^n$的子集．

(i)$\mathbb{R}^n$中的点 $\boldsymbol{u}$ 称为 A 的**外点**(exterior point)，如果存在 $\boldsymbol{u}$ 的一个包含于$\mathbb{R}^n\setminus A$ 的开球．A 的所有外点的集合称为 A 的**外部**(exterior)，用 ext A 表示．

(ii)$\mathbb{R}^n$中的点 $\boldsymbol{u}$ 称为 A 的**边界点**(boundary point)，如果 $\boldsymbol{u}$ 的每个开球包含 A 中的点也包含不在 A 中的点．A 的所有边界点的集合称为 A 的**边界**(boundary)，用 bd A 表示．

显然，给定$\mathbb{R}^n$的子集 A 及$\mathbb{R}^n$中任意点 $\boldsymbol{u}$，或者存在 $\boldsymbol{u}$ 的包含于 A 的开球，或者存在 $\boldsymbol{u}$ 的包含于$\mathbb{R}^n\setminus A$ 的开球，或者 $\boldsymbol{u}$ 的任一开球，它包含 A 中的点也包含$\mathbb{R}^n\setminus A$ 中的点．而且这些可能性是互相排斥的．这恰恰意味着$\mathbb{R}^n$分解为下列不相交集的并集：

$$\mathbb{R}^n=\operatorname{int}A\cup\operatorname{ext}A\cup\operatorname{bd}A. \tag{10.11}$$

由内部、外部及边界的定义直接可以看出，如果 A 是$\mathbb{R}^n$的子集，则

$$\operatorname{int}A=\operatorname{ext}(\mathbb{R}^n\setminus A)\quad 且\quad \operatorname{bd}A=\operatorname{bd}(\mathbb{R}^n\setminus A). \tag{10.12}$$

命题 10.19 设 A 是$\mathbb{R}^n$的子集，则

(i)A 是$\mathbb{R}^n$中的开集当且仅当 $A\cap\operatorname{bd}A=\varnothing$．

(ii)A 是$\mathbb{R}^n$中的闭集当且仅当 bd $A\subseteq A$．

(i)的证明 首先，假设 A 是$\mathbb{R}^n$中的开集，则 $A=\operatorname{int}A$．于是由于 $\operatorname{int}A\cap\operatorname{bd}A=\varnothing$，可推得 $A\cap\operatorname{bd}A=\varnothing$．反之，假设 $A\cap\operatorname{bd}A=\varnothing$．则由于 $A\cap\operatorname{ext}A=\varnothing$且 $\operatorname{int}A\subseteq A$，由分解(10.11)得，$A=\operatorname{int}A$，即 A 是$\mathbb{R}^n$的开子集．

(ii)的证明 余集特征断定，A 是$\mathbb{R}^n$中的闭集当且仅当$\mathbb{R}^n\setminus A$ 是$\mathbb{R}^n$中的开集．然而，由(i)可得，$\mathbb{R}^n\setminus A$ 是$\mathbb{R}^n$中的开集当且仅当$(\mathbb{R}^n\setminus A)\cap\operatorname{bd}(\mathbb{R}^n\setminus A)=\varnothing$．由于 $\operatorname{bd}A=\operatorname{bd}(\mathbb{R}^n\setminus A)$，可推出 A 是$\mathbb{R}^n$中的闭集当且仅当$(\mathbb{R}^n\setminus A)\cap\operatorname{bd}A=\varnothing$．由于 $\operatorname{bd}A\cap(\mathbb{R}^n\setminus A)=\varnothing$当且仅当 bd $A\subseteq A$，这就证明了(ii)． ■

通过介绍称为笛卡儿积(Cartesian product)的构造结束本章．该构造从$\mathbb{R}$的子集构建$\mathbb{R}^n$的子集．

定义 对每个下标 i，其中 $1\leqslant i\leqslant n$．设 A_i 是$\mathbb{R}$的子集．则 A_1，A_2，…，A_n 的笛卡儿积，用 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 表示，是$\mathbb{R}^n$中由以下公式所定义的子集：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\equiv\{\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^n\mid 对\ 1\leqslant i\leqslant n,u_i\in A_i\}.$$ 287

如果每个 A_i 是有界闭区间 $I_i=[a_i,b_i]$，笛卡儿积称为广义矩形(generalized rectangle)．把证明广义矩形是$\mathbb{R}^n$中的闭子集留作习题．事实上，$\mathbb{R}$中任意 n 个闭子集的笛卡儿积在$\mathbb{R}^n$中是闭集．(见习题 10 及 11．)

习题

1. 确定下列$\mathbb{R}$的子集哪些是$\mathbb{R}$中的开集、$\mathbb{R}$中的闭集或既非开集又非闭集. 证明你的推断.
   a. $A=(0, \infty)$.
   b. $A=\mathbb{Q}$，有理数集.
   c. $A=\{u\in\mathbb{R} \mid u^2>4\}$.
   d. $A=\{u\in\mathbb{R} \mid u^2\geqslant 4\}$.
   e. $A=[0, \infty)$.
2. 确定下列$\mathbb{R}^2$的子集A哪些是$\mathbb{R}^2$中的开集、$\mathbb{R}^2$中的闭集或既非开集又非闭集. 证明你的推断.
   a. $A=\{\boldsymbol{u}=(x, y) \mid x^2>y\}$.
   b. $A=\{\boldsymbol{u}=(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$.
   c. $A=\{\boldsymbol{u}=(x, y) \mid x$是有理数$\}$.
   d. $A=\{\boldsymbol{u}=(x, y) \mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.
3. 设r是正数，定义$\mathcal{O}=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\|>r\}$. 通过证明$\mathcal{O}$中每一点是$\mathcal{O}$的内点证明$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$中的开集.（提示：对$\mathcal{O}$中的$\boldsymbol{u}$，定义$R=\|\boldsymbol{u}\|-r$，证明$\mathcal{B}_R(\boldsymbol{u})\subseteq\mathcal{O}$.）
4. 设r是正数，定义$F=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\|\leqslant r\}$. 用按分量收敛准则证明$F$是闭集.
5. 设r是正数，定义$\mathcal{O}=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\|>r\}$. 通过证明$\mathcal{O}$的补集是$\mathbb{R}^n$中的闭集证明$\mathcal{O}$是开集.
6. 设r是正数，定义$F=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\|=r\}$. 用按分量收敛准则连同收敛的实数序列的和与积的性质证明：F是$\mathbb{R}^n$中的闭集.
7. 设A是$\mathbb{R}^n$的子集，$\boldsymbol{w}$是$\mathbb{R}^n$中的点. A平移(translate)$\boldsymbol{w}$用$\boldsymbol{w}+A$表示，定义为
$$\boldsymbol{w}+A\equiv\{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}\in A\}.$$
   a. 证明：A是开集当且仅当$\boldsymbol{w}+A$是开集.
   b. 证明：A是闭集当且仅当$\boldsymbol{w}+A$是闭集.
8. 对于正数r和$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{u}$，定义$A=\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$. 证明 $\text{int } A=A$，$\text{bd } A=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \mid \text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=r\}$及$\text{ext } A=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \mid \text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})>r\}$.
9. 设A与B是$\mathbb{R}^n$中满足$A\subseteq B$的子集.
   a. 证明$\text{int } A\subseteq\text{int } B$.
   b. $\text{bd } A\subseteq\text{bd } B$成立吗？

288

10. 对每个下标i，其中$1\leqslant i\leqslant n$，设F_i为$\mathbb{R}$的闭子集. 证明：笛卡儿积
$$F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$$
是$\mathbb{R}^n$的闭子集.
11. 对每个下标i，其中$1\leqslant i\leqslant n$，设$\mathcal{O}_i$是$\mathbb{R}$的开子集. 证明：笛卡儿积
$$\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\cdots\times\mathcal{O}_n$$
是$\mathbb{R}^n$的开子集.
12. 对于$\mathbb{R}^n$的子集A，A的闭包(closure)，用$\text{cl } A$表示，定义为
$$\text{cl } A=\text{int } A\cup\text{bd } A.$$
证明：$A\subseteq\text{cl } A$，及$A=\text{cl } A$当且仅当A是$\mathbb{R}^n$中的闭集.
13. 设A是$\mathbb{R}^n$的子集.
   a. 证明$\text{int } A$是$\mathbb{R}^n$的开子集.
   b. 用(a)证明$\text{ext } A$也是$\mathbb{R}^n$的开子集.
   c. 用(a)及(b)连同分解(10.11)证明$\text{bd } A$是$\mathbb{R}^n$的闭子集.

289

第 11 章　连续性、紧性及连通性

11.1　连续函数和连续映射

回顾函数 $f:A\to\mathbb{R}$，其定义域为$\mathbb{R}$的子集 A，在 A 中点 x 处连续定义为：如果当 A 中的序列 $\{x_k\}$ 收敛到点 x 时，象序列 $\{f(x_k)\}$ 收敛到 $f(x)$. 进而，函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 定义为是连续的，如果在它的定义域内的每一点是连续的. 在第 3 章讨论过这样的函数. 在本章，将讨论形如 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 的更一般的函数，其中 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集而 m 和 n 可以大于 1. 区分 $m=1$ 及 $m>1$ 的不同情形有时是很有用的：许多特别的结果仅在 $m=1$ 时才成立. 为强调这一差别，把一般的函数 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 称为映射(mapping)，而对 $m=1$ 的情形(即值域为$\mathbb{R}$时)仍使用函数(function)这个词.

定义　设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集.

(i) 映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 称为在 A 中点 $\boldsymbol{u}$ 处是连续的，如果当 A 中的序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{u}$ 时，象序列 $\{F(\boldsymbol{u}_k)\}$ 收敛到 $F(\boldsymbol{u})$.

(ii) 映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 称为是连续的，如果它在其定义域的每一点处是连续的.

射影函数的连续性

命题 11.1　对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 的每个下标 i，第 i 个分量射影函数 p_i：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的.

证明　设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中一点，假定 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中收敛到 $\boldsymbol{u}$ 的序列. 那么根据按分量收敛准则，

$$\lim_{k\to\infty}\{p_i(\boldsymbol{u}_k)\} = p_i(\boldsymbol{u}).$$

于是函数 p_i：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 是连续的. 由于 $\boldsymbol{u}$ 是在$\mathbb{R}^n$ 中任意选择的，所以函数 p_i：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的. ■

例 11.2　对 $(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3$，定义函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，$h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y,z) = x,\quad g(x,y,z) = y \quad 及 \quad h(x,y,z) = z.$$

命题 11.1 蕴涵这三个函数是连续的. ■

函数的和、积与商的连续性

先建立多元实变量实值函数的若干个结果，再转而研究一般的映射，从定理 3.1 的如下推广开始.

定理 11.3　设 A 是$\mathbb{R}^n$ 中包含点 $\boldsymbol{u}$ 的子集，假定函数 $h:A\to\mathbb{R}$ 与 $g:A\to\mathbb{R}$ 都在点 $\boldsymbol{u}$ 连续，则对任意实数 α 与 β，函数

$$\alpha h+\beta g:A\to\mathbb{R}$$

在点 $\boldsymbol{u}$ 连续. 还有积

$$h\cdot g:A\to\mathbb{R}$$

在点 $\boldsymbol{u}$ 连续. 此外，如果对所有 $\boldsymbol{v}\in A$，$g(\boldsymbol{v})\neq 0$，则

$$\frac{h}{g}:A\to\mathbb{R}$$

在点 $\mathbf{u}$ 连续.

证明 设$\{\mathbf{u}_k\}$是集 A 中收敛到点 $\mathbf{u}$ 的序列. 由于函数 $h: A\to\mathbb{R}$ 在点 $\mathbf{u}$ 是连续的，故其象序列$\{h(\mathbf{u}_k)\}$收敛到 $h(\mathbf{u})$. 类似地，函数 $g: A\to\mathbb{R}$ 在点 $\mathbf{u}$ 的连续性蕴涵序列$\{g(\mathbf{u}_k)\}$收敛到 $g(\mathbf{u})$. 由收敛的实数序列的和、积及商性质，可得

291

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha h+\beta g)(\mathbf{u}_k)=(\alpha h+\beta g)(\mathbf{u}),$$
$$\lim_{k\to\infty}(hg)(\mathbf{u}_k)=(hg)(\mathbf{u}),$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{h}{g}\right)(\mathbf{u}_k)=\left(\frac{h}{g}\right)(\mathbf{u}).$$

这三个极限显然正是定理所要证明的结论. ■

例 11.4 定义函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y,z)=xz+y^3,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

由于这个函数可从分量射影函数的积与和得到，故从命题 11.1 及定理 11.2 可得该函数是连续的. ■

复合映射的连续性

给定映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$，如果 B 是定义域 A 的子集，则集 B 在映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 下的象，用 $F(B)$表示，由如下公式定义：

$$F(B)\equiv\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m\mid \mathbf{v}=F(\mathbf{u}),\text{其中 }\mathbf{u}\in B\}.$$

定理 11.5 *设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\mathbf{u}$ 的子集，假定映射 $G:A\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\mathbf{u}$ 连续，设 B 是$\mathbb{R}^m$ 中满足 $G(A)\subseteq B$ 的子集，假设映射 $H:B\to\mathbb{R}^k$ 在点 $G(\mathbf{u})$是连续的，则复合映射*

$$H\circ G:A\to\mathbb{R}^k$$

在 $\mathbf{u}$ 处连续.

证明 设$\{\mathbf{u}_k\}$是 A 中收敛到点 $\mathbf{u}$ 的序列. 由于映射 $G:A\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\mathbf{u}$ 连续，可得象序列$\{G(\mathbf{u}_k)\}$收敛到 $G(\mathbf{u})$. 但另一方面，$\{G(\mathbf{u}_k)\}$是 B 中收敛到点 $G(\mathbf{u})$的序列，映射 $H:B\to\mathbb{R}^k$ 在点 $G(\mathbf{u})$的连续性蕴涵序列$\{H(G(\mathbf{u}_k))\}$收敛到 $H(G(\mathbf{u}))$，即序列$\{(H\circ G)(\mathbf{u}_k)\}$收敛到 $(H\circ G)(\mathbf{u})$. ■

例 11.6 定义函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y)=x^2y+e^{xy+1},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

那么函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续的. 为说明这一点，注意

$$f=p_1\cdot p_1\cdot p_2+h\circ(p_1\cdot p_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$$

其中 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $h(x)=e^{x+1}(x\in\mathbb{R})$. 由于连续映射的积、和与复合还是连续的，于是推得函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续的. ■

292

例 11.7 定义函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(\mathbf{u})=\|\mathbf{u}\|,\quad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n.$$

则函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的. 这是因为

$$f=h\circ(p_1p_1+\cdots+p_np_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$$

其中 $h(x)=\sqrt{x}$，x 为非负数. 由于连续映射的积、和与复合还是连续的，于是推得函数 f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的. ■

连续映射的按分量连续准则

定义 给定映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 及下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，其中 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，定义函数 $F_i:A\to\mathbb{R}$ 是 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 与第 i 个分量射影的复合. 称函数 $F_i:A\to\mathbb{R}$ 为映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 的第 i 个**分量函数**，于是

$$F(\boldsymbol{u})=(F_1(\boldsymbol{u}),\cdots,F_m(\boldsymbol{u})),\quad \boldsymbol{u}\in A,$$

而映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 由它的分量函数表示为

$$F=(F_1,\cdots,F_m):A\to\mathbb{R}^m. \tag{11.1}$$

例 11.8 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 中所有非零点的集合，定义映射 $F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 如下：

$$F(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|^2,\quad \boldsymbol{u}\in\mathcal{O}.$$

那么映射用分量函数的表示是

$$F(\boldsymbol{u})=(u_1/\|\boldsymbol{u}\|^2,\cdots,u_n/\|\boldsymbol{u}\|^2),\quad \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n.$$

在 $n=3$ 的情形下，这个分量表示可以写成

$$F(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right),\quad (x,y,z)\in\mathcal{O}.$$ ■

正如在欧几里得空间中对序列的收敛有按分量收敛准则一样，对于映射的连续性也有下列简单而有用的准则.

定理 11.9(按分量连续准则) 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{u}$ 的子集，考虑映射

$$F=(F_1,\cdots,F_m):A\to\mathbb{R}^m,$$

则映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 连续当且仅当它的每个分量函数 F_i: $A\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 连续.

293

证明 这个结果可由按分量收敛定理立即推出. 因为如果$\{\boldsymbol{u}_k\}$是 A 中收敛到点 $\boldsymbol{u}$ 的序列，则象序列$\{F(\boldsymbol{u}_k)\}$收敛到 $F(\boldsymbol{u})$，当且仅当对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，序列$\{F_i(\boldsymbol{u}_k)\}$收敛到 $F_i(\boldsymbol{u})$. ■

按分量连续准则给出定理 11.3 的第一个论断的如下推广.

推论 11.10 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 包含点 $\boldsymbol{u}$ 的子集，假定映射 H: $A\to\mathbb{R}^m$ 及 G: $A\to\mathbb{R}^m$ 都在点 $\boldsymbol{u}$ 连续，则对任意实数 α 及 β，映射

$$\alpha H+\beta G:A\to\mathbb{R}^m$$

在 $\boldsymbol{u}$ 处连续.

证明 如果注意到对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，映射 $\alpha H+\beta G$: $A\to\mathbb{R}^m$ 的第 i 个分量函数是 $\alpha H_i+\beta G_i:A\to\mathbb{R}$，则要证的结果可从按分量连续准则及定理 11.3 得到. ■

映射连续的 ε-δ 准则

在 3.1 节，对于一元实变量实值函数，我们借助于收敛序列定义了一点的连续性. 在 3.5 节介绍了在一点连续的“ε-δ”准则，并证明了空间借助于收敛序列定义的连续性是等价的，这便是定理 3.20. 把它的证明几乎逐字逐句扩展到作为一般函数的映射上，对下述定理提供证

明(习题12).

定理 11.11 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{u}$ 的子集，则下面关于映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 的两个推断是等价的：

(i) 映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 连续，即对 A 中的序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$，

$$\text{若}\lim_{k\to\infty}\operatorname{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u})=0,\quad\text{则}\quad\lim_{k\to\infty}\operatorname{dist}(F(\boldsymbol{u}_k),F(\boldsymbol{u}))=0.$$

(ii) 对每个正数 ε，存在正数 δ，使得对 $\boldsymbol{v}\in A$，

$$\text{如果}\operatorname{dist}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})<\delta,\quad\text{则}\operatorname{dist}(F(\boldsymbol{v}),F(\boldsymbol{u}))<\varepsilon.$$

在一点上连续的 ε-δ 准则如图 11.1 所示.

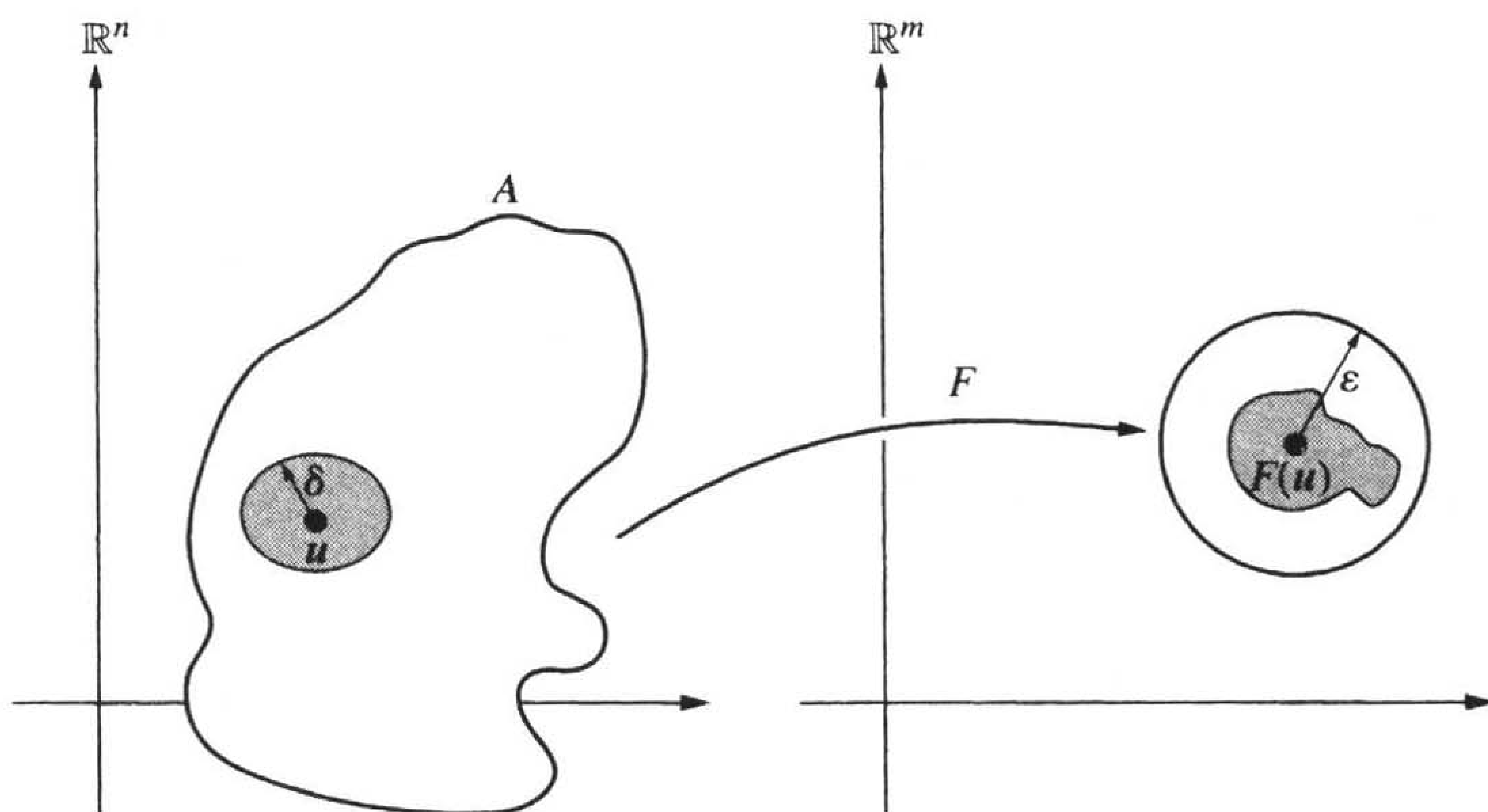


图 11.1 在一点上连续的 ε-δ 准则

连续性的最后一个准则：开集的逆象是开集

映射在一点连续的上述特征导出定义域为$\mathbb{R}^n$ 的开子集的映射在整个定义域上的连续性的如下有用特征.

定理 11.12 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，考虑映射 $F:\ \mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$，则下面的推断是等价的：

(i) 映射 $F:\ \mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 是连续的.

(ii) 当 V 是$\mathbb{R}^m$ 的开子集时，$F^{-1}(V)$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集.

证明 首先，假定(i)成立. 设 V 是$\mathbb{R}^m$ 的开子集，要证 $F^{-1}(V)$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，根据定义，这意味着 $F^{-1}(V)$中每一点是内点. 设 $\boldsymbol{u}$ 是 $F^{-1}(V)$中的点，则 $F(\boldsymbol{u})$属于 V，而 V 是$\mathbb{R}^m$ 中的开子集，所以存在某个正数 ε，使得 $\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u}))\subseteq V$. 由于映射 $F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 是连续的，故由定理 11.11 所提供的关于连续性的"$\varepsilon-\delta$"特征可知，能选择正数 δ，使得

$$\text{如果 }\boldsymbol{v}\text{ 在}\mathcal{O}\text{内且}\operatorname{dist}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})<\delta,\text{则}\operatorname{dist}(F(\boldsymbol{v}),F(\boldsymbol{u}))<\varepsilon.\tag{11.2}$$

然而，根据假定，集$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 中的开子集，所以可以选取小于 δ 的正数 r，使得$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})\subseteq\mathcal{O}$. 从(11.2)可得

294~295

$$F(\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u}))\subseteq\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u}))\subseteq V,$$

从而$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})\subseteq F^{-1}(V)$，所以 $\boldsymbol{u}$ 是 $F^{-1}(V)$的内点.

为了证明相反的结论，假定(ii)成立. 设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathcal{O}$中的点. 为证明映射 F: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 连续，要验证定理 11.11 推断的连续性的"ε-δ"特征. 设 $\varepsilon>0$，开球是$\mathbb{R}^m$ 的开子集，所以$\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u}))$在$\mathbb{R}^m$ 中是开子集. 由(ii)可得，$F^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u})))$在$\mathbb{R}^n$ 中是开子集. 于是属于 $F^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u})))$的 $\boldsymbol{u}$ 是 $F^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u})))$的内点，所以可以选择满足$\mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{u})\subseteq F^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u})))$的正数 δ，这意味着 $F(\mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{u}))\subseteq\mathcal{B}_\varepsilon(F(\boldsymbol{u}))$. 于是映射 F: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 满足在点 $\boldsymbol{u}$ 连续性的"ε-δ"特征. ■

集合是开集或闭集的准则

推论 11.13 设函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续，令 c 为实数，则集合

$$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})<c\}\quad 和\quad \{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})>c\}$$

是$\mathbb{R}^n$ 中的开集. 而集合

$$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})\leqslant c\}\quad 和\quad \{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})\geqslant c\}$$

是$\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

证明 注意到集合$\{v\in\mathbb{R} \mid v<c\}$与$\{v\in\mathbb{R} \mid v>c\}$都是$\mathbb{R}$ 中开集，由定理 11.12 所推断的连续性的特征可知，$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})<c\}$和$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})>c\}$都是$\mathbb{R}^n$ 中的开集. 但是注意

$$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})\geqslant c\}=\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})<c\}$$

及

$$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})\leqslant c\}=\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})>c\},$$

所以由集合的开性与闭性的互余特征可知$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})\leqslant c\}$和$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u})\geqslant c\}$都是$\mathbb{R}^n$ 中的闭集. ■

例 11.14 定义

$$\mathcal{O}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z>0\}.$$

则$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^3$ 的开子集. 这可以从推论 11.13 推出，只要注意由

$$f(x,y,z)=2x+3y+4z,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

定义的函数$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是连续的. ■ [296]

例 11.15 选定正数 a 及 b，其中 $a<b$，定义

$$\mathcal{O}=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid a<\|\boldsymbol{u}\|<b\},$$

则$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集. 这可以从推论 11.13 推出，只要首先注意，由于由

$$f(\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|,\quad \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$$

定义的函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的，所以$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\|>a\}$与$\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\|<b\}$都是$\mathbb{R}^n$ 的开子集. 因此$\mathcal{O}$作为这两个集合的交集，当然也是$\mathbb{R}^n$ 的开集. ■

习题

1. 定义函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y)=\cos(x+y)+x^2y^2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

2. 定义$\mathcal{O}=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,\ y,\ z)\neq(0,\ 0,\ 0)\}$，再定义函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad (x,y,z)\in \mathcal{O}.$$

证明：函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中固定一点 $\boldsymbol{v}$，定义函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(\boldsymbol{u})=\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle,\quad \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n.$$

证明：函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

4. 假定函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且当 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{u}$ 至少有一个有理分量时 $f(\boldsymbol{u})>0$. 证明：对所有的 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$，$f(\boldsymbol{u})\geqslant 0$.

5. 利用推论 11.13 证明下列每一个集合是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集：

   a. $\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\}$.

   b. $\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2/5+y^2/4<1\}$.

   c. $\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid y>x^2\}$.

   d. $\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid 1<x^2+y^2<2\}$.

6. 假定函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 都是连续函数. 证明：集合 $\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n\mid f(\boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u})=0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

7. 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 如果 a 与 b 是满足 $a<b$ 的数，证明：集合

$$\{\boldsymbol{u}\in\mathcal{O}\mid a<f(\boldsymbol{u})<b\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

8. 证明：集合 $\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n\mid u_n>0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

297

9. 用推论 11.13 证明：如果 $\boldsymbol{u}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点而 r 是正数，则集合 $\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\mid \mathrm{dist}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\leqslant r\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

10. 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，再假定 $\boldsymbol{u}$ 是 $\mathcal{O}$ 中满足 $f(\boldsymbol{u})>0$ 的点. 证明：存在 $\boldsymbol{u}$ 的开球 $\mathcal{B}$，使得对所有 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}$，$f(\boldsymbol{v})>f(\boldsymbol{u})/2$.

11. 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，集合 A 的特征函数(characteristic function) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 定义为：

$$f(\boldsymbol{u})=\begin{cases}1 & \text{如果 } \boldsymbol{u}\in A\\ 0 & \text{如果 } \boldsymbol{u}\notin A.\end{cases}$$

证明：这个特征函数在 A 的每个内点及 A 的每个外点是连续的，但在 A 的每个边界点不连续.

12. 证明定理 11.11.（提示：在定理 3.20 的证明中，用两点间的距离代替两数差的绝对值.）

13. 不引用按分量连续准则对推论 11.10 给出一个直接的证明.

11.2 列紧性、极值和一致连续性

在 2.4 节，我们对实数集引入了列紧性这一概念. 一个实数集 S 定义为列紧的，如果 S 中的任何序列有一个收敛于 S 中一点的子序列. 我们证明了闭的有界区间是列紧的，这一结果称为列紧性定理(定理 2.36).

在 3.2 节证明了极值定理(定理 3.9)，它断言定义在闭的有界区间上的连续函数有最小值和最大值. 在 3.4 节引入了一致连续性概念并证明了定理 3.17，它断言定义在有界闭区间上的连续函数是一致连续的. 事实上，检查一下定理 3.9 与 3.17 的证明可揭示，这两个定理中使用的有界闭区间的唯一性质是列紧性. 在第 3 章中，我们无需去追求这一点. 但是现在我们处在多元函数范围内，提出列紧性是有用的. 在本节的第一个目标是对 $\mathbb{R}^n$ 中的子集引入列紧性这一概念，并证明 $\mathbb{R}^n$ 的子集是列紧的当且仅当此子集是有界闭的，第二个目标是证明，对 $\mathbb{R}^n$ 的列紧子集上定义的连续函数，(i)有最小值和最大值，(ii)是一致连续的.

$\mathbb{R}^n$ 的列紧子集

给定$\mathbb{R}^n$ 的序列$\{x_k\}$和自然数的严格递增序列$\{x_{k_j}\}$，序列$\{x_{k_j}\}$称为$\{x_k\}$的子序列. 注意，如果序列$\{x_k\}$收敛于$\mathbb{R}^n$ 中的点x，则$\{x_k\}$的任一子序列$\{x_{k_j}\}$也收敛于x. 因为这一性质前面已对实数序列建立，所以如果$\lim\limits_{k\to\infty}\text{dist}(x_k, x)=0$，则$\lim\limits_{j\to\infty}\text{dist}(x_{k_j}, x)=0$.

298

定义 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集. 称 A 是**列紧的**，如果 A 的任一子序列收敛于 A 中的点.

列紧性定理(定理2.36)断言：如果 a 与 b 是实数且 $a\leqslant b$，则有界闭区间$[a, b]$是列紧的. 这对刻画$\mathbb{R}^n$ 的列紧子集是有用的. 首先，给出$\mathbb{R}^n$ 的子集是列紧的两个必要条件.

定义 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 称为**有界的**，如果存在一数 M，使得对 A 中所有点 u，有

$$\|u\|\leqslant M.$$

定理 11.16 $\mathbb{R}^n$ 的列紧子集是$\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集.

证明 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的列紧子集. 首先证明 A 是$\mathbb{R}^n$ 中的闭集. 设$\{u_k\}$是 A 中收敛到点 u 的序列($u\in\mathbb{R}^n$)，则$\{u_k\}$的每个子序列也收敛到 u，根据列紧性的定义，某个子序列收敛到 A 中的点，于是 u 属于 A，从而 A 是闭集.

为证明 A 是有界的，使用反证法. 假定 A 不是有界的. 则对每个自然数 k，下式不成立：

$$\text{对 } A \text{ 中所有点 } u,\quad \|u\|\leqslant k.$$

所以可在 A 中选到一点，记为 u_k，使得$\|u_k\|>k$. 由于 A 是列紧集，序列$\{u_k\}$的子序列$\{u_{k_j}\}$收敛到属于 A 的某点 u. 但

$$\text{对所有正整数 } j,\quad \|u_{k_j}\|>k_j\geqslant j.$$

因此实数序列$\{\|u_{k_j}\|\}$是无界的但收敛到 u 的范数. 然而我们已经证明实数收敛序列的性质之一是这样的序列有界，于是得到矛盾. 因此 A 是有界的. ■

$\mathbb{R}^n$ 的子集 A 是列紧集的充分必要条件是 A 为$\mathbb{R}^n$ 的有界闭集. 为证明充分性，下面的定理是至关重要的.

定理 11.17 $\mathbb{R}^n$ 中每个有界序列有收敛的子序列.

证明 用归纳法证明. 当 $n=1$ 时显然就是定理2.33的推断.

299

现假定 n 是正整数且$\mathbb{R}^n$ 中每个有界序列有收敛的子序列. 要证$\mathbb{R}^{n+1}$中每个有界序列有收敛子序列.

设$\{u_k\}$是$\mathbb{R}^{n+1}$中的有界序列. 固定正整数 k，定义 x_k 是 u_k 的最后一个分量. 记

$$u_k=(v_k, x_k),$$

其中 v_k 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，对于下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，它的第 i 个分量等于 u_k 的第 i 个分量. 于是定义了两个序列：实数序列$\{x_k\}$及$\mathbb{R}^n$ 中的序列$\{v_k\}$.

$\{v_k\}$是$\mathbb{R}^n$ 中有界序列，而$\{x_k\}$是有界实数序列. 根据归纳假设，$\{v_k\}$的子序列收敛到$\mathbb{R}^n$ 中的点 v，$\{x_k\}$相应的子序列本身又有子序列收敛到实数 x. 由按分量收敛准则得，$\{u_k\}$的与最后这个子序列相应的子序列收敛到$\mathbb{R}^{n+1}$中的点 $u=(v, x)$.

数学归纳法原理蕴涵了本定理对每个正整数 n 成立. ■

定理 11.18(列紧定理) $\mathbb{R}^n$ 的子集是列紧的当且仅当它在$\mathbb{R}^n$ 中是有界闭的.

证明 首先，按照定理 11.16，$\mathbb{R}^n$ 中每个列紧子集是$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集.

为证明其逆，设 A 是$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，假定$\{\boldsymbol{u}_k\}$是 A 中的序列，由于序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$是有界的，从定理 11.17 可得，存在$\{\boldsymbol{u}_k\}$的子序列$\{\boldsymbol{u}_{k_j}\}$收敛到$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{u}$，但$\{\boldsymbol{u}_{k_j}\}$本身是 A 中的序列，由于 A 是闭集，$\boldsymbol{u}$ 属于集 A，所以 A 是列紧集. ■

上面列紧定理通常称为波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理.

回忆$\mathbb{R}^n$ 的子集 $\boldsymbol{I}$ 是 n 个有界闭区间的笛卡儿积称为广义矩形.

推论 11.19 $\mathbb{R}^n$ 的广义矩形是列紧的.

证明 设 $\boldsymbol{I}$ 是广义矩形，依照上面定理，只要证 $\boldsymbol{I}$ 是列紧的，因此必须证明 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^n$ 的有界闭集. 由定义，广义矩形是 n 个实数的有界闭区间的笛卡儿积. 首先，证 $\boldsymbol{I}$ 是有界的. 由于实数的有界闭区间是有界的，故可选 $M>0$，当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，若实数 u 是 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 个边上的值，则 $|u|\leqslant M$. 这样对所有在 $\boldsymbol{I}$ 中的 $\boldsymbol{u}$，

[300]

$$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{u_1^2+\cdots+u_i^2+\cdots+u_n^2}\leqslant\sqrt{n}M,$$

所以 $\boldsymbol{I}$ 是有界的. 另一方面，我们已证明实数的有界闭区间在$\mathbb{R}$ 中是闭的，由按分量收敛准则知，$\boldsymbol{I}$ 在$\mathbb{R}^n$ 是闭的. ■

下面讨论定义域为$\mathbb{R}^n$ 中列紧子集的连续映射.

定理 11.20 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，假定映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 是连续的. 如果定义域 A 是列紧集，则象 $F(A)$ 也是列紧集.

证明 设$\{\boldsymbol{u}_k\}$是 $F(A)$ 中的序列，对每个正整数 k，选择 A 中的点 $\boldsymbol{v}_k$，满足 $\boldsymbol{u}_k=F(\boldsymbol{v}_k)$，由于 A 是列紧集，故存在子序列$\{\boldsymbol{v}_{k_j}\}$收敛到 A 中的点 $\boldsymbol{v}$. 但映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{v}$ 是连续的，于是$\{\boldsymbol{u}_{k_j}\}=\{F(\boldsymbol{v}_{k_j})\}$收敛到 $F(A)$ 中的 $F(\boldsymbol{v})$，因此 $F(A)$ 中每个序列有收敛到 $F(A)$ 中的点的子序列. 根据定义，这意味着 $F(A)$ 是列紧集. ■

引理 11.21 $\mathbb{R}$ 的每个非空列紧子集有最小数和最大数.

证明 设 A 是$\mathbb{R}$ 的列紧子集. 按照定理 11.16，集 A 是$\mathbb{R}$ 中的有界闭集. 由于 A 有界，根据$\mathbb{R}$ 的完备性公理，A 有最小上界，用 b 表示 A 的最小上界，于是对一切 $x\in A$，$x\leqslant b$. 另一方面，如果 k 是任意正整数，则 $b-1/k$ 不是 A 的上界，所以可选 A 中的一点，记为 x_k，则有 $b-1/k<x_k\leqslant b$. 由比较引理可得，序列$\{x_k\}$收敛到 b. 但 A 是$\mathbb{R}$ 的闭子集，所以 b 属于 A. 于是数 b 是 A 的最大数.

以最大下界(greatest lower bound)代替最小上界(least upper bound)，可类似地证明 A 的最小数的存在性. ■

定理 11.22(极值定理) 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的非空列紧子集，假定函数$f:A\to\mathbb{R}$ 是连续的. 则函数$f:A\to\mathbb{R}$ 取到最小值和最大值.

[301]

证明 由定理 11.20 可得象$f(A)$是列紧集. 根据引理 11.21，$f(A)$有最小数和最大数. ■

推论 11.23 设$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是定义在$\mathbb{R}^n$ 的广义矩形上的连续函数，则$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 取到最大值及最小值.

证明 从极值定理和推论 11.19 立即可得证明，推论 11.19 断言广义矩形是列紧的. ■

定义 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集 A 称为具有极值性质，如果任一连续函数 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有最小值与最大值.

定理 11.22 断言$\mathbb{R}^n$ 的非空的列紧子集具有极值性质. 事实上，这也是唯一具有此性质的$\mathbb{R}^n$ 的子集.

定理 11.24 $\mathbb{R}^n$ 非空子集有极值性质当且仅当它是列紧的.

证明 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的非空子集，若 A 是列紧的，则由定理 11.22 知，它有极值性质. 现证其逆. 假设 A 有极值性质，要证 A 是列紧的，由定理 11.18，只需证 A 是有界闭的. 先证它有界. 事实上，定义连续函数 $g:A\to\mathbb{R}$ 为 $g(\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|(\boldsymbol{u}\in A)$. 由于 A 有极值性质，这个函数有最大值，因此它有上界，故集 A 是有界的. 现在证明 A 是闭的. 事实上，设$\{\boldsymbol{v}_k\}$是 A 的一个序列，它收敛于$\mathbb{R}^n$ 的点 $\boldsymbol{v}$. 我们必须证明 $\boldsymbol{v}$ 属于 A. 为此定义连续函数 $h:A\to\mathbb{R}$ 为 $h(\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|(\boldsymbol{u}\in A)$. 选取 A 中点 $\boldsymbol{u}_*$，它使得 h 取极小. 由于$\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{dist}(\boldsymbol{v}_k,\ \boldsymbol{v})=0$，故

$$h(\boldsymbol{u}_*)=\inf h(A)=0.$$

从而$\|\boldsymbol{u}_*-\boldsymbol{v}\|=0$，所以 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_*$，因此 $\boldsymbol{v}$ 属于 A. ■

一致连续性

回想为证明连续函数f: $[a,\ b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可积的，我们需要证明每个这样的函数是一致连续的. 在多元函数的积分研究中，需要类似的结果.

其次一个欧几里得空间间的映射的一致连续性概念也是需要的，以建立多元函数积分的换元公式. [302]

定义 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集. 映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 称为**一致连续的**，如果 A 中的序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$和$\{\boldsymbol{v}_k\}$满足

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_k)=0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}(F(\boldsymbol{u}_k),F(\boldsymbol{v}_k))=0.$$

显然，一致连续映射是连续的. 事实上，假设 F: $A\to\mathbb{R}^m$ 是一致连续的，设$\{\boldsymbol{u}_k\}$是 A 中收敛于 A 中点 $\boldsymbol{u}$ 的序列，对每个下标 k，令 $\boldsymbol{v}_k\equiv\boldsymbol{u}$，可见$\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k,\ \boldsymbol{v}_k)=0$. 由一致收敛性定义，$\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{dist}(F(\boldsymbol{u}_k),\ F(\boldsymbol{v}_k))=0$，即象序列$\{F(\boldsymbol{u}_k)\}$收敛于 $F(\boldsymbol{u})$. 因而 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 连续. 正如我们在一元实变量函数的情形中看到的，连续映射未必是一致连续的. 但是连续映射若其定义域是列紧的，则它是一致连续的. 我们把这一结果的证明留作习题(习题 5)，因为这个证明只需对定理 3.17 提供的证明稍作修改即可，而定理 3.17 是一种特殊情况，即它是定义域是实数有界闭区间的函数.

定理 11.25 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，假设映射 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 是连续的. 若定义域 A 是列紧的，则映射 F: $A\to\mathbb{R}^m$ 是一致连续的.

推论 11.26 连续映射$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 定义在$\mathbb{R}^n$ 的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上是一致连续的.

证明 证明立即可由上面的定理与推论 11.19 得到，后者断言广义矩形是列紧的. ■

正如映射在一点的连续性的 ε-δ 准则是等价于在一点上连续性的序列准则，我们也有下述映射的一致连续性的 ε-δ 准则. 它是定理 3.22 的直接推广，证明留作习题.

定理 11.27 映射 $F:A \to \mathbb{R}^m$ 定义在$\mathbb{R}^n$ 的子集 A 上，下述两个断言是等价的：

(i)映射 $F:A \to \mathbb{R}^n$ 是一致连续的，即对 A 的两个序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_k\}$，

$$\text{若} \lim_{k\to\infty} \text{dist}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) = 0, \quad \text{则} \quad \lim_{k\to\infty} \text{dist}(F(\boldsymbol{u}_k), F(\boldsymbol{v}_k)) = 0.$$

(ii)对任一正数 ε，存在正数 δ，使得 A 中任两点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，

303

$$\text{若 } \text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) < \delta, \quad \text{则} \quad \text{dist}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})) < \varepsilon.$$

习题

1. 确定下列$\mathbb{R}$ 的哪一个子集是列紧集. 证明你的结论.
   a. $\{x \in [0, 1] \mid x \text{ 是有理数}\}$.
   b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > x\}$.
   c. $\{x \in \mathbb{R} \mid e^x - x^2 \leqslant 2\}$.
2. 设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中一点，令 r 是正数，证明：集合
$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leqslant r\}$$
   是紧集.
3. 证明：$\mathbb{R}^n$ 的开球是有界的.
4. $\mathbb{R}^n$ 的开球能是列紧的吗？
5. 检查定理 3.17 的证明，把两点的差的绝对值替换成两点的距离来证明定理 11.25.
6. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，且设函数$f:A \to \mathbb{R}$ 是连续的.
   a. 若 A 有界，则$f(A)$有界吗？
   b. 若 A 是闭的，则$f(A)$是闭的吗？
7. 假设函数$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的且对$\mathbb{R}^n$ 中任一 $\boldsymbol{u}$，有$f(\boldsymbol{u}) \geqslant \|\boldsymbol{u}\|$. 证明：$f^{-1}([0, 1])$是列紧的.
8. 设 A，B 是$\mathbb{R}$ 的列紧子集，定义 $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A,\ y \in B\}$. 证明 K 是列紧的.
9. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的列紧子集，且设 $\boldsymbol{v}$ 是$\mathbb{R}^n \setminus A$ 中一点，证明：对 A 的所有 $\boldsymbol{u}$，存在一点 $\boldsymbol{u}_0$ 属于集 A，使得
$$\text{dist}(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) \leqslant \text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$
   $\boldsymbol{u}_0$ 是否唯一？
10. 映射 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 称为利普希茨映射，如果存在数 C，使得对$\mathbb{R}^n$ 中所有 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，
$$\text{dist}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})) \leqslant C\text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$
    数 C 称为此映射的利普希茨常数. 证明：利普希茨映射是一致连续的.
11. 证明定理 11.27.

*11.3 顺向连通性与介值定理

在 3.3 节中，定义$\mathbb{R}$ 的子集 A 是凸的，如果点 A 有点 u，v 且 $u<v$，则整个区间$[u, v]$包含于 A 中. 我们证明了实数集合是凸的当且仅当它是个区间. 我们证明了表述在定理 3.14 中的介值定理，它断言：若 I 是区间且函数$f:I \to \mathbb{R}$ 是连续的，则象$f(I)$也是个区间. 本节研究$\mathbb{R}^n$的子集 A，称它为顺向连通的(pathwise-connected)，证明一个连续函数的定义域是顺向连通的，则它的象是区间.

304

下面把凸性这一概念自然地推广到$\mathbb{R}^n$ 的子集上.

定义 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 称为**凸的**(convex)，如果 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 属于 A，则线段$\{t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$包含于 A 中.

例 11.28 设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 的一点，r 为正实数，则开球$B_r(\boldsymbol{u})$是凸的. 为看到这一点，设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$

是$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$中的点，$t$ 为实数且 $0\leqslant t\leqslant 1$. 我们将证明$(1-t)\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}$ 属于$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$，即

$$\|(1-t)\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\|<r.$$

事实上，由于

$$(1-t)\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}=(1-t)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+t(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}),$$

由三角不等式推出

$$\begin{aligned}\|(1-t)\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\| &= \|(1-t)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+t(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})\|\\ &\leqslant \|(1-t)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\|+\|t(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})\|\\ &= (1-t)\|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\|+t\|(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})\|\\ &< (1-t)r+tr\\ &= r.\end{aligned}$$

■

例 11.29 对 $1\leqslant i\leqslant n$，设 I_i 是实数的区间，则笛卡儿积

$$A\equiv I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$$

是$\mathbb{R}^n$ 的一个凸子集. 事实上，设 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 属于 A 且 $0\leqslant t\leqslant 1$. 则对 $1\leqslant i\leqslant n$，$p_i[t\boldsymbol{u}+(1-t)\boldsymbol{v}]=tp_i(\boldsymbol{u})+(1-t)p_i(\boldsymbol{v})$ 属于 I_i，因为 $p_i(\boldsymbol{u})$，$p_i(\boldsymbol{v})$ 属于 I_i，且 I_i 是实数的凸集. 这样 $t\boldsymbol{u}+(1-t)\boldsymbol{v}$ 属于 A. ■

虽然凸性是实数区间这一概念的自然扩充，但还有更一般的有用的概念，称为*顺向连通性*(pathwise connectedness). 为此需要先引进参数化路径这一概念.

定义 设 a，b 是实数且 $a<b$，则连续映射 γ：$[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 称为**参数化路径**(parametrized path). γ：$[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 的定义域称为**参数空间**(parameter space)，γ 的象称为**路径**(path). 305

参数化路径如图 11.2 所示.

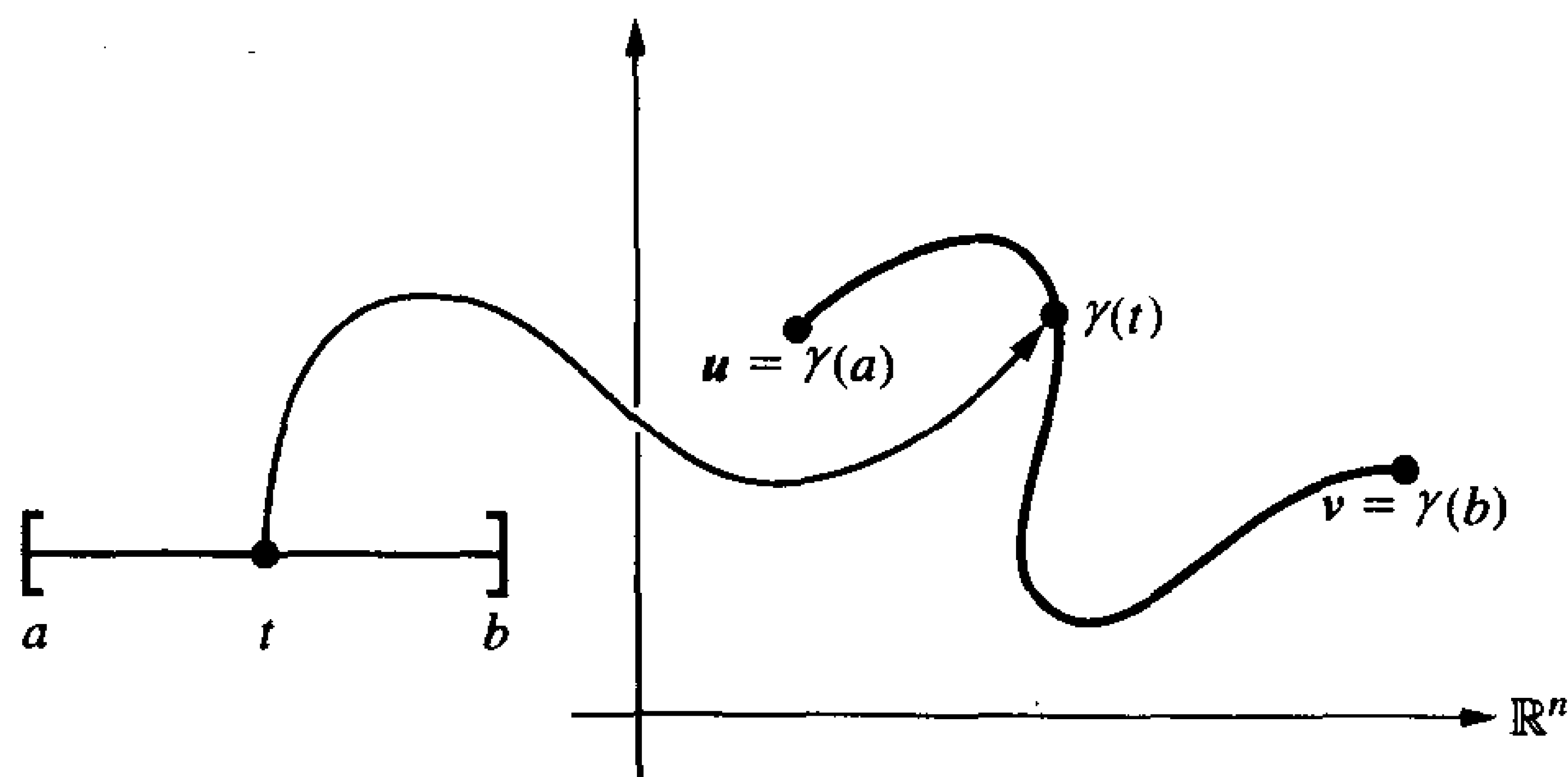


图 11.2 参数化路径

区别路径和参数化路径是重要的：路径是$\mathbb{R}^n$ 的子集，而参数化路径则是映射. 此外，任一路径可以是多个不同的参数化路径的象.

例 11.30 $\mathbb{R}^2$ 的上半圆

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1,y\geqslant 0\}$$

是路径，它是参数化路径 γ：$[-1, 1]\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $\gamma(t)=(t, \sqrt{1-t^2})$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$的象. 这个上半圆也是参数化路径 γ：$[0, \pi]\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $\gamma(t)=(-\cos t, \sin t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$的象. 这两

个参数化如图 11.3 所示.

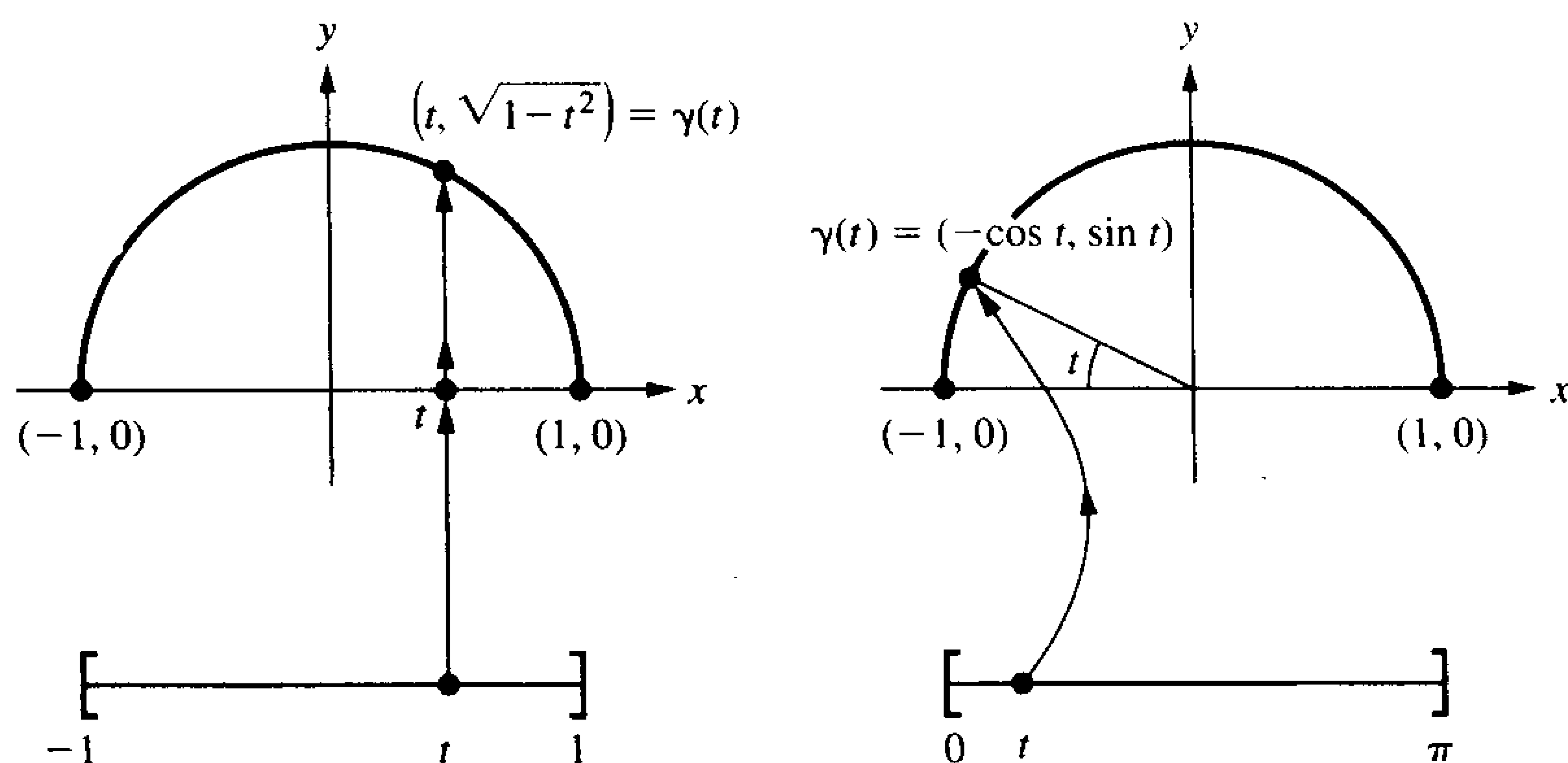


图 11.3 上半圆的两个参数化

注意到，每条路径是参数化路径的象，而参数空间是区间[0，1]. 事实上，一条路径是参数

306 化路径 γ：$[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 的象，则它也是下述参数化路径 $\bar{\gamma}$：$[0, 1]\to\mathbb{R}^n$ 的象，其中 $\bar{\gamma}$ 定义为

$$\text{当 } 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ 时，}\quad \bar{\gamma}(t) = \gamma[(1-t)a + tb].$$

定义 (i)设 A 为$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的子集，A 中连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的一条路径，是指参数化路径γ：$[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 的象，满足 $\gamma(a)=\boldsymbol{u}$ 及 $\gamma(b)=\boldsymbol{v}$，使得 γ：$[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 的象全包含在 A 内.

(ii)$\mathbb{R}^n$ 的子集 A 称为**顺向连通的**，如果 A 中每对点都可以用 A 内一条路径连接.

定理 11.31 $\mathbb{R}$ 内子集是顺向连通的当且仅当它是一个区间.

证明 首先，假设 I 是一个区间. 令 u，v 是 I 中的点，不妨设 $u<v$，由于 I 是区间，闭区间$[u, v]$是 I 的子区间，所以可以定义$[u, v]$是参数空间及 $\gamma(t)=t(u\leqslant t\leqslant v)$，于是得到一路径，在 I 内连接 u 和 v.

反之，假设 I 是$\mathbb{R}$ 的顺向连通子集，为证实 I 是一个区间，选取 I 中点 u 和 v，满足 $u<v$. 我们必须证明闭区间$[u, v]$是 I 的子集. 因为 I 是顺向连通的，所以有参数化路径 γ：$[a, b]\to I$，满足 $\gamma(a)=u$ 与 $\gamma(b)=v$. 由介值定理断言$[\gamma(a), \gamma(b)]\subseteq\gamma([a, b])$，所以$[u, v]\subseteq I$. ■

显然，$\mathbb{R}^n$ 的凸子集是顺向连通的，因为如果 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 属于 A，则当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$\gamma(t) = t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v}$$

定义了 A 中连接点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的路径.

例 11.32 设 D 是$\mathbb{R}^2$ 的凸子集，假设函数 $f{:}D\to\mathbb{R}$ 是连续的，则函数 f 的图

$$G = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \quad \text{且} \quad z = f(x,y)\}$$

是$\mathbb{R}^3$ 的顺向连通子集. 事实上，选取图 G 中两点$(\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{u}))$与$(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}))$，其中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 属于 D，则当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$\gamma(t) = (t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v}, f(t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v}))$$

307 定义了 G 内连接$(\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{u}))$和$(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}))$的路径. ■

例 11.33 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面 S 定义为

$$S = \{\boldsymbol{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

单位球面是顺向连通的. 为证实这一点，如图 11.4 所示，设 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 是 S 中的点，若 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 不是对径点，即若 $\boldsymbol{v}\neq-\boldsymbol{u}$，则可验证对 $0\leqslant t\leqslant1$，$(1-t)\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$，所以当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时，

$$\gamma(t)=\frac{(1-t)\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}}{\|(1-t)\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}\|},$$

定义一条参数化路径连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$. 现在考虑 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是对径点，即 $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u}$. 在这种情况下，在 S 上选取一点 $\boldsymbol{w}$，它垂直于 $\boldsymbol{u}$，对每个实数 t，我们可验证 $\cos t\boldsymbol{u}+\sin t\boldsymbol{w}$ 在 S 上，所以对 $0\leqslant t\leqslant\pi$，

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\cos t\boldsymbol{u}+\sin t\boldsymbol{w}$$

定义一条参数化路径 γ: $[0, \pi]\to\mathbb{R}$ 连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $-\boldsymbol{u}$. 我们把这一点留作习题.

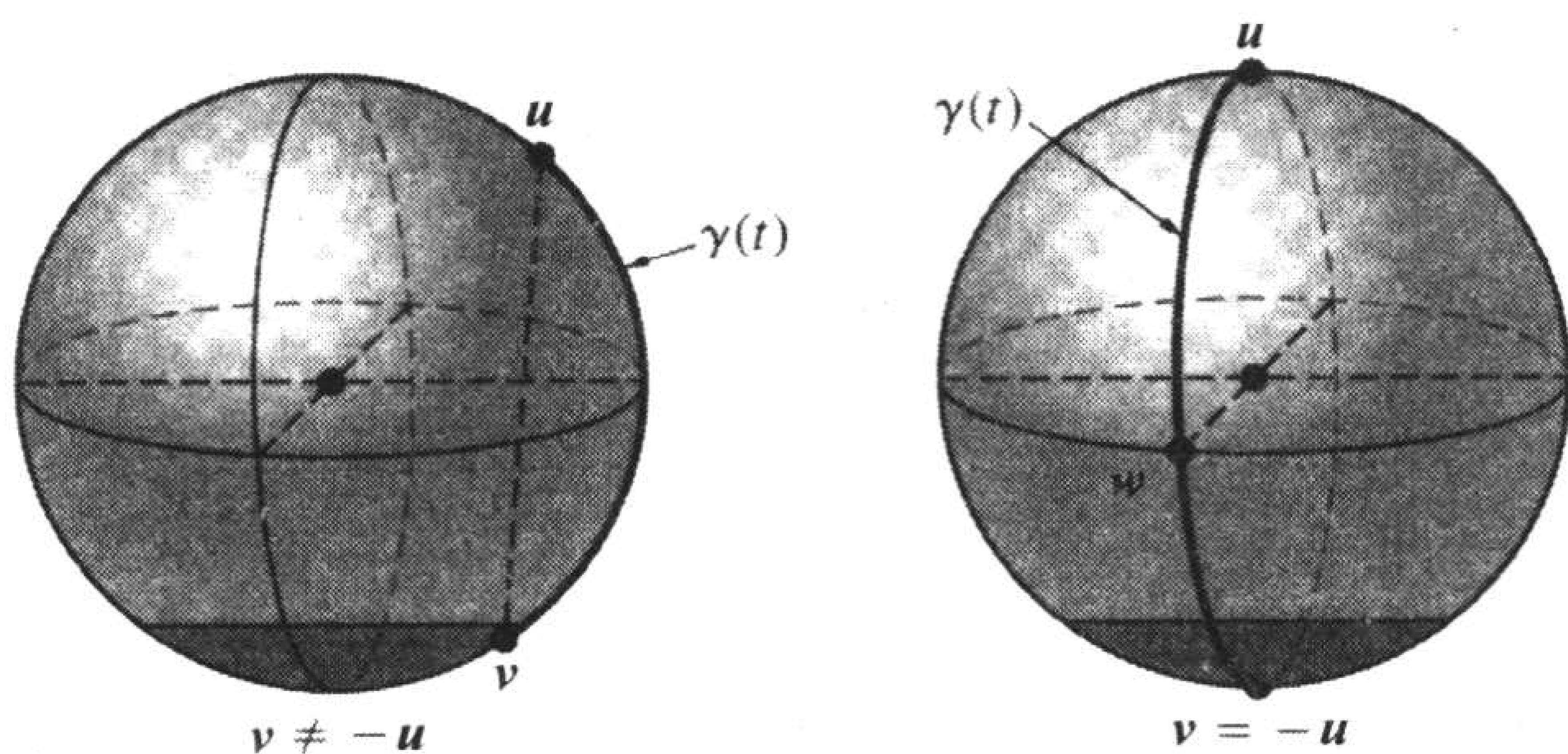


图 11.4 球面是顺向连通的 ■

定理 11.34 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，假设映射 F: $A\to\mathbb{R}^m$ 是连续的. 若 A 是顺向连通的，则它的象 $F(A)$ 也是顺向连通的.

证明 设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $F(A)$ 中的点，我们必须在 $F(A)$ 中找到连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的路径. 在 A 中选取点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，使得 $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}$，$F(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{v}$. 由于假定定义域 A 是顺向连通的，故得出有参数化路径 $\boldsymbol{\gamma}$: $[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{\gamma}(a)=\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{\gamma}(b)=\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{\gamma}([a, b])\subseteq A$. 因为连续映射的复合仍是连续的，所以得到复合 $F\circ\boldsymbol{\gamma}$: $[a, b]\to\mathbb{R}^m$ 是 $F(A)$ 中连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的参数化路径. ■ 308

定理 11.35 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的顺向连通的子集，假设函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 是连续的，则象 $f(A)$ 是一个区间.

证明 根据定理 11.34，$f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的顺向连通的子集. 则由定理 11.31 知，$f(A)$ 是一个区间. ■

定义 $\mathbb{R}^n$ 的子集称为具有**介值性质**(intermediate value property)，如果任一连续函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 的象是个区间.

定理 11.35 断言：$\mathbb{R}^n$ 中任一顺向连通子集具有介值性质. 证明了 $\mathbb{R}^n$ 存在其他子集也具有介值性质. 在下节中我们将引入连通性概念，且将证明 $\mathbb{R}^n$ 的子集是连通的当且仅当它具有介值性质.

习题

1. 设 I 是实数区间，假定函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是连续的. 该函数的图形(graph)是 $\mathbb{R}^2$ 中如下定义的子集：

$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in I,y=f(x)\}.$$

证明：G 是顺向连通的. G 是凸集吗？

2. 设 A 和 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的顺向连通子集. 且它们的交集 $A\cap B$ 是非空的. 证明：并集 $A\cup B$ 也是顺向连通的.

3. 设 a 和 b 是正实数. 用习题 1 和 2 证明：椭圆
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a + y^2/b = 1\}$$
是顺向连通的.
4. 设 A 和 B 是$\mathbb{R}^n$ 的凸子集. 证明：交集 $A\cap B$ 也是凸集. $\mathbb{R}^n$ 的两个顺向连通的子集的交集也是顺向连通的吗？
5. 证明：集$\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^4=1\}$是顺向连通的.
6. 证明：集 $S=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x$ 或 y 是有理数$\}$是顺向连通的.
7. 在例 11.33 中提到两条参数化路径，证明它们的象在 S 上.
8. 设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，设 r 是正数. 证明：闭球$\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\leqslant r\}$是凸集.
9. 设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中固定的点，c 是固定的实数. 证明下列三个集的每一个都是凸集：
$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle > c\},\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle = c\},\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle < c\}.$$
10. 给定$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{u}$ 及$\mathbb{R}^m$ 中的点 $\boldsymbol{v}$. 定义$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$是$\mathbb{R}^{n+m}$中的点：它的前 n 个分量与 $\boldsymbol{u}$ 的分量一致而后 m 个分量与 $\boldsymbol{v}$ 的分量一致. 假定 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集而 $F:A\to\mathbb{R}^m$ 是连续的. 该映射的图形 G 定义如下：
$$G = \{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \boldsymbol{u} \in A,\boldsymbol{v} = F(\boldsymbol{u})\}.$$
证明：如果 A 是顺向连通的，则 G 也是顺向连通的.
11. 用习题 2 及习题 10 证明：集$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x^2+y^2+z^2=1\}$是顺向连通的.

[309]

*11.4 连通性与介值性质

在上一节中，我们证明了$\mathbb{R}^n$ 的顺向连通子集具有介值性质，即定义在顺向连通集上的连续函数的象是区间. 在本节中，我们将描述$\mathbb{R}^n$ 中具有介值性质的所有子集.

定义 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，$\mathbb{R}^n$ 的两个开集$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$称为**分离**(separate)集 A，如果两个集 $A\cap\mathcal{U}$ 与 $A\cap\mathcal{V}$非空且不交，而其和等于 A，即
$$A \cap \mathcal{U}\neq \varnothing,A \cap \mathcal{V}\neq \varnothing,$$
$$(A\cap\mathcal{U})\cap(A\cap\mathcal{V})=\varnothing,\ (A\cap\mathcal{U})\cup(A\cap\mathcal{V})=A.$$

定义 $\mathbb{R}^n$ 中集 A 称为**连通的**(connected)，如果$\mathbb{R}^n$ 中不存在两个开子集分离 A.

下面定理证实了我们在引入连通性时所说的话.

定理 11.36 $\mathbb{R}^n$ 的子集是连通的当且仅当它具有介值性质.

证明 首先，假设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的连通子集，要证 A 具有介值性质. 设函数$f:A\to\mathbb{R}$ 是连续的. 要证象$f(A)$是一个区间. 假设不然，而导出一个矛盾. 如果$f(A)$不是一个区间，则 A 中存在点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 及实数 c，使得
$$f(\boldsymbol{u}) < c < f(\boldsymbol{v}),$$
但 c 不属于象$f(A)$. 定义
$$A_1 = f^{-1}(-\infty,c) \quad 及 \quad A_2 = f^{-1}(c,\infty).$$
注意到，因为 u 属于 A_1 且 v 属于 A_2，所以 A_1 与 A_2 都非空. 由于 c 不在$f(A)$中，故 A_1 与 A_2 不相交，而且 $A_1\cup A_2=A$.

[310]

求$\mathbb{R}^n$ 中两个开子集$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$，使得
$$A \cap \mathcal{U}= A_1 \quad 及 \quad A \cap \mathcal{V}= A_2.$$
一旦这点做到了，由上面涉及的 A_1 和 A_2 的性质得，$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$分离 A. 这与假定 A 是连通的相矛盾.

设 u 是 A_1 中一点，由于$f(\boldsymbol{u})<c$，由$f:A\to\mathbb{R}$ 的连续性及定理 11.11 给出的连续性 ε-δ 准则知，我们可选取 $r=r(\boldsymbol{u})$，使得当 $\boldsymbol{v}$ 属于$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})\cap A$ 时，有$f(\boldsymbol{v})<c$. 当 $\boldsymbol{u}$ 在 A_1 中变化时，定

义$\mathcal{U}$是$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$的并，故$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^n$中开集，因为它是$\mathbb{R}^n$中开子集的并，显然有$A\cap\mathcal{U}=A_1$．类似地，对$A_2$中每一点$\boldsymbol{v}$，可选取一开球，它与$A$的交包含在$A_2$中．这些开球的并定义一个$\mathbb{R}^n$中的开子集$\mathcal{V}$，且$\mathcal{V}\cap A=A_2$．

反之，假设每一个连续函数$f:A\to\mathbb{R}$有介值性质．我们要证A是连通的．假设不然并得到矛盾．假设A非连通，则存在有$\mathbb{R}^n$的开子集$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$，它们分离A．定义函数$f:A\to\mathbb{R}$为

$$f(\boldsymbol{u})=\begin{cases}0 & 若\ \boldsymbol{u}\ 在\mathcal{U}\cap A\\ 1 & 若\ \boldsymbol{u}\ 在\mathcal{V}\cap A.\end{cases}$$

则函数$f:A\to\mathbb{R}$肯定不具有介值性质，因为它只有两个函数值——0和1．另一方面，这个函数$f:A\to\mathbb{R}$是连续的．事实上，为验证连续性，正如刚才注意到的，因为$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$都是$\mathbb{R}^n$的开集，所以从函数$f:A\to\mathbb{R}$的定义得，对A中每一点$\boldsymbol{u}$，存在一开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$，使得$f:A\to\mathbb{R}$在$A\cap\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})$是常数，故此函数在点$\boldsymbol{u}$处连续．因而，存在一个连续函数，它的象不是一个区间，这就与假定A有介值性质相矛盾，所以A必是连通的． ■

推论 11.37 $\mathbb{R}^n$的任一顺向连通子集是连通的．

证明 设A是$\mathbb{R}^n$的顺向连通子集．定理11.35断言A具有介值性质，因此由定理11.36知，A是连通的． ■

定理11.31断言：$\mathbb{R}$的子集是一个区间当且仅当它是顺向连通的．特别地，由推论11.37知，每个区间是连通的．事实上，要证明$\mathbb{R}$的每个连通子集是区间并不困难(见习题2)．因而，对于$\mathbb{R}$的子集，至于是区间，是顺向连通的，还是连通的并没有区别．因此，在一元实变量的实值函数的研究中不需要引入连通性、顺向连通性的概念． [311]

有理由问及当$n>1$时，$\mathbb{R}^n$的子集的连通性与顺向连通性之间的区别．推论11.37断言：$\mathbb{R}^n$的顺向连通子集必是连通的．反之一般不成立．存在$\mathbb{R}^n$的连通子集，但它不是顺向连通的．

例 11.38 下面叙述$\mathbb{R}^2$的一个子集，它是连通的但不是顺向连通的，它是两个顺向连通集的并集．首先，定义$K=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid x=0,\ \ -1\leqslant y\leqslant 1\}$．注意到$K$是凸集，所以是顺向连通的．再定义$G=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x\leqslant 1,\ y=\sin 1/x\}$，则由于$G$是连续函数的图，其定义域是区间，所以$G$也是顺向连通的．现定义$A=K\cup G$．

证明集A是连通的，但A不是顺向连通的，如图11.5所示，因为不可能在A中找到一条连接K中的点与G中的点的路径，详细地证明留作习题(习题6与7)．

在第12章讨论的度量空间中，还将研究更为一般的连通性．特别地，在12.5节中，将证明$\mathbb{R}^n$中的开子集是连通的当且仅当它是顺向连通的．所以前述的平面上的子集连通但非顺向连通并不令人惊奇．

我们借助连接点的路径定义了顺向连通性．直觉上，路径是人们熟悉的几何对象，然而像往常一样，在把几何直觉构筑成确切的数学论断时，往往需要格外小心．关于顺向连通性，值得引起警觉的是由佩亚诺(G. Peano)所述的一个著名的例子，他证明了$S=\{(x,\ y)\}$属于$\mathbb{R}^2\{\mid x\mid\ \leqslant 1,\ \mid y\mid\ \leqslant 1\}$是一条路径，也即有一个连续映射$\gamma$：$[0,\ 1]\to\mathbb{R}^2$，它的象是正方形$S$[⊖]． ■

⊖ 细节可见 George Simmons 的杰出著作《Introduction to Topology and Modern Analysis》(New York：McGraw-Hill，1963)．

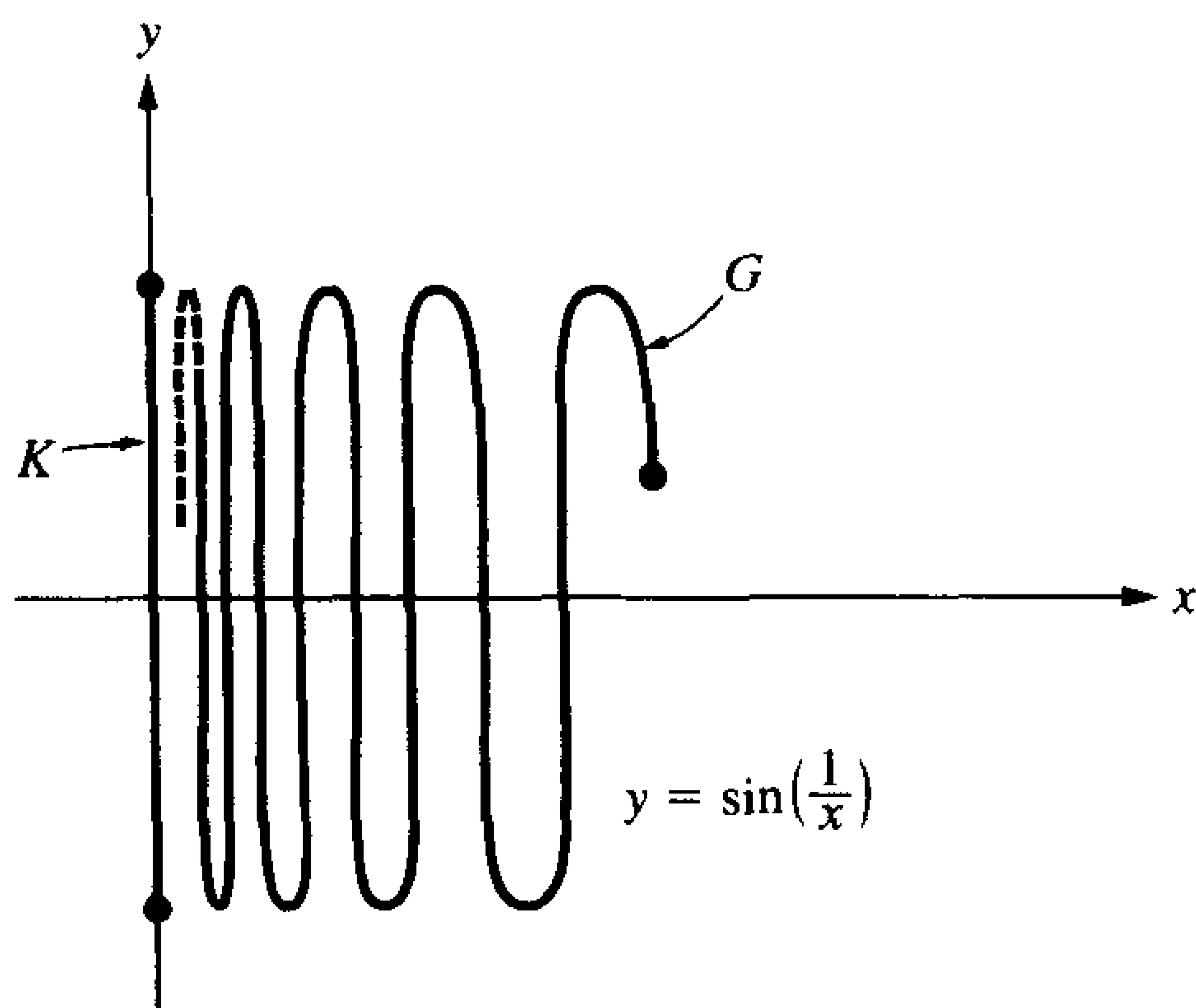


图 11.5 $A=K\cup G$ 是连通的但不是顺向连通的

习题

1. 设$\mathbb{Q}$是有理数集. 证明$\mathbb{Q}$是非连通的.

2. 证明：$\mathbb{R}$的连通子集必为一个区间.

3. 设 A 是$\mathbb{R}^3$ 的连通子集，假设点(0, 0, 1)与(4, 3, 0)属于 A.

  a. 证明：A 中有一点，它的第 2 个分量是 2.

  b. 证明：A 中有一点，它的范数是 4.

4. 假设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，它不是连通的且令$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$是$\mathbb{R}^n$ 的分离 A 的开子集，假设 B 是 A 的子集且它是连通的. 证明 $B\subseteq\mathcal{U}$或 $B\subseteq\mathcal{V}$两者之一成立.

5. 设 K 是$\mathbb{R}^n$ 的列紧子集，假设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的包含 K 的开子集. 证明：存在某个正数 r，使得对 K 中的任一点 $\boldsymbol{u}$，$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{u})\subseteq\mathcal{O}$.

6. 用习题 4 和 5 证明例 11.38 中定义的 A 是连通的.

7. 证明例 11.38 中定义的 A 是非顺向连通的. (提示：令 $\boldsymbol{u}=(0, 1)$，$\boldsymbol{v}=(1, \sin 1)$，假设 A 中有参数化路径 γ：$[0, 1]\to\mathbb{R}^2$ 连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，定义 t_*是$[0, 1]$中使得 γ 将区间$[0, t]$映到 K 的这样的 t 的上确界. 证明：γ 的第二个分量在点 t_*处是不连续的.)

312
≀
313

8. $\mathbb{R}$中哪个子集既是列紧的又是连通的?

9. 设 K 是$\mathbb{R}^n$ 的列紧子集. 证明：K 不连通当且仅当存在 K 的非空不相交的子集 A 与 B，满足 $A\cup B=K$ 及正数 ε，使得对 A 中所有点 $\boldsymbol{u}$ 与 B 中所有点 $\boldsymbol{v}$，有 $\mathrm{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})>\varepsilon$. 列紧性这一假定对 ε 的存在是必要的吗?

*第12章 度量空间

本书前9章致力于研究一元实变量的实值函数，第10章与第11章讨论欧几里得空间以及这些空间之间的映射. 在19世纪后期，人们注意到在这一研究中许多有用的概念可以分离出来，然后在更抽象的度量空间中研究. 这一思维方向使得我们所用过的许多论据的基础得到澄清. 更重要的是，它使我们能够理解那些在各式各样数学问题的使用中可以推广的概念，在12.1节，将定义度量空间(metric space)并给出度量空间的若干例子. 还将把第11章对欧几里得空间引入的开集与闭集的概念推广到度量空间. 在12.2节，将在度量空间中引入柯西序列的概念，并称度量空间是完备的，如果空间中每个柯西序列收敛到该空间中的一点. 还将考虑完备度量空间的例子并证明一个重要的定理，称之为压缩映射原理(Contraction Mapping Principle). 在12.3节，将回顾前面建立的关于微分方程解的某些结果，然后将用压缩映射原理证明一个关于非线性微分方程可解性的基本定理. 最后两节将专门来推广第11章欧几里得空间中所建立的关于连续性、列紧性及连通性的结果.

12.1 开集、闭集及序列的收敛性

定义 一个集合 X 称为**度量空间**，如果对 X 中任意两个点 p 及 q，存在确定的一个实数 $d(p, q)$，它称为 p 与 q 之间的距离，满足下列三条性质：

(i)非负性：

$$当\ p \neq q\ 时\ d(p,q) > 0, \quad d(p,p) = 0.$$

(ii)对称性：

$$d(p,q) = d(q,p).$$

314

(iii)三角不等式：

$$对\ X\ 中所有的\ w, d(p,q) \leqslant d(p,w) + d(w,q).$$

上述函数 $d: X \times X \to [0, \infty)$ 称为 X 上的一个度量. 在一个集合上可能有不止一个度量. 当称 X 为度量空间时，总假定已规定了一个固定的度量. 在下面三个定理中描述在经典分析研究中的某些最重要的度量空间.

定理 12.1 对任意两个实数 p 及 q，定义

$$d(p,q) = |p - q|,$$

则 d 是在$\mathbb{R}$上的一个度量.

上述定理实际上是绝对值的性质的一个直接推论，并且是下面关于欧几里得空间的下述定理的一个特例.

定理 12.2 对 n 维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中任意两点 p 及 q，定义

$$d(p,q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2},$$

那么 d 是$\mathbb{R}^n$上的一个度量.

证明 注意到，实数的平方和总是非负的，并且平方和为 0 当且仅当所有数为 0，由此可得 $d(p, q)$的非负性. 对称性是显然的，三角不等式已在第 10 章对$\mathbb{R}^n$ 中的点建立了. ■

定理 12.3 定义 $C([a, b], \mathbb{R})$是所有连续函数f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 的集合，对$C([a, b], \mathbb{R})$中任意两个函数f与 g，定义

$$d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a,b]\}.$$

那么 d 是 $C([a, b], \mathbb{R})$上的一个度量.

证明 首先注意到，如果f与 g 在 $C([a, b], \mathbb{R})$中，则函数$|f-g|$: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 根据极值定理，函数$|f-g|$: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 有最大值. 于是 $d(f, g)$是严格定义的.

在区间$[a, b]$中选择一点 x_0，满足 $d(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$ ，则

315

$$\text{对}[a,b]\text{ 中所有 } x, \quad 0 \leqslant |f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \leqslant |g(x_0) - f(x_0)|,$$

所以 $d(f, g) = d(g, f) \geqslant 0$，且 $d(f, g) = 0$ 当且仅当对$[a, b]$中所有 x，$f(x) = g(x)$. 下面验证三角不等式. 设 h 在 $C([a, b], \mathbb{R})$中. 由$\mathbb{R}$ 中的三角不等式及度量的定义，

$$\text{对}[a,b]\text{ 中所有 } x, \quad |f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leqslant d(f,h) + d(h, g).$$

于是得到三角不等式 $d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g)$. ■

注意下面的事实是有益的：对 $C([a, b], \mathbb{R})$中任意的两个函数f和 g 及任意的正数 r，

$$d(f,g) < r$$

当且仅当对$[a, b]$中所有的 x，$f(x) - r < g(x) < f(x) + r$，如图 12.1 所示.

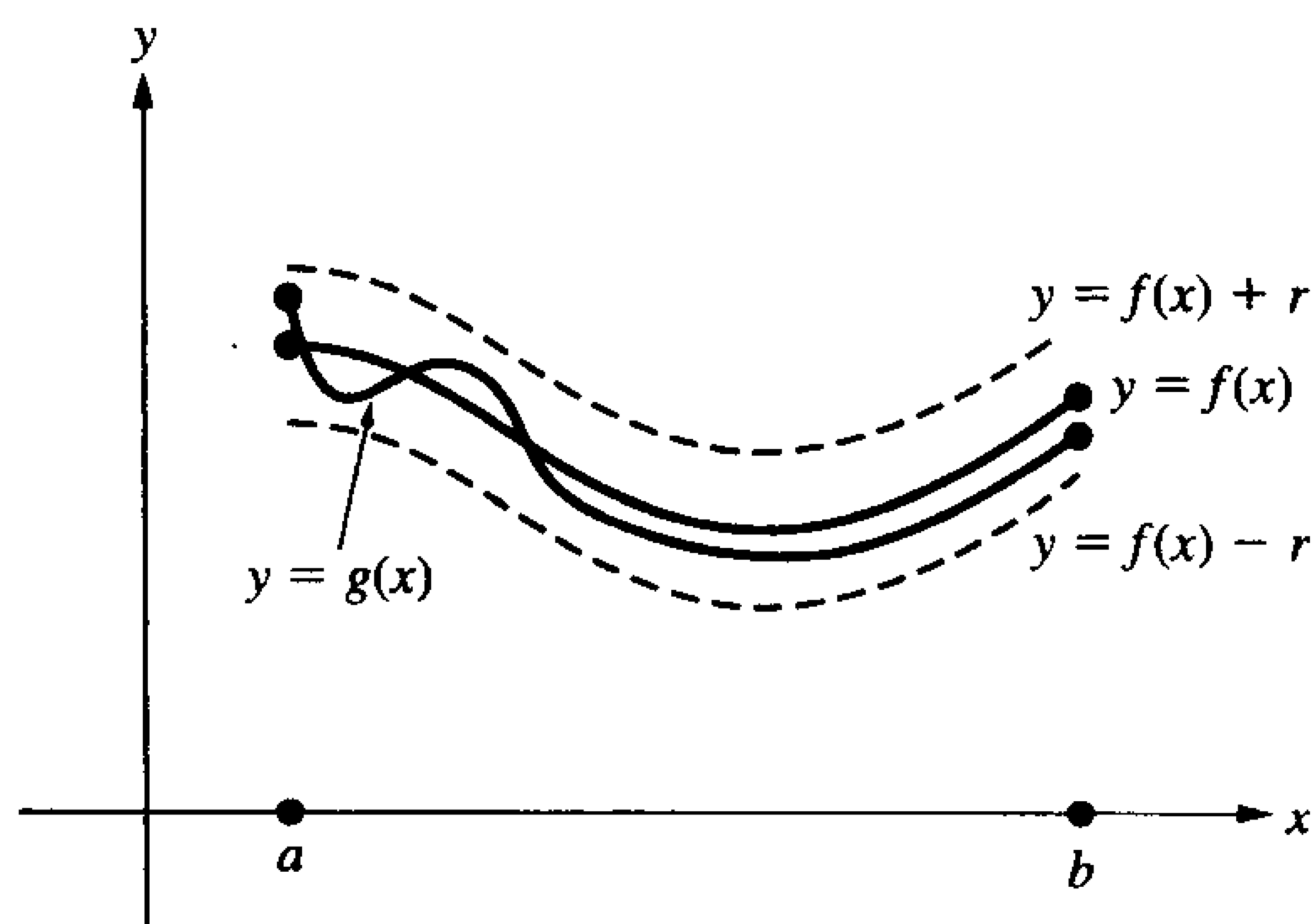


图 12.1 $d(f, g) < r$

定理 12.4 设 X 为任意的集合，对 X 中任意两个点 p 及 q，定义

$$d(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{若 } p = q \\ 1 & \text{若 } p \neq q. \end{cases}$$

这就在 X 上定义了一个度量，称为**离散度量**(discrete metric).

证明 非负性、对称性与三角不等式可从定义直接推出. ■

316

显然$\mathbb{R}^n$ 上的离散度量与$\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得度量是不同的度量.

度量空间 X 的每个子集 Y 本身也是一个度量空间，Y 中给定的两点 p 与 q 之间的距离与把它们看作是集 X 中两点的距离是一样的. 于是$\mathbb{R}$ 的每个子集、n 维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 的每个子集以及 $C([a, b], \mathbb{R})$的每个子集都是度量空间. 当把度量空间 X 的子集 Y 视为从 X 继承度量

的一个度量空间时，所指的是度量空间 X 的子空间(subspace) Y.

定义 设 X 是度量空间.

(i)对 X 中每个点 p 及正数 r，集合

$$\mathcal{B}_r(p) = \{q \in X \mid d(q,p) < r\}$$

称为 X 中围绕 p 的半径为 r 的**开球**.

(ii)给定 X 的子集 A，A 中点 p 称为 A 的**内点**，如果 p 在 X 中的某个开球包含在 A 中. A 的所有内点的集合称为 A 的**内部**，用 $\text{int}\, A$ 表示.

(iii) X 的子集 $\mathcal{O}$ 称为是 X 中的**开集**，如果在 $\mathcal{O}$ 中的每个点都是 $\mathcal{O}$ 的内点.

注意到，对一般的度量空间所给出的开球、内点以及开集的定义推广了 n 维欧几里得空间中相应的概念.

例 12.5 考虑度量空间 $C([0,1],\mathbb{R})$. 给定 $C([0,1],\mathbb{R})$ 中的函数 f 及正数 r，则 f 在 $C([0,1],\mathbb{R})$ 中半径为 r 的开球是由满足如下条件的所有连续函数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 所组成：

$$\text{对一切 } x \in [0,1],\ f(x) - r < g(x) < f(x) + r. \qquad \blacksquare$$

例 12.6 设 X 是度量空间的任意一个集合，其度量为离散度量. 给定 X 中的点 p 及正数 r，如果 $r\geqslant 1$，由离散度量的定义直接推出，p 在 X 中的半径为 r 的开球由整个集 X 组成，如果 $r<1$，则由单个点 p 组成. ■

例 12.7 设 h 与 g 在 $C([0,1]\mathbb{R})$ 中且满足对 $[0,1]$ 中所有 x，$h(x)<g(x)$. 定义 $\mathcal{O}=\{f\in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \text{对所有 } x\in[0,1],\ h(x)<f(x)<g(x)\}$，则 $\mathcal{O}$ 是开集. 事实上，设 f 在 $\mathcal{O}$ 中，令 r_1 与 r_2 分别是函数 $f-h:[0,1]\to\mathbb{R}$ 与 $g-f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 的最小值. 再令 r 是小于 r_1 与 r_2 的正数，则看出 $\mathcal{B}_r(f)\leqslant\mathcal{O}$，于是 $\mathcal{O}$ 是开集. ■

命题 12.8 设 X 是度量空间. 那么 X 中每个开球是 X 中的开集.

证明 设 p 是 X 中的点，r 是正数，考虑开球 $\mathcal{B}_r(p)$. 要证明 $\mathcal{B}_r(p)$ 中每个点都是 $\mathcal{B}_r(p)$ 的内点. 设 q 是 $\mathcal{B}_r(p)$ 中的一点，定义 $R=r-d(p,q)$，注意到 R 是一个正数. 可断言 $\mathcal{B}_R(q)\subseteq\mathcal{B}_r(p)$. 事实上，根据三角不等式，如果 x 是 X 的元素，则 [317]

$$d(x,p) \leqslant d(x,q) + d(p,q),$$

所以如果 $d(x,q)<R=r-d(q,p)$，则 $d(x,p)<r$. 于是 $\mathcal{B}_R(q)\subseteq\mathcal{B}_r(p)$，所以 q 是 $\mathcal{B}_r(p)$ 的内点. ■

对于某集合 X，所谓 X 中的一个序列，指的是函数 $f:\mathbb{N}\to X$. 习惯上用诸如 $\{p_k\}$，$\{q_k\}$ 等符号表示序列. 如果 X 是度量空间，则序列的收敛定义如下.

定义 设 X 是度量空间，X 中的序列 $\{p_k\}$ 称为**收敛**到 X 中的点 p，如果对每个正数 ε，存在自然数 N，使得

$$\text{如果 } k\geqslant N,\quad \text{就有 } d(p_k,p)<\varepsilon.$$

我们看出 X 中序列 $\{p_k\}$ 收敛到 X 中的点 p，当且仅当实数序列 $\{d(p_k,p)\}$ 收敛到 0. 称 p 为序列 $\{p_k\}$ 的极限. 注意到，一个序列最多只能有一个极限，因为如果 $\{p_k\}$ 收敛到 p 又收敛到 p'，则按照三角不等式，

$$\text{对所有正整数 } k,\quad 0 \leqslant d(p,p') \leqslant d(p,p_k) + d(p_k,p').$$

由收敛的实数序列的比较引理，可得 $d(p, p')=0$，所以 $p'=p$.

给定 X 中的序列 $\{p_k\}$ 及严格递增的正整数序列 $\{k_j\}$，则序列 $\{p_{k_j}\}$ 称为 $\{p_k\}$ 的子序列. 注意到，如果 $\{p_k\}$ 收敛到 p，则 $\{p_k\}$ 的每个子序列 $\{p_{k_j}\}$ 也收敛到 p. 因为根据实序列的结果，若 $\lim\limits_{k\to\infty} d(p_k, p)=0$，则 $\lim\limits_{j\to\infty} d(p_{k_j}, p)=0$.

当然，在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，上述收敛的定义与10.2节中所叙述的收敛的定义是一致的. 按分量收敛准则直接地把 $\mathbb{R}^n$ 中序列收敛的性质归约为每一个分量序列的收敛.

例 12.9 如果 X 是具有离散度量的度量空间的任一集合，则 X 中的序列 $\{p_k\}$ 收序到 X 中的点 p，当且仅当存在某个下标 N，使得对所有的 $k \geqslant N$，$p_k=p$. 这可以由 $d(p_k, p)<1$ 当且仅当 $p_k=p$ 推出. ■

例 12.10 考虑度量空间 $C([a, b], \mathbb{R})$，设 $\{f_n\}$ 是 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中的函数序列，f 是 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中固定的函数. 第9章中描述了函数序列的两种类型的收敛性. 函数序列 $\{f_k: [a, b]\to\mathbb{R}\}$ 定义为*逐点收敛*(converge pointwise)到函数 $f: [a, b]\to\mathbb{R}$，如果对 $[a, b]$ 中每个点 x，实数序列 $\{f_k(x)\}$ 收敛到数 $f(x)$. 函数序列 $\{f_k: [a, b]\to\mathbb{R}\}$ 定义为*一致收敛*(converge uniformly)到函数 $f: [a, b]\to\mathbb{R}$，如果对每个 $\varepsilon>0$，存在下标 N，使得

[318]

$$\text{对 } [a,b] \text{ 中所有 } x \text{ 及所有 } k \geqslant N,\quad f(x) - \varepsilon < f_k(x) < f(x) + \varepsilon.$$

容易看出上述不等式成立当且仅当

$$\text{对所有 } k \geqslant N,\quad d(f_k,f) < \varepsilon.$$

于是函数序列一致收敛当且仅当它作为度量空间 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中的序列是收敛的. 由此，这一度量通常称为 $C([a, b], \mathbb{R})$ 上的*一致度量*(uniform metric). ■

定义 *设 X 是度量空间，X 的子集 C 称为 X 中的闭集，如果当 C 中收敛的序列 $\{p_k\}$ 收敛到 X 中的点 p 时，都有 p 属于 C.*

如上定义的闭集概念是在 n 维欧氏空间中所空义的概念的推广，在10.3节中考虑过 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集的例子.

例 12.11 在度量空间 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中，考虑由函数值为非负的所有函数所组成的集合 A，则 A 是 $C([a, b], \mathbb{R})$ 的闭子集. 该结论只须注意如下事实便可得到：一致收敛蕴涵了逐点收敛以及非负实数集是 $\mathbb{R}$ 的闭子集. ■

对任意两个集合 A 与 B，A 在 B 中的余集，用 $B\setminus A$ 表示，定义为

$$B\setminus A \equiv \{p\in B \mid p\notin A\}.$$

如果 B 是任意集合，$\{A_s \mid s\in S\}$ 是集族. 那么由并集、交集及余集的定义可得

$$B\setminus\bigcap_{s\in S} A_s = \bigcup_{s\in S}(B\setminus A_s) \quad \text{及} \quad B\setminus\bigcup_{s\in S} A_s = \bigcap_{s\in S}(B\setminus A_s).$$

这两个公式通常称为德·摩根律.

定理 12.12(余集特征) *设 X 是度量空间而 A 是 X 的子集，则 A 是开集当且仅当它在 X 中的余集是 X 中的闭集.*

证明 首先，假定 A 是 X 中的开集，则 A 中每一点是 A 的内点. 所以 $X\setminus A$ 中的序列不能收敛到 A 中的点. 由此推出 $X\setminus A$ 中收敛到 X 中某一点的序列必收敛到 $X\setminus A$ 中的点. 所以

[319]

$X \setminus A$ 是闭集.

为了证明相反的结论，假定 $X \setminus A$ 是闭集，要证 A 的每一点是 A 的内点. 设 P 是 A 中一点，假定 p 不是 A 的内点，设 k 是正整数，则$\mathcal{B}_{1/k}(p)$不是 A 的子集，于是可选择 $X \setminus A$ 中的一点，记为 p_k，使得 $d(p_k, p) < 1/k$. 于是$\{p_k\}$收敛到 p，但 $X \setminus A$ 是闭集，所以 p 是 $X \setminus A$ 的元素. 这一矛盾表明 p 是 A 的内点. ■

定理 12.13 设 X 是度量空间.

(i) X 的开子集的集族的并集是 X 中的开集.

(ii) X 的闭子集的集族的交集是 X 中的闭集.

(i)的证明 假定$\mathcal{O} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{O}_s$，其中每个$\mathcal{O}_s$是 X 中的开集，设 p 是$\mathcal{O}$中的点，要证 p 是$\mathcal{O}$的内点. 但 p 属于某个$\mathcal{O}_s$，由于$\mathcal{O}_s$是 X 中的开集，所以在 X 中存在围绕 p 的一个开球$\mathcal{B}_r(p)$，它包含在$\mathcal{O}_s$中，于是$\mathcal{B}_r(p)$也包含在$\mathcal{O}$中，所以 p 是$\mathcal{O}$的一个内点.

(ii)的证明 假定 $C = \bigcap_{s \in S} C_s$，其中每个 C_s 是 X 中的闭集，则 $X \setminus C = X \setminus \bigcap_{s \in S} C_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus C_s)$. 由(i)及余集特征可得，$C$ 是 X 中的闭集. ■

正如我们在欧几里得空间中提到的，开集的集族的交集未必是开集而闭集的集族的并集未必是闭集. 然而，对于有限集族，有下述定理.

定理 12.14 设 X 是度量空间.

(i) X 的有限个开子集的集族的交集是 X 中的开集.

(ii) X 的有限个闭子集的集族的并集是 X 中的闭集.

(i)的证明 假定$\mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i$，其中$\mathcal{O}_i$是 X 中的开集而 k 是某个正整数. 设 p 是$\mathcal{O}$的一个元素，如果 $1 \leqslant i \leqslant k$，$p$ 是$\mathcal{O}_i$的元素而$\mathcal{O}_i$是 X 中的开集，所以存在一个正整数 r_i，满足$\mathcal{B}_{r_i}(p) \subseteq \mathcal{O}_i$. 定义 $r = \min\{r_1, \cdots, r_k\}$，则 r 是正数，且$\mathcal{B}_r(p) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}$. 于是 p 是$\mathcal{O}$的内点，从而$\mathcal{O}$中的每一点都是$\mathcal{O}$的内点，所以$\mathcal{O}$是 X 中的开集.

(ii)的证明 假定 $C = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$，其中 C_i 是 X 中的闭集而 k 是某个正整数. 注意到 $X \setminus C = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus C_i)$. 由(i)及余集特征可得，$C$ 是 X 中的闭集. ■

320

习题

1. 设 $A = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid$ 对$[0, 1]$中所有 x, $f(x) \geqslant 0\}$. 证明：A 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$的闭子集，但 A 不是$C([0, 1], \mathbb{R})$中的开集.
2. 设 $X = C([0, 1], \mathbb{R})$. 对下列每一对函数求 $d(f, g)$：
   a. $f(x) = x$ 及 $g(x) = \cos x$, $x \in [0, 1]$.
   b. $f(x) = 4x^3$ 及 $g(x) = 6x^2 - 3x$, $x \in [0, 1]$.
3. 设$\{f_k\}$是 $C([0, 1], \mathbb{R})$中的序列，定义如下：

$$\text{对 } x \in [0,1] \text{ 及每个正整数 } k, \quad f_k(x) = (1 - x)x^k.$$

证明：序列逐点收敛到值为0的常数函数．序列$\{f_k\}$在度量空间$C([0,1],\mathbb{R})$中的收敛序列吗？

4. 对每个正整数k，定义函数f_k：$[(0,1)]\to\mathbb{R}$为：对$x\in[0,1]$，$f_k(x)=\cos(x/k)$．证明：序列$\{f_k\}$在度量空间$C([0,1],\mathbb{R})$中收敛．
5. 假定X是包含点p的度量空间，而r是正数．证明：集$\{q\in X\mid d(p,q)\leqslant r\}$是$X$中的闭集．
6. 验证例12.10所做的论断．
7. 验证例12.11所做的论断．
8. 对平面$\mathbb{R}^2$中的任意两点，定义
$$d^*(p,q)=|p_1-q_1|+|p_2-q_2|.$$
   a. 证明：d^*在$\mathbb{R}^2$上定义了一个度量．
   b. 比较在这个度量下围绕$(0,0)$的一个开球与在欧几里得度量下的围绕$(0,0)$的开球．
   c. 证明：$\mathbb{R}^2$中的序列关于上述度量收敛当且仅当它关于欧几里得度量收敛．
9. 设X是度量空间的任意一个集合，其度量为离散度量，用这个度量，证明：X的每个子集既是X的开集又是X的闭集．
10. 对度量空间X和正数r，能有$\mathcal{B}_r(p)=\mathcal{B}_r(q)$但$p\neq q$吗？这种情况会在欧几里得度量下的$\mathbb{R}^n$中发生吗？
11. 对$C([a,b],\mathbb{R})$中的任意两个函数f和g，定义
$$d^*(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx.$$
   a. 证明：上式在$C([a,b],\mathbb{R})$上定义了一个度量．
   b. 证明关于该度量与一致度量的下列不等式：
$$d^*(f,g)\leqslant(b-a)d(f,g).$$
   c. 比较函数序列在该度量下与在一致度量下的收敛性概念．

321

12.2 完备性与压缩映射原理

定义 *设X是度量空间．X中的序列$\{p_k\}$称为***柯西序列***，如果对每个正数ε，存在自然数N，使得*
$$\text{如果 } k\geqslant N \text{ 及 } \ell\geqslant N, \text{则有 } d(p_k,p_\ell)<\varepsilon.$$

注意到上述概念是9.1节中所考虑过的实数柯西序列概念的直接推广．

命题12.15 *每个收敛的序列是柯西序列．*

证明 设X是度量空间，假定$\{p_k\}$是X中收敛到X中点p的序列．可选择正整数N，使得若$k\geqslant N$则有$d(p_k,p)<\varepsilon/2$．由三角不等式可得
$$\text{若 } k\geqslant N \text{ 及 } \ell\geqslant N,\ \text{则 } d(p_k,p_\ell)\leqslant d(p_k,p)+d(p_\ell,p)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
于是序列$\{p_k\}$是柯西序列．■

在9.1节中证明过柯西收敛准则，该准则断定实数序列收敛当且仅当它是柯西序列．这一等价的意义在于常会发生如下情况：我们希望证明某个实数序列收敛，但又没有足够的资料确定其极限值．在这种情况下柯西收敛准则是有用的，因为该准则只依赖序列本身而不需要对极限值有任何了解．发现每个柯西序列在空间中收敛到一点的其他的这种度量空间是有益处的．

例12.16 考虑欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中的序列$\{\mathbf{u}_k\}$，如同实数序列的情形一样，可断定该序列为柯西序列当且仅当它收敛到$\mathbb{R}^n$中的一点$\mathbf{u}$．由于在任意的度量空间中每个收敛序列是柯西序列，

为证明上述论断只需要证明如果$\{\boldsymbol{u}_k\}$是柯西序列，则它必收敛. 注意到，如果$\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$及$\boldsymbol{v}=(v_1, \cdots, v_n)$是$\mathbb{R}^n$中的点，则

$$\text{对每个下标 } i(1 \leqslant i \leqslant n), \quad |u_i - v_i| \leqslant \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

于是，如果$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$中的柯西序列，且$1 \leqslant i \leqslant n$，则第$i$个分量的序列是柯西序列，因而根据柯西收敛准则，第$i$个分量的序列收敛到某个数$u_i$，定义$\mathbb{R}^n$的点$\boldsymbol{u}$的第$i$个分量是$u_i$，则从按分量收敛准则可得序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$收敛到点$\boldsymbol{u}$. ■ [322]

例 12.17 考虑$C([a, b], \mathbb{R})$中的点$\{f_k\}$，从在$C([a, b], \mathbb{R})$上度量的定义可得，序列$\{f_k\}$是$C([a, b], \mathbb{R})$中的柯西序列当且仅当对每个正数ε，存在自然数N，使得

$$\text{对}[a,b]\text{中的所有 } x, \quad \text{若 } k \geqslant N \text{ 且 } \ell \geqslant N, \text{则有 } |f_k(x)-f_\ell(x)| < \varepsilon.$$

这是在9.2节中所考虑过的概念，把具有这一性质的序列称为一致柯西序列(uniformly cauchy). 事实上，在那一节中建立了魏尔斯特拉斯一致收敛准则，该准则断定在$C([a, b], \mathbb{R})$中的序列是一致柯西序列当且仅当它一致收敛到连续函数$f: [a, b] \to \mathbb{R}$. ■

定义 *度量空间X称为***完备的***(complete)，如果X中每个柯西序列收敛到X中的一点.*

在这个定义前面所讨论的内容可以方便地概括为下述定理.

定理 12.18 *度量空间$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n$以及$C([a, b], \mathbb{R})$是完备的.*

完备度量空间的子空间未必是完备的. 例如，如果X是$\mathbb{R}$的由区间$(0, 2)$组成的子空间，则X不是完备的. 为说明这一点，注意到，序列$\{1/k\}$是X中的柯西序列，但并不收敛到X中的点，因为它收敛到点0，而0不在X之中. 然而，存在下列准则，用来确定完备度量空间的哪些子空间是完备的.

定理 12.19 *设X是完备度量空间而Y是X的子空间，则Y是完备度量空间当且仅当Y是X的闭子集.*

证明 首先，假定Y是X的闭子集，令$\{p_k\}$是Y中的柯西序列，则$\{p_k\}$是X中的柯西序列，而由于X是完备的，故$\{p_k\}$收敛到X中一点p. 但Y是X的闭子集，所以p属于Y，于是Y是完备的.

下面证明其逆. 假定Y是完备度量空间，设$\{p_k\}$是Y中的序列，它收敛到X中的一点p，从命题12.15可得$\{p_k\}$是柯西序列. 但Y是完备的，所以$\{p_k\}$收敛到Y中的一点，由于序列至多只能收敛到一个点，所以p属于Y，于是Y是X的闭子集. ■

推论 12.20 *$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n$以及$C([a, b], \mathbb{R})$的每个闭子集都是完备度量空间.*

证明 此结果可从定理12.18及定理12.19推出. ■ [323]

定义 *设X和Y是度量空间.*

(i)映射$T: X \to Y$称为利普希茨映射，如果存在某个非负数c，使得

$$\text{对 } X \text{ 中所有点 } p \text{ 及 } q, \quad d(T(p), T(q)) \leqslant c\,d(p,q).$$

数c称为映射的利普希茨常数.

*(ii)利普希茨常数小于1的利普希茨映射$T: X \to Y$称为***压缩***(contraction)映射.*

例 12.21 设I为$\mathbb{R}$中的开区间，假定函数$f: I \to \mathbb{R}$是可微的. 可以断言：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是具有利普希茨常数$c$的利普希茨映射当且仅当

$$\text{对所有 } x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant c.$$

为验证这一结论，首先假定上述不等式成立，则如果 u 与 v 是 I 中的点 $(u \neq v)$，由中值定理可得，在 u 与 v 之间存在某点 z，使得

$$f(u) - f(v) = f'(z)[u - v],$$

所以 $|f(u) - f(v)| \leqslant c|u - v|$. 逆命题可由导数是差商的极限这一定义得到. ■

上述例子存在一个有用的对欧几里得空间之间的映射的推广. 由于这样的推广要用到偏导数的概念，因此我们将把关于这一推广的讨论推迟到对这类映射建立相应推广的中值定理之后进行.

定义 设 X 是度量空间，X 中的点 p 称为映射 $T: X \to X$ 的**不动点**(fixed point)，如果

$$T(p) = p.$$

要寻求这样的假定：它能保证映射存在不动点. 当然，映射可能有不动点也可能没有不动点. 例如，由 $T(x) = x + 1$ 所定义的映射 $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 肯定没有不动点.

对于一元实变量的实值函数，函数的不动点对应于这样的点，在该点处函数的图形与直线 $y = x$ 相交如图 12.2 所示. 这一评述为下面的例子提供了几何上的洞察力.

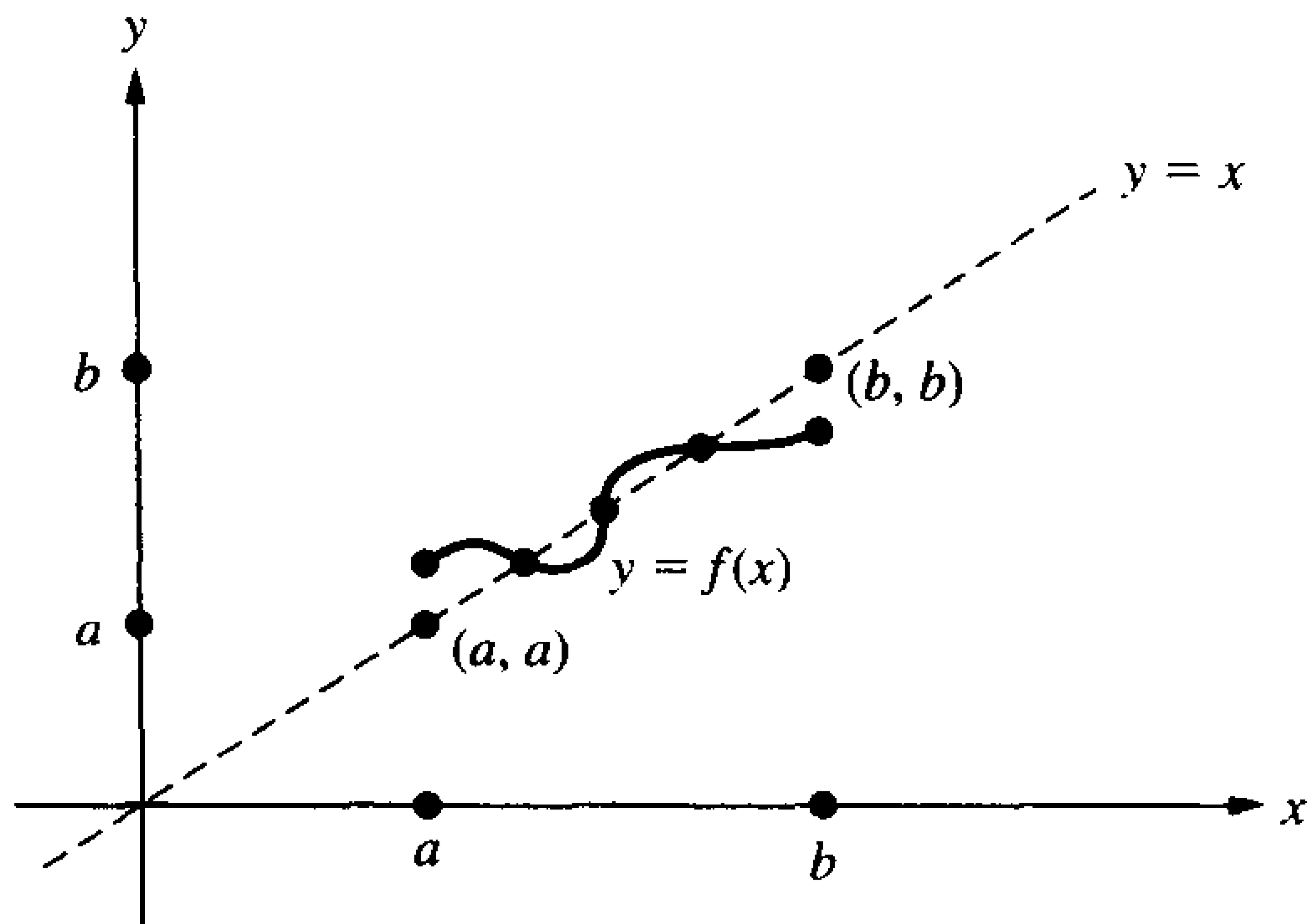


图 12.2 x 是 f 的不动点当且仅当 $(x, f(x))$ 与对角线相交

例 12.22 假定函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的且象 $f([a, b])$ 包含在 $[a, b]$ 之中，则 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 有不动点. 这个结论可以由介值定理推出，注意到，若对 $[a, b]$ 中的 x，定义 $g(x) = f(x) - x$，则 $g(a) \geqslant 0$ 且 $g(b) \leqslant 0$，所以对 $[a, b]$ 中某个 x_0，必有 $g(x_0) = 0$，这就意味着 $f(x_0) = x_0$. ■

324

上述结果推广到欧几里得空间之间的映射，如下所述：如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集且 K 是闭的、有界的凸集，映射 $T: K \to K$ 是连续的，则 $T: K \to K$ 有不动点. 这称为**布劳威尔不动点定理**(Brouwer's Fixed-Point Theorem). 但是，其证明超出了本书的范围[⊖].

下面将要证明压缩映射原理，该定理有许多重要的应用. 除了有用之外，这个定理特别有趣，因为它的证明只需要完备度量空间的定义以及在第 1 章和第 2 章中已经建立的两个结果，第一个是，如果 c 是实数，则

⊖ 在 Milnor 的《Topology from the Differentiable Viewpoint》(Charlottesville: University Press of Virginia, 1965)一书中可找到这个定理的证明.

$$若\ |c|<1,\quad 有\lim_{k\to\infty}c^k=0.$$

第二个是几何和公式.

几何和公式

$$若\ c\neq 1,\quad 则\sum_{k=0}^{n}c^k=\frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

定理 12.23(压缩映射原理) 设 X 是完备度量空间，假定映射 $T: X\to X$ 是压缩映射，则映射 $T: X\to X$ 恰有一个不动点.

证明 设 c 是映射 $T: X\to X$ 的利普希茨常数，满足 $0\leqslant c<1$，即

$$对\ X\ 中所有的点\ p\ 及\ q,\quad d(T(p),T(q))\leqslant cd(p,q).$$

325

在 X 中选择某个点，记为 p_0. 现归纳地定义序列 $\{p_k\}$ 如下：令 $p_1=T(p_0)$，若对于正整数 k，p_k 已定义，则令 $p_{k+1}=T(p_k)$，如图 12.3 所示. 由于 $T(x)$ 是 X 的子集，所以上述序列已确切地得到定义. 下面将要证明序列 $\{p_k\}$ 收敛到映射 $T: X\to X$ 的一个不动点.

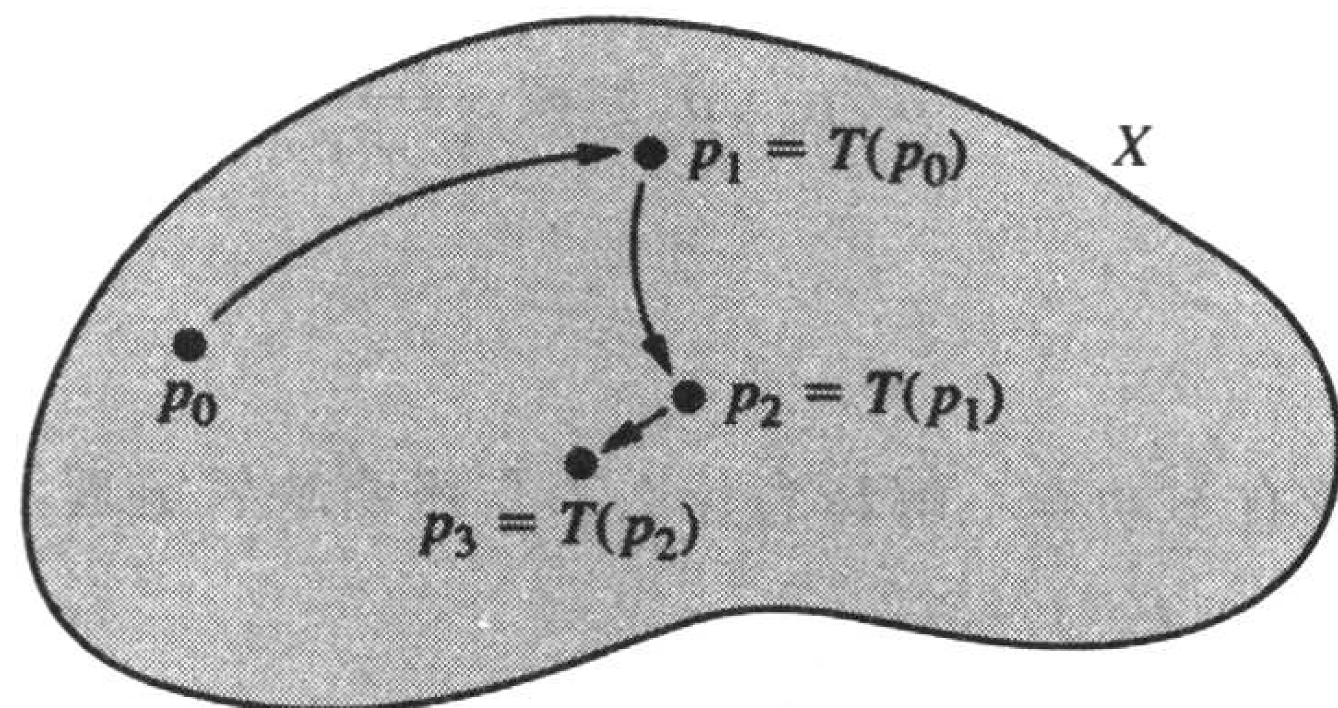


图 12.3 x_{k+1} 是它的前行者 x_k 在 f 下的象

首先，注意到，由序列的定义及利普希茨常数的定义，可得

$$d(p_2,p_1)=d(T(p_1),T(p_0))\leqslant cd(T(p_0),p_0),$$

以及

$$如果\ k\geqslant 2,\ 则\ d(p_{k+1},\ p_k)=d(T(p_k),\ T(p_{k-1}))\leqslant cd(p_k,\ p_{k-1}).$$

用这两个不等式，归纳论证推得

$$对每个正整数\ k,\quad d(p_{k+1},p_k)\leqslant c^k d(T(p_0),p_0).$$

于是，若 m 与 k 为正整数，满足 $m>k$，则由三角不等式及几何和公式可得

$$\begin{aligned}d(p_m,p_k)&\leqslant d(p_m,p_{m-1})+d(p_{m-1},p_{m-2})+\cdots+d(p_{k+1},p_k)\\&\leqslant[c^{m-1}+c^{m-2}+\cdots+c^k]d(T(p_0),p_0)\\&=c^k[1+c+\cdots+c^{m-1-k}]d(T(p_0),p_0)\\&=c^k\frac{c[1-c^{m-k}]}{1-c}d(T(p_0),p_0).\end{aligned}$$

由于 c 在 0 与 1 之间，所以

$$若\ m>k,\quad 则\ d(p_m,\ p_k)\leqslant\frac{c^k}{1-c}d(T(p_0),\ p_0).\tag{12.1}$$

326 但$\lim_{k\to\infty} c^k=0$，于是从(12.1)可推出$\{p_k\}$是柯西序列.

由假定，度量空间是完备的. 于是X中存在点p，序列$\{p_k\}$收敛到p. 但

$$\text{对每个正整数 } k,\quad d(T(p_k),T(p)) \leqslant cd(p_k,p), \tag{12.2}$$

所以由比较引理，可得象序列$\{T(p_k)\}$收敛到$T(p)$. 然而对每个k，$T(p_k)=p_{k+1}$，序列$\{T(p_k)\}$是序列$\{p_k\}$的子序列，所以$T(p)=p$. 于是映射T: $X\to X$至少有一个不动点.

剩下的是验证只有一个不动点. 如果p与q是X中满足$T(p)=p$与$T(q)=q$的点，则

$$0 \leqslant d(p,q) = d(T(p),T(q)) \leqslant cd(p,q).$$

由于$0\leqslant c<1$，必有$d(p,q)=0$，即$p=q$. 于是恰有一个不动点. ■

上述压缩映射原理的证明实际上比纯粹唯一不动点的存在性的证明多得多. 它给出一种逼近不动点的迭代方法. 事实上，在上述定理的假设条件下，已证明的不仅是映射T: $X\to X$恰有一个不动点p_*，而且也证明了，若p_0是X中任意一点，则用归纳法如下定义的序列$\{p_k\}$收敛到p_*：即令$p_1=T(p_0)$，若k是使p_k有定义的正整数，则定义$p_{k+1}=T(p_k)$. 此外，如果c是映射T: $X\to X$的利普希茨常数，满足$0\leqslant c<1$，则下面的误差界成立：

$$\text{对每个正整数 } k,\quad d(p_*,p_k) \leqslant \frac{c^k}{1-c}d(T(p_0),p_0). \tag{12.3}$$

习题

1. 证明：下面的映射f: $X\to X$都没有不动点. 解释为什么不与压缩映射定理矛盾：

a. $X=(0,1)\subseteq\mathbb{R}$，且对$X$中的$x$，$f(x)=x/2$.

b. $X=\mathbb{R}$且对X中x，$f(x)=x+1$.

c. $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$且对$X$中$(x,y)$，$f(x,y)=(-y,x)$.

2. 固定α为正实数，令$X=[0,1)\subseteq\mathbb{R}$，定义$f$: $X\to\mathbb{R}$如下：

$$\text{对 } x\in X,\quad f(x)=\alpha x(1-x).$$

a. 对于什么样的α值，映射f: $X\to\mathbb{R}$有性质$f(X)\subseteq X$?

b. 对于什么样的α值，映射f: $X\to\mathbb{R}$有性质$f(X)\subseteq X$且f: $X\to X$是压缩映射?

3. 定义函数f: $[1,\infty)\to\mathbb{R}$如下：

$$\text{对 } x\geqslant 1,\quad f(x)=1+\sqrt{x}.$$

327 证明这个函数恰有一个不动点.

4. 写出例12.21的细节.

5. 假定p:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是多项式. 证明：p:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是利普希茨映射当且仅当多项式的次数小于2.

6. 假定函数g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$与h:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都是利普希茨函数，它们的积是利普希茨函数吗?

7. 假定函数f: $[a,b]\to\mathbb{R}$是连续的. 证明：f: $[a,b]\to\mathbb{R}$是利普希茨函数当且仅当f: $(a,b)\to\mathbb{R}$是利普希茨函数.

8. a. 对$x\geqslant 0$，定义$f(x)=\sqrt{x}$. 证明：函数f: $[0,\infty)\to\mathbb{R}$是连续的但不是利普希茨函数.

b. 对所有实数x，定义$f(x)=|x|$，证明：函数f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是利普希茨函数但不是可微函数.

9. 对每个正整数k，定义$f_k(x)=x^k$，其中$0\leqslant x\leqslant 1$. 序列$\{f_k$: $[0,1]\to\mathbb{R}\}$是度量空间$C([0,1],\mathbb{R})$中的柯西序列吗?

10. 对每个正整数k，定义$f_k(x)=e^{x/k}$，其中$0\leqslant x\leqslant 1$. 序列$\{f_k$: $[0,1]\to\mathbb{R}\}$是度量空间$C([0,1],\mathbb{R})$中的柯西序列吗?

11. 对每个正整数 k，定义 $f_k(x)=\cos(x/k)$，其中 $0\leqslant x\leqslant 1$. 序列 $\{f_k: [0,1]\to\mathbb{R}\}$ 是度量空间 $C([0,1],\mathbb{R})$ 中的柯西序列吗？
12. 证明：不等式(12.1)蕴涵序列 $\{p_k\}$ 是柯西序列.
13. 证明：不等式(12.1)蕴涵不等式(12.3).
14. 设 X 是度量空间，假定 $\{p_k\}$ 是 X 中的序列，具有如下性质：

$$\text{对所有自然数 } k,\quad d(p_{k+1},p_k)\leqslant 1/k.$$

该序列是柯西序列吗？(提示：令 $X=\mathbb{R}$ 且对每个正整数 k，$p_k=\sum_{i=1}^{k}1/i$.)
15. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开球，在 U 中明确地求一个柯西序列，它不收敛到 U 中的点. 证明 U 不是完备的.
16. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，假定映射 $T: X\to\mathbb{R}^m$ 是利普希茨映射. 证明 $T(x)$ 是有界的当且仅当 X 是有界的. 当只假定映射是连续时这个结果成立吗？
17. 设 X 是包含点 p_0 的完备度量空间，r 是正实数，定义 $K=\{p\in X\mid d(p,p_0)\leqslant r\}$，假定 $T: K\to X$ 是利普希茨映射，其利普希茨常数为 c，还假定 $cr+d(T(p_0),p_0)\leqslant r$. 证明：$T(K)\subseteq K$ 且 $T:K\to K$ 有不动点.

12.3 非线性微分方程的存在性定理

本节的目的是用压缩映射原理证明某种非线性微分方程解的存在性的一个重要定理. 从回顾在前面已经建立的关于微分方程的某些结果开始. 在 4.5 节，我们首先遇到下面的关于微分方程可解性的问题.

328

假定 I 是包含 x_0 的实数开区间，则给定数 y_0 及函数 $h: I\to\mathbb{R}$，存在作为下列基本微分方程解的可微函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 吗？

$$\begin{cases}f'(x)=h(x) & \text{对所有的 } x\in I\\ f(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{12.4}$$

一般地，这个方程可能不存在任何解. 例如，在第 4 章中，注意到，如果函数 $h: I\to\mathbb{R}$ 是非常值的阶梯函数，方程(12.4)无解. 然而，如果函数 $h: I\to\mathbb{R}$ 是连续的，则在第 7 章中建立的微积分的第二基本定理有下述的变形.

定理 12.24 *设 I 是包含点 x_0 的实数开区间，令 y_0 是实数，假定函数 $h: I\to\mathbb{R}$ 是连续的，则恰存在一个可微函数 $f:I\to\mathbb{R}$，它是微分方程(12.4)的解. 由如下公式给出：*

$$\text{对 } I \text{ 中的所有 } x,\quad f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}h(t)\,\mathrm{d}t.\tag{12.5}$$

公式(12.5)将方程(12.4)的解表示为一个积分，于是对 I 中每个点 x，$f(x)$ 的实际值是黎曼和的极限. 当然，它是已确切定义的函数，即它把 I 中每一点 x 与一个确定的值相联系. 当然，有时能用诸如分部积分法、换元积分法的技巧简化这种表示，从而借助更熟悉的函数表示方程的解. 但通常不能借于 x^k，$\sin x$，$\ln x$ 等“初等函数”明确地表示方程的解. 此时为了得到关于微分方程(12.4)的解的实际函数值的更准确的信息，有必要使用逼近技巧，例如在 7.4 节中所叙述的技巧.

例 12.25 考虑微分方程

$$\begin{cases}f'(x)=1/(1+x^4) & \text{对一切 } x\in\mathbb{R}\\ f(0)=1.\end{cases}$$

对每个实数 x，定义 $h(x)=1/(1+x^4)$，以便得到连续函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 定理 12.24 蕴涵了这个微分方程有唯一解 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，由如下公式定义：

329

$$\text{对一切 } x\in\mathbb{R},\quad f(x)=1+\int_0^x\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t.$$

要指出的是人们不能通过检验明确地求出这个解的函数值. 例如，

$$f(2)=1+\int_0^2\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t,$$

而为了得到 $f(2)$ 的近似值，有必要使用诸如在 7.4 节中所叙述的某些逼近技巧. ■

对于函数 h：$I\to\mathbb{R}$ 的某种选择，也许可以考虑具有如下性质的可微函数 $g:I\to\mathbb{R}$：

$$\text{对 } I \text{ 中所有 } x,\quad g'(x)=h(x).$$

当考虑这样一个函数时，微分方程(12.4)的解可由下式给出：

$$\text{对 } I \text{ 中所有 } x,\quad f(x)=y_0-g(x_0)+g(x).$$

例 12.26 考虑微分方程

$$\begin{cases}f'(x)=1/(1+x^2) & \text{对所有 } x\in\mathbb{R}\\ f(1)=2.\end{cases}$$

回想前面证明了反正切函数有如下性质：

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}.$$

因此，上述微分方程的唯一解可用如下公式给出：

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad f(x)=2-\arctan 1+\arctan x=2-\frac{\pi}{4}+\arctan x.$$ ■

在 7.2 节考虑了比微分程(12.4)更一般的微分方程. 特别地，引入了附加参数 b 并寻求如下微分方程的解函数 $f:I\to\mathbb{R}$：

$$\begin{cases}f'(x)=bf(x)+h(x) & \text{对 } I \text{ 中所有 } x\\ f(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{12.6}$$

事实上，存在一种技巧把这个方程归约为我们刚刚考虑过的方程. 此技巧[⊖]是用 e^{-bx} 去乘(12.6)的第一个方程，则方程变为

330

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^{-bx}f(x)]=\mathrm{e}^{-bx}h(x) & \text{对 } I \text{ 中所有 } x\\ f(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{12.7}$$

如果函数 h：$I\to\mathbb{R}$ 是连续的，则由定理 12.14 可得，存在(12.6)的唯一解，由以下公式给出：

$$\text{对 } I \text{ 中所有的 } x,\quad f(x)=\mathrm{e}^{b(x-x_0)}y_0+\int_{x_0}^x\mathrm{e}^{b(x-t)}h(t)\mathrm{d}t.\tag{12.8}$$

例 12.27 考虑微分方程

$$\begin{cases}f'(x)=2f(x)+x & \text{对所有 } x\in\mathbb{R}\\ f(0)=1.\end{cases}$$

⊖ 此技巧称为乘以积分因子(multiplication by an integrating factor).

因为对所有 x，由 $h(x)=x$ 所定义的函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，所以从上述讨论可得这个微分方程有唯一解 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，由如下公式给出：

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad f(x)=e^{2x}+\int_0^x e^{2(x-t)}t\,dt.$$

由分部积分法并用微积分第一基本定理，上面的公式化为

$$\text{对所有 } x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{5}{4}e^{2x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

■

下面考虑更一般的微分方程. 假定 $\mathcal{O}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中包含点 $(x_0,\ y_0)$ 的开子集，而函数 $g:\ \mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续的. 问题是求包含点 x_0 的开区间 I 及可微函数 $f:I\to\mathbb{R}$，使得

$$\begin{cases}f'(x)=g(x,f(x)) & \text{对 } I \text{ 中所有的 } x\\ f(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{12.9}$$

这个微分方程包含微分方程(12.4)及方程(12.6)作为它的特例. 事实上，定义 $\mathcal{O}=\{(x,\ y)\mid x\in I,\ y\in\mathbb{R}\}$，在对于 $\mathcal{O}$ 中的 $(x,\ y)$，$g(x,\ y)=h(x)$ 的情况下，微分方程(12.9)归约为微方程(12.4)，而在对于 $\mathcal{O}$ 中的 $(x,\ y)$，$g(x,\ y)=by+h(x)$ 的情况下，微分方程(12.9)归约为微分方程(12.6).

对于一般的连续函数 $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，方程(12.9)的研究可能非常复杂. 首先，如下面的例子所示，可以存在不止一个解.

例 12.28 设 $\mathcal{O}=\mathbb{R}^2$，令 $(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$ 且定义 $g(x,\ y)=3y^{2/3}$，则方程(12.9)变为

$$\begin{cases}f'(x)=3[f(x)]^{2/3} & \text{对所有 } x\in I\\ f(0)=0.\end{cases}\tag{12.10}$$

331

显然，恒等于 0 的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是方程(12.10)的一个解. 但还有另一个解，不难检验，如下定义的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x<0\\ x^3 & \text{若 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

也是微分方程(12.10)的解. ■

在方程(12.9)的研究中可能出现的另一个困难是解函数的定义区间 I 也许是一个小区间. 这可以由下面的例子得到说明.

例 12.29 设 $\mathcal{O}=\mathbb{R}^2$，令 $(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$ 且定义 $g(x,\ y)=1+y^2$，则方程(12.9)变为

$$\begin{cases}f'(x)=1+[f(x)]^2 & \text{对所有 } x\in I\\ f(0)=0.\end{cases}\tag{12.11}$$

可以断定该微分方程在区间 $I=(-\pi/2,\ \pi/2)$ 上存在唯一解，而在任意更大的区间上没有解. 为分析微分方程(12.11)，首先，假定 I 是一个包含点 0 的区间，并且可微函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 是(12.11)的解，则

$$\text{对所有 } x\in I,\quad \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}=1,$$

由于链式法则及对反正切函数的导数公式，上式意味着

$$对所有\ x \in I,\quad \frac{d}{dx}[\arctan f(x) - x] = 0.$$

由于 $\arctan f(0) = \arctan 0 = 0$，由恒等准则可得

$$对所有\ x \in I,\quad \arctan f(x) = x.$$

但反正切函数的象是区间 $(-\pi/2, \pi/2)$，所以得到 $I \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ 且对所有 $x \in I$，$f(x) = \tan x$.

这个论断表明，如果存在一个包含点0的区间及微分方程(12.11)的解的可微函数 $f: I \to \mathbb{R}$，则 $I \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ 且对所有 $x \in I$，$f(x) = \tan x$. 导数的直接计算表明，如果定义 $I = (-\pi/2, \pi/2)$ 且用 $f(x) = \tan x$ 定义 $f: I \to \mathbb{R}$，则此函数就是微分方程(12.11)的解. ■

上面例子的目的是要表明，哪怕 $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是简单到仅为 y 的二次多项式的函数，关于 x_0 的邻域 I 的大小仍然受到限制，其中 I 是(12.11)在其上有解的区间(见习题6).

下面转到对一般函数 $g: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 的微分方程(12.9)的分析. 再次注意到，微积分第二基本定理对我们的分析是必要的. 下面的引理确立了微分方程和与之相联系的积分方程之间的等价性.

332

引理 12.30(等价性引理) 设 $\mathcal{O}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的包含点 (x_0, y_0) 的开子集，且假定函数 $g: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 是连续的，令 I 是点 x_0 的邻域，且假定函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 具有如下性质：

$$对\ I\ 中所有\ x,\quad (x, f(x))\ 在\ \mathcal{O}\ 中.$$

那么下面的两个论断是等价的：

(i) 函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是可微的，并且是下面微分方程的解：

$$\begin{cases} f'(x) = g(x, f(x)) & 对\ I\ 中所有的\ x \\ f(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{12.12}$$

(ii) 函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且是下面积分方程的解：

$$对\ I\ 中所有的\ x,\quad f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\,dt. \tag{12.13}$$

证明 定义函数 $h: I \to \mathbb{R}$ 为：

$$对\ I\ 中所有的\ x,\quad h(x) = g(x, f(x)).$$

注意到函数 $h: I \to \mathbb{R}$ 是连续函数的复合，因而是连续的.

首先，假定(i)成立. 根据函数 $h: I \to \mathbb{R}$ 的定义，微分方程(12.12)可以写成：

$$\begin{cases} f'(x) = h(x) & 对\ I\ 中所有的\ x \\ f(x_0) = y_0. \end{cases}$$

由定理12.24推出，对 I 中所有的 x，

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\,dt,$$

所以(ii)成立.

反之，如果(ii)成立，则显然 $f(x_0) = y_0$. 此外，由微积分第二中值定理推出，

$$对\ I\ 中所有\ x,\quad \frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\,dt\right] = g(x, f(x)).$$

从积分方程(12.13)可推得，函数$f:I\to\mathbb{R}$是微分方程(12.12)的解的可微函数. ■ 333

定理 12.31(存在性定理) 设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$的包含点(x_0, y_0)的开子集，假定函数$g: \mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$是连续的且存在正数$M$，使得对$\mathcal{O}$中的所有点$(x, y_1)$及$(x, y_2)$，

$$|g(x,y_1)-g(x,y_2)|\leqslant M|y_1-y_2|, \tag{12.14}$$

则存在包含点x_0的开区间I，使得微分方程

$$\begin{cases} f'(x)=g(x,f(x)) & \text{对 } I \text{ 中所有的 } x \\ f(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{12.15}$$

恰有一个解.

证明 对正数ℓ，定义I_ℓ为闭区间$[x_0-\ell, x_0+\ell]$. 下面将要证明可以选取ℓ，使得对I_ℓ中所有的x，恰有一个形式为

$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} g(s,f(s))\,\mathrm{d}s \tag{12.16}$$

的连续函数$f: I_\ell\to\mathbb{R}$. 一旦取到这样的ℓ，由等价性引理可得，微分方程(12.15)在区间$I=(x_0-\ell, x_0+\ell)$上恰存在一个解.

由于$\mathcal{O}$是开集，可选取正数a及b，使得矩形$R=[x_0-a, x_0+a]\times[y_0-b, y_0+b]$包含在$\mathcal{O}$中. 对每个正数$\ell(\ell\leqslant a)$，定义$X_\ell$是度量空间$C(I_\ell, \mathbb{R})$的子空间，它由对$I_\ell$中所有的$x$，满足

$$|f(x)-y_0|\leqslant b$$

的连续函数$f: I_\ell\to\mathbb{R}$组成. 注意到，X_ℓ是由连续函数$f: I_\ell\to\mathbb{R}$所组成，这些函数的图形位于矩形$I_\ell\times[y_0-b, y_0+b]$之中. 334

对X_ℓ中的函数f，在$C(I_\ell, \mathbb{R})$中定义函数$T(f)$为

$$\text{对 } I_\ell \text{ 中所有的 } x,\quad T(f)(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} g(t,f(t))\,\mathrm{d}t.$$

注意到，积分方程(12.16)的解仅是映射$T: X_\ell\to C(I_\ell, \mathbb{R})$的不动点.

证明的策略如下：由于$C(I_\ell, \mathbb{R})$是完备度量空间，且X_ℓ是$C(I_\ell, \mathbb{R})$的闭子集，故从推论 12.20 可得，X_ℓ也是完备度量空间. 下面要证明，如果ℓ选得充分小，则

$$T(X_\ell)\subseteq X_\ell \quad \text{且} \quad T:X_\ell\to X_\ell \text{ 是压缩映射}. \tag{12.17}$$

于是由压缩映射原理可得，映射$T: X_\ell\to X_\ell$有唯一的不动点.

为选择满足$T(X_\ell)\subseteq X_\ell$的$\ell$，如图 12.4 所示，首先，选任一正数$K$，使得对矩形$R$中所有的点$(x, y)$，

$$|g(x,y)|\leqslant K.$$

极值定理允许我们作出这样的选择. 于是如果f是X_ℓ中任意函数且点x属于I_ℓ，

$$|T(f)(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} g(t, f(t))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \ell K,$$

所以

$$T(X_\ell)\subseteq X_\ell\text{，如果 }\ell K\leqslant b. \qquad (12.18)$$

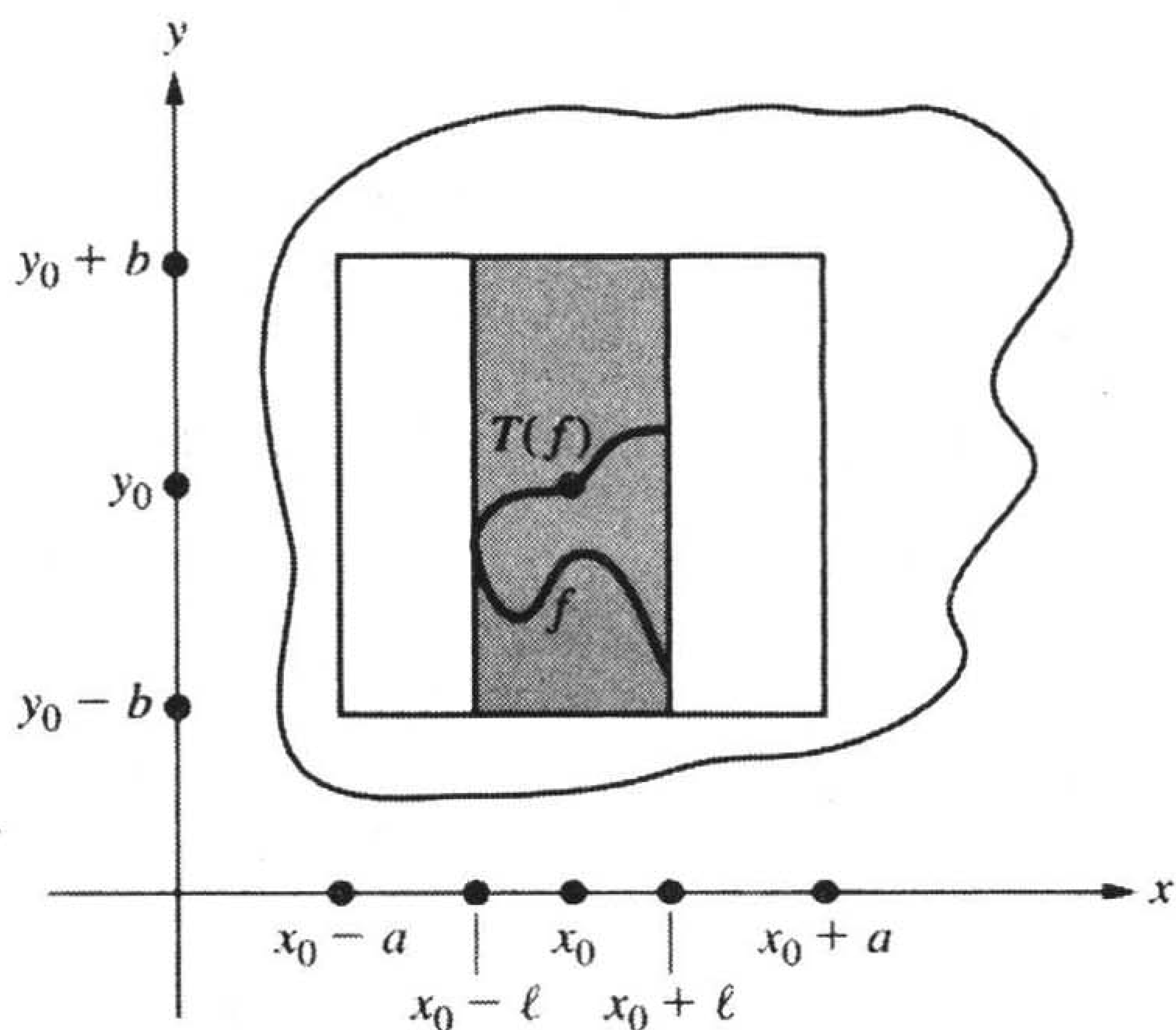


图 12.4 选取 l 使得 $T(X_l)\subseteq X_l$

注意到，如果 f_1 与 f_2 是 X_ℓ 中任意的两个函数且点 x 在 I_ℓ 中，则由假设(12.14)，

$$|g(x,f_1(x))-g(x,f_2(x))|\leqslant M|f_1(x)-f_2(x)|\leqslant Md(f_1,f_2).$$

于是运用积分的线性及单调性性质，可得

$$\begin{aligned}|T(f_1)(x)-T(f_2)(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}[g(t,f_1(t))-g(t,f_2(t))]\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x}Md(f_1,f_2)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant |x-x_0|\,Md(f_1,f_2) \\ &\leqslant \ell Md(f_1,f_2).\end{aligned}$$

最后的不等式连同不等式(12.18)推得对 $0\leqslant\ell\leqslant a$，

$$T:X_\ell\to X_\ell\text{ 是压缩映射，如果 }\ell K\leqslant b\text{ 及 }\ell M<1. \qquad (12.19)$$

于是可以应用压缩映射原理求 T 的唯一的不动点，即积分方程(12.16)的唯一解，也是微分方程(12.15)的唯一解. ■

335

习题

1. 对下面的每个微分方程，运用定理 12.14 写出解的积分公式，若可能，用初等函数写出解：

a. $\begin{cases}f'(x)=x\cos x & \text{对}\mathbb{R}\text{ 中所有 }x\\ f(0)=1.\end{cases}$

b. $\begin{cases}f'(x)=1+x^3 & \text{对}\mathbb{R}\text{ 中所有 }x\\ f(1)=4.\end{cases}$

c. $\begin{cases}f'(x)=\mathrm{e}^{x^2} & \text{对}\mathbb{R}\text{ 中所有 }x\\ f(0)=0.\end{cases}$

2. 对下面的每个微分方程，用公(12.8)写出解的积分公式，若可能，用初等函数写出解：

a. $\begin{cases}f'(x)=f(x)+1 & \text{对}\mathbb{R}\text{ 中所有 }x\\ f(0)=1.\end{cases}$

b. $\begin{cases} f'(x) = -f(x) + 2 + x & \text{对}\mathbb{R}\text{中所有 } x \\ f(0) = 1. \end{cases}$

c. $\begin{cases} f'(x) = 2f(x) + e^x & \text{对}\mathbb{R}\text{中所有 } x \\ f(1) = 0. \end{cases}$

3. 仿效例 12.29 中的分析明确地求出 0 的最大区间 I，在该区间上可以解出下列微分方程：

a. $\begin{cases} f'(x) = 1 - [f(x)]^2 & \text{对 } I \text{ 中所有 } x \\ f(0) = 0. \end{cases}$

b. $\begin{cases} f'(x) = xf(x) & \text{对 } I \text{ 中所有 } x \\ f(0) = 1. \end{cases}$

c. $\begin{cases} f'(x) = [f(x)]^2 & \text{对 } I \text{ 中所有 } x \\ f(0) = -1. \end{cases}$

4. 验证例 12.28 的细节.

5. 验证例 12.29 的细节.

6. 设 ε 是正数，考虑微分方程

$$\begin{cases} f'(x) = (1/\varepsilon)(1 + (f(x))^2) & \text{对 } I \text{ 中所有的 } x \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

求此微分方程有解的最大区间的长度.

7. 验证在存在性定理证明中所推断的积分不等式.

336

8. 仿效存在性定理的证明，证明下列命题：设 a，b，M 及 K 是正实数，令(x_0, y_0)是平面$\mathbb{R}^2$ 中的点，且设 R 是闭矩形$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$，假定函数 g：$R \to \mathbb{R}$ 是连续的而且 $aM < 1$ 及 $aK \leqslant b$，其中

$$\text{对 } R \text{ 中所有}(x,y), \quad |g(x,y)| \leqslant K,$$

且对 R 中所有(x, y_1)，(x, y_2)，$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$. 那么如下微分方程存在唯一解：

$$\begin{cases} f'(x) = g(x, f(x)) & \text{对}(x_0 - a, x_0 + a)\text{ 中所有 } x \\ f(x_0) = y_0. \end{cases}$$

9. 用习题 8 确定 r 的值，使得微分方程

$$\begin{cases} f'(x) = \sin(xf(x)) & \text{对}(-r, r)\text{ 中所有 } x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

有唯一解.

10. 在习题 8 的假定下，证明：如果对$[x_0 - a, x_0 + a]$中所有的 x，$f_0(x) = y_0$ 且函数序列$\{f_k: (x_0 - a, x_0 + a) \to \mathbb{R}\}$由以下公式递归定义：

$$\text{对}(x_0 - a, x_0 + a)\text{ 中所有 } x, \quad f_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, f_k(s))\,ds,$$

则序列$\{f_k: (x_0 - a, x_0 + a) \to \mathbb{R}\}$一致收敛到微分方程的解.

11. 在习题 8 的假定下，设$\{f_k\}$是习题 10 中所定义的序列. 证明：对$(x_0 - a, x_0 + a)$中所有的 x 及所有的自然数 k，有

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{(aM)^k}{1 - aM} ak,$$

其中 $f: I \to \mathbb{R}$ 是方程(12.9)的解.（提示：用估计式(12.3).）

12.4 度量空间之间的连续映射

本节将研究函数 f：$X \to Y$，其中 X 与 Y 是一般的度量空间. 在一般情况下，函数称为映

射. 正如我们将要看到的，在欧几里得空间之间的连续映射的许多结果，在一般度量空间之间的映射中几乎一字不变地保持.

给定映射 $f: X \to Y$，如果 A 是 X 的子集，定义

337

$$f(A) = \{q \in Y \mid \text{对某个 } p \in A, q = f(p)\}.$$

称 $f(A)$ 为集 A 在映射 $f: X \to Y$ 下的象(image). 另外，如果 B 是 Y 的子集，定义

$$f^{-1}(B) = \{p \in X \mid f(p) \in B\},$$

称 $f^{-1}(B)$ 为集 B 在映射 $f: X \to Y$ 下的原象(preimage).

由于 X 与 Y 都是度量空间，序列收敛的概念限定在 X 与 Y 之中. 这自然地引出下列连续性概念.

定义 设 X 和 Y 是度量空间.

(i)映射 $f: X \to Y$ 称为在 X 中点 p 处连续，如果对 X 中任何收敛到 p 的序列 $\{p_k\}$，都有象序列 $\{f(p_k)\}$ 收敛到 $f(p)$.

(ii)映射 $f: X \to Y$ 称为连续的，如果它在 X 中的每一点是连续的.

上述定义推广了在第3章中给出的实变量的实值函数连续性的定义，也推广了在第11章中对欧几里得空间之间映射的连续性的概念.

对于一般度量空间之间的映射 $f: X \to Y$，由于可能没有在集 Y 上定义的加法或乘法，所以考虑映射的和与积没有意义. 然而，对于实值映射，即对于从度量空间到 $\mathbb{R}$ 的映射，存在定理11.3(关于连续映射的和、积与商的连续性)的一个直接推广.

给定度量空间 X 与实值映射 $f, g: X \to \mathbb{R}$，定义积(product) $fg: X \to \mathbb{R}$ 与和(sum) $f+g: X \to \mathbb{R}$ 为:

$$\text{对 } X \text{ 中所有 } p, \quad (fg)(p) \equiv f(p)g(p) \quad \text{及} \quad (f+g)(p) \equiv f(p) + g(p).$$

如果对 X 中所有 p，$g(p) \neq 0$，定义商(quotient) $f/g: X \to \mathbb{R}$ 为:

$$\text{对 } X \text{ 中所有 } p, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(p) \equiv \frac{f(p)}{g(p)}.$$

定理 12.32 设 X 是度量空间，p 是 X 中的点，假定映射 $f: X \to \mathbb{R}$ 与 $g: X \to \mathbb{R}$ 都在点 p 处连续，则对任意实数 α 与 β，函数

$$\alpha f + \beta g: X \to \mathbb{R}$$

在 p 处连续，积

$$f \cdot g: X \to \mathbb{R}$$

在 p 处连续. 此处，若对 X 中所有的 q，$g(q) \neq 0$，则商

$$\frac{f}{g}: X \to \mathbb{R}$$

338

在 p 处连续.

证明 设 $\{p_k\}$ 是 X 中收敛到 p 的序列，由连续的定义可得，实数序列 $\{f(p_k)\}$ 与 $\{g(p_k)\}$ 分别收敛到 $f(p)$ 与 $g(p)$. 根据收敛的实数序列的和、积与商的性质，

$$\lim_{k \to \infty} (f+g)(p_k) = (f+g)(p),$$

$$\lim_{k\to\infty}(fg)(p_k) = (fg)(p),$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(p_k) = \left(\frac{f}{g}\right)(p).$$

这三个等式证明了定理. ■

我们同样有关于连续映射复合的下述定理，它是定理 11.5 的推广.

定理 12.33 *设 X，Y 和 Z 是度量空间，并设 p 是 X 中的点，假设映射 f: $X\to Y$ 在 p 是连续的，而映射 g: $Y\to Z$ 在 $f(p)$ 是连续的，则复合映射 $g\circ f$:$X\to Z$ 在 p 是连续的.*

证明 设 $\{p_k\}$ 是 X 中收敛到 p 的序列，由于映射 f: $X\to Y$ 在 p 连续，故 $\{f(p_k)\}$ 收敛到 $f(p)$. 又因为 $\{f(p_k)\}$ 是 Y 中收敛到 $f(p)$ 的序列且映射 g: $Y\to Z$ 在 $f(p)$ 连续，所以序列 $\{g(f(p_k))\}$ 收敛到 $\{g(f(p))\}$. 于是 $\{(g\circ f)(p_k)\}$ 收敛到 $(g\circ f)(p)$. ■

对于一元实变量的实值函数，我们建立了函数在一点处的连续性的"$\varepsilon-\delta$"准则，该准则等价于序列的收敛性的定义. 对于欧几里得空间之间的映射，这个准则在定理 11.27 中建立. 事实上，正如我们将要证明的，这个"$\varepsilon-\delta$"准则对于一般度量空间之间的映射在一点处的连续性也成立.

定理 12.34 *设 X 与 Y 是度量空间，令 p 是 X 中的一点，考虑映射 f: $X\to Y$，则下列两个论断是等价的:*

(i) 映射 f: $X\to Y$ 在点 p 处是连续的.

(ii) 对每个正数 ε，存在正数 δ 使得对 X 中每个满足 $d(p,q)<\delta$ 的点 q，

$$d(f(p),f(q)) < \varepsilon. \tag{12.20}$$

证明 首先，假定 f: $X\to Y$ 在 p 是连续的. 要验证(12.20)，采用反证法. 如果(12.20)不成立，则必有某个 $\varepsilon_0>0$，使得对任何正数 δ，$f(\mathcal{B}_\delta(p))\subseteq\mathcal{B}_{\varepsilon_0}(f(p))$ 不成立. 特别地，若 k 为正整数，则 $f(\mathcal{B}_{1/k}(p))\subseteq\mathcal{B}_{\varepsilon_0}(f(p))$ 不成立，这意味着在 X 中有一点，记为 p_k，使得 $d(p,p_k)<1/k$，而 $d(f(p),f(p_k))\geqslant\varepsilon_0$. 这就在 X 中定义了序列 $\{p_k\}$，它收敛到 p，但它的象集 $\{f(p_k)\}$ 不收敛到 $f(p)$. 这与映射 f: $X\to Y$ 在点 p 处连续矛盾，所以(12.20)成立. [339]

反之，假定(12.20)成立. 设 $\{p_k\}$ 是 X 中收敛到 p 的序列，要证 $\{f(p_k)\}$ 收敛到 $f(p)$. 令 $\varepsilon>0$，根据(12.20)，可取正数 δ，使得 $f(\mathcal{B}_\delta(p))\subseteq\mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$. 此外，由于序列 $\{p_k\}$ 收敛到 p，可取下标 N，使得若 $k\geqslant N$，则有 p_k 在 $\mathcal{B}_\delta(p)$ 中. 于是若 $k\geqslant N$，则 $f(p_k)$ 在 $\mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$ 中. 从而序列 $\{f(p_k)\}$ 收敛到 $f(p)$. 按定义，这意味着 f: $X\to Y$ 在点 p 是连续的. ■

最后，我们用映射在一点连续的特征给出映射在它的定义域内的连续性准则.

定理 12.35 *设 X 与 Y 是度量空间，考虑映射 f: $X\to Y$，则下列论断是等价的:*

(i) 映射 f: $X\to Y$ 是连续的.

(ii) 每当 V 为 Y 中开集时，$f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集.

证明 首先，假定(i)成立，即映射 f: $X\to Y$ 是连续的. 设 V 是 Y 的开子集，要证明 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 设 p 是 $f^{-1}(V)$ 中的一点，我们必须证明 p 是 $f^{-1}(V)$ 的内点. 但 $f(p)$ 是 V 中的点，而 V 是 Y 中的开集，所以存在某个正数 r，满足 $\mathcal{B}_r(f(p))\subseteq V$. 由于 f: $X\to Y$ 在点 p 是连续的，由定理 12.34 可得，可选取正数 δ，满足 $f(\mathcal{B}_\delta(p))\subseteq\mathcal{B}_r(f(p))\subseteq V$，于是 $\mathcal{B}_\delta(p)\subseteq$

$f^{-1}(V)$，所以 p 是 $f^{-1}(V)$ 的内点. 由于 p 是任意选取的，所以 $f^{-1}(V)$ 中每个点都是内点. 按定义，这意味着 $f^{-1}(V)$ 是开集.

反之，假定(ii)成立. 设 p 是 X 中的点，为证明 $f: X\to Y$ 在 p 连续，运用在定理12.34中所推断的连续性的"$\varepsilon-\delta$"特征，设 $\varepsilon>0$，根据命题12.8，$\mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$ 是 Y 中的开集. 由(ii)可得，$f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(p)))$ 是 X 中的开集，于是 $f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(p)))$ 中的点 p 是 $f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(p)))$ 的内点，所以可以取到正数 δ，满足 $\mathcal{B}_\delta(p)\subseteq f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(p)))$. 这意味着 $f(\mathcal{B}_\delta(p))\subseteq\mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$，于是函数 $f: X\to Y$ 满足在点 p 连续性的"$\varepsilon-\delta$"特征. ■

340

习题

1. 设 X 是度量空间，证明下列不等式：

$$\text{对 } X \text{ 中所有的点 } p,q \text{ 及 } x,\quad |d(p,x)-d(x,q)|\leqslant d(p,q).$$

2. 设 X 是度量空间，p_* 是 X 中的点，定义映射 $f: X\to\mathbb{R}$ 为：

$$\text{对 } X \text{ 中所有的 } p,\quad f(p)=d(p,p_*).$$

用习题1证明 $f: X\to\mathbb{R}$ 是连续的.

3. 设 X 是度量空间，映射 $f: X\to\mathbb{R}$ 是连续的，令 p 是 X 中的点，在该点处 $f(p)>0$. 运用定理12.34证明：存在某个正数 r：使得对 $\mathcal{B}_r(p)$ 中所有的 q，$f(q)>0$.
4. 给定映射 $f: X\to Y$ 以及 X 的子集 Z，$f: X\to Y$ 对 Z 的限制(restriction)是函数 $g: Z\to Y$，此函数定义为 $g(x)=f(x)(x\in Z)$. 虽然当 $X\neq Z$ 时. $f: X\to Y$ 与 $g: Z\to Y$ 是不同的函数，但是习惯上用 $f: Z\to Y$ 表示 $g: Z\to Y$. 给出这样的函数 $f: X\to Y$ 的例子：Z 为 X 的子空间，而 p 为 Z 中的点，使得 $f: X\to Y$ 在 p 是不连续的而 $f: Z\to Y$ 在 p 是连续的.
5. 设 X 和 Y 是度量空间且设 p 是 X 中的点，证明：映射在 p 连续当且仅当存在 p 在 X 中的开球 $\mathcal{B}_r(p)$，使得 $f: \mathcal{B}_r(p)\to Y$ 在 p 是连续的. 将这些结果与习题4的结果加以比较.
6. 假定 X 是度量空间而映射 $f: \mathbb{R}\to X$ 是连续映射，设 C 是 X 的闭子集，再设若 x 为有理数，则 $f(x)\in C$. 证明 $f(\mathbb{R})\subseteq C$.
7. 设 X 与 Y 是度量空间，并假定映射 $f: X\to Y$ 是连续的. 若 $\mathcal{O}$ 是 X 中的开集，则 $f(\mathcal{O})$ 是 Y 中的开集吗？
8. 设 X 与 Y 是度量空间，证明：$f: X\to Y$ 是连续的当且仅当 C 是 Y 中闭集时 $f^{-1}(C)$ 是 X 中的闭集.
9. 设 X 是度量空间，X 的子集 D 称为在 X 中稠密(dense)，如果 X 中每一点是 D 中序列的极限. 把作为在度量空间 $C([a,b],\mathbb{R})$ 中稠密这一论断的魏尔斯特拉斯逼近定理用公式表示出来.
10. 设 $X=C([a,b],\mathbb{R})$，定义函数 $\psi: X\to\mathbb{R}$ 为：

$$\text{对 } X \text{ 中每个 } f,\quad \psi(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

341

   a. 证明：对 X 中所有的 f 和 g，$|\psi(f)-\psi(g)|\leqslant(b-a)d(f,g)$.
   b. 用上述不等式验证 $\psi: X\to\mathbb{R}$ 是连续的.

12.5 列紧性与连通性

我们定义了欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集是列紧的，也建立了在 $\mathbb{R}^n$ 的列紧子集上连续的实值函数的极值定理，即定理11.22. 在11.4节，定义了欧几里得空间的子集是连通的，并描述了验证连通性的某些准则. 另外，还把介值定理推广到 n 维欧几里得空间连通子集上连续的实数值函数的情形. 对于一般的度量空间，存在着列紧性与连通性的直接的推广，本节就将讨论这些

内容.

定义 度量空间 X 称为**列紧的**(sequentially compact)，如果 X 中每个子序列收敛到 X 中一点.

这延伸了在 11.2 节中当 X 是$\mathbb{R}^n$ 的子空间时所给出的列紧性的定义. 极值定理推广到列紧度量空间上连续的实数值函数时，正如我们将要看到的，一般结果的证明与对欧几里得空间的列紧子空间的证明几乎一样.

命题 12.36 设 X 和 Y 是度量空间，假定映射 f: $X\to Y$ 是连续的，如果 X 是列紧集，则 $f(X)$ 也是列紧集.

证明 设$\{p_k\}$是$f(X)$中的序列，对每个自然数 k，令 q_k 是 X 中的点，满足 $p_k=f(q_k)$. 由于 X 是列紧集，在 X 中存在子序列$\{q_{k_j}\}$，它收敛到某个点 q. 映射f: $X\to Y$ 在点 q 是连续的，于是象序列$\{p_{k_j}\}=\{f(q_{k_j})\}$收敛到$f(X)$中的点$f(q)$. 因此$f(X)$中每个子序列收敛到$f(X)$中一点. 根据定义，这意味着$f(X)$是列紧集. ■

定理 12.37(极值定理) 设 X 是非空列紧度量空间，且设函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 是连续的，则 f: $X\to\mathbb{R}$ 在 X 上取到最小值和最大值.

证明 由前面的命题可得$f(X)$是列紧集，然而，引理 11.21 断定$\mathbb{R}$ 的非空列紧子集有最大值和最小值. ■

对$\mathbb{R}^n$ 的子空间 X，定理 11.18(列紧定理)断定 X 是列紧集当且仅当 X 是$\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集. 对于一般的度量空间没有这种简单的列紧性的特征. 特别地，如下例所示，$C([a, b], \mathbb{R})$的有界闭子集未必是列紧集. [342]

例 12.38 设 K 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$的子集，由所有如下的连续函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ 组成：

$$\text{对}[0,1]\text{中所有 } x, \quad |f(x)|\leqslant 1.$$

把验证 K 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$的有界闭子集留给读者作为练习. 然而，K 不是列紧度量空间，为此，有必要在 K 中求具有如下性质的序列：它没有一致收敛到 K 中某个函数的子序列. 对每个正整数 k，定义函数f_k: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ 为：

$$\text{对}[0,1]\text{中的 } x, \quad f_k(x) = x^k.$$

定义函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ 为：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } 0\leqslant x < 1 \\ 1 & \text{若 } x = 1. \end{cases}$$

由于若 $0\leqslant x<1$，$\lim_{k\to\infty} x^k=0$，则可得序列$\{f_k$: $[0, 1]\to\mathbb{R}\}$逐点收敛到函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$. 于是$\{f_k$: $[0, 1]\to\mathbb{R}\}$的每个子序列也逐点收敛到函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$，但函数f: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ 是不连续的，于是它不在 K 中，因而在度量空间 $C([0, 1], \mathbb{R})$中，$\{f_k$: $[0, 1]\to\mathbb{R}\}$不存在收敛(因而，一致收敛)到 K 中某个函数的子序列. ■

有一个定理(称为阿尔泽拉-阿斯科利(Arzela-Ascoli)定理)描述了 $C([0, 1], \mathbb{R})$的列紧子空间的特征. 但是该定理超出了本书的范围[⊖]

⊖ 由 George F. Simmons 所著的杰出著作《Introduction to Topology and Modern Analysis》(New York: McGraw-Hill, 1963)对此及有关材料有清晰的讨论.

定义 度量空间 X 称为有介值性质，如果每个连续函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 有一个区间为它的象.

定理 11.36 断定$\mathbb{R}^n$ 的子集有介值性质当且仅当它是连通的. 下面将描述具有介值性质的一般的度量空间的特征，这相当于要对一般度量空间发现与连通性相近的概念.

343 **定义** 设 X 是度量空间，$\mathcal{U}$和$\mathcal{V}$是 X 的开子集. $\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$称为**分离**(Separate)X，如果

$\mathcal{U}$和$\mathcal{V}$非空，

$$\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=X,$$

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing.$$

定义 度量空间 X 称为连通的，如果不存在 X 的两个开子集，它们分离 X.

下面的定理证明引进连通性概念是正确的.

定理 12.39 度量空间 X 是连通的当且仅当它有介值性质.

证明 首先，假定度量空间 X 是连通的，下面证明 X 有介值性质. 事实上，设 f: $X\to\mathbb{R}$ 是连续的，为证明象 $f(X)$ 是区间，采用反证法. 事实上，如果 $f(X)$ 不是区间，则必存在实数 c 及 X 中的点 u 与 v，使得

$$f(u)<c<f(v),$$

而 c 不在 $f(X)$ 中. 定义

$$X_1=f^{-1}(-\infty,c) \quad 及 \quad X_2=f^{-1}(c,\infty).$$

由于$(-\infty, c)$与(c, ∞)都是$\mathbb{R}$ 的开子集，而函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 是连续的，由定理 12.35 可得，X_1 与 X_2 都是 X 的开子集. 注意到，由于 u 属于 X_1 及 v 属于 X_2，所以 X_1 与 X_2 都非空. 此外，由于 c 不在 $f(X)$ 中，故 $X=X_1\cup X_2$. 显然，X_1 与 X_2 是不相交的. 于是 X_1 与 X_2 分离度量空间 X，而这与 X 是连通的假定矛盾，这个矛盾表明 X 有介值性质.

反之，假定每个连续函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 有介值性质，用反证法证明 X 是连通的，假设 X 不是连通的. 则存在 X 的一对开子集$\mathcal{U}$和$\mathcal{V}$分离 X. 定义函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 为：

$$f(p)=\begin{cases}0 & 若\ p\in\mathcal{U}\\ 1 & 若\ p\in\mathcal{V}.\end{cases}$$

则函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 肯定没有介值性质，因为它只取两个函数值——0 和 1. 还可断定函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 是连续的. 为说明这点，根据定理 12.35，只要验证$\mathbb{R}$ 的开子集在 f: $X\to\mathbb{R}$ 之下的逆象是 X 中的开集就够了. 但由函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 的定义知，$\mathbb{R}$ 的任意子集的逆象为 ϕ，X，$\mathcal{U}$或$\mathcal{V}$，于是它肯定是开集. 象不是区间这样的连续函数的存在与 X 有介值性质的假设相矛盾，所以 X 必是连通的. ■

344

上面给出的连通的度量空间的定义形式上与在 11.4 节中给出的$\mathbb{R}^n$ 的连通子集的定义不同. 然而，这两个定义又是等价的. 这可以从它们之中的每一个都与介值性质等价看出，而且也可以用直接的论证得出这一结论. 为理解这个直接的论证，在本章最后简要讨论开的与闭的相对的概念.

假定 Y 是度量空间且 X 是 Y 的子集，考虑 X 的子集 A，当然，A 也是 Y 的子集. 现在把 A 看作是 X 的子集，我们可以问在度量空间 X 中，A 是否为开集. 另一方面，把 A 看作是 Y 的子集，可以问在度量空间 Y 中，A 是否为开集. 一般地，这两个问题的答案是不同的，如下例所

示. 开集性的概念是相对的(relative), 它依赖于环绕度量空间的指定.

例 12.40 设 $Y=\mathbb{R}$ 及 $X=[0, 1]$, 则 $A=(1/2, 1]$不是度量空间 Y 的开子集, 因为1在 Y 中的每个开球包含了不在$(1/2, 1]$中的点. 另一方面, $(1/2, 1]$在度量空间 X 中是开集, 因为如果 $0<r<1/2$, 则$\{x\in X \mid d(x, 1)<r\}=(1-r, 1]\subseteq(1/2, 1]$. ■

下面的定理, 在度量空间 X 是度量空间 Y 的子空间的情况下, 根据 Y 的开子集描述了 X 的开子集.

定理 12.41 设 X 是度量空间 Y 的子空间, A 是 X 的子集, 则 A 在 X 中是开集当且仅当 $A=X\cap\mathcal{O}$, 其中$\mathcal{O}$是 Y 中的开集.

证明 首先, 假定 A 在 X 中是开集, 设 p 是 A 中一点, 则 X 中存在 p 的一个开球, 它包含在 X 中, 也就是存在正数 $r=r(p)$, 使得

$$\{q \in X \mid d(p,q) < r\} \subseteq A. \tag{12.21}$$

Y 中点 p 的半径为 r 的开球是 Y 的开子集, 于是当 p 在 A 中变动时, 所有这些开球的并集也是 Y 的开子集, 即

$$\mathcal{O}=\bigcup_{p\in A}\{q \in Y \mid d(q,p) < r\}$$

是 Y 的开子集. 从式(12.21)显然可得 $A=X\cap\mathcal{O}$.

反之, 假定 $A=X\cap\mathcal{O}$, 其中$\mathcal{O}$是 Y 的开子集, 设 p 是 A 中的一点, 则 p 也属于$\mathcal{O}$, 因此 p 相对于 Y 来说是$\mathcal{O}$的一个内点. 于是可选取正数 r, 满足$\{q\in Y \mid d(q, p)<r\}\subseteq\mathcal{O}$, 从而$\{q\in X \mid d(q, p)<r\}\subseteq X\cap\mathcal{O}=A$. 于是 p 相对于 X 来说是 A 的一个内点, 这样 A 中每个点是 A 的相对于 X 的内点. 按定义, 这意味着 A 在 X 中是开集. ■ 345

从上述定理立即可得, 在11.4节中对 n 维欧几里得空间的子空间引入的连通性概念与在本节给出的连通性的一般定义是一致的.

如下面的例子所说明的, 闭集性也是一个相对的概念.

例 12.42 设 $Y=\mathbb{R}$ 且 $X=(0, 2]$, 考虑集 $A=(0, 1]$, 则 A 不是度量空间 Y 的闭子集, 因为序列$\{1/2k\}$是 A 中的序列, 它收敛到 Y 中的一点但这点不在 A 中. 而且 A 是度量空间 X 的闭子集, 这是因为若 A 中的序列收敛到 X 中的某一点, 则该点必在 A 中. ■

运用余集准则及定理12.41可以证明, 如果度量空间 X 是度量空间 Y 的子空间, 则 X 的子集 A 是 X 中的闭集当且仅当存在 Y 的闭子集 C, 使得 $A=X\cap C$(见习题8).

习题

1. 设 X 是列紧度量空间, 证明 X 的子空间 K 是列紧的当且仅当 K 是 X 的闭子集.
2. 设 X 是度量空间, 且设 $K\subseteq X$ 是列紧子空间, 令 p 是 $X\setminus K$ 中的一点. 证明: 在 K 中存在点 q_0, 它是 K 的所有点中在如下意义下最靠近 p 的点:

   $$\text{对 } K \text{ 中所有的点 } q,\quad d(p,q_0)\leqslant d(p,q).$$

   (提示: 定义函数f: $K\to\mathbb{R}$ 为, 对 K 中所有 q, $f(q)=d(q, p)$. 证明f: $K\to\mathbb{R}$ 是连续的.)这个点是唯一的吗?
3. 证明: 如果 X 是度量空间且$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$是 X 的两个开子集, 它们分离 X, 那么$\mathcal{U}$与$\mathcal{V}$也都是 X 中的闭集.
4. 证明: 度量空间 X 是不连通的当且仅当存在 X 的一个子集 D, 满足 $D\neq\varnothing$ 且 $D\neq X$, 而 D 在 X 中既是开的又

是闭的.

5. 设 X 是列紧度量空间. 证明：X 是不连通的当且仅存在 X 的非空子集 A 与 B 及正数 ε，满足 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=X$ 及

$$\text{对 } A \text{ 中所有的 } p \text{ 与 } B \text{ 中所有的 } q, d(p,q) > \varepsilon.$$

列紧性是必要的吗?

6. 设 X 是度量空间，对每个正整数 k，设 F_k 是 X 的非空列紧子空间，假定 $F_{k+1}\subseteq F_k$. 证明交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ 是非空的.（提示：对每个正整数 k，在 F_k 中选一点 p_k，序列 $\{p_k\}$ 的一个子序列收敛到 X 中一点 p. p 位于何处?）

7. 用定理 12.41 直接证明：对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 X，在本节给出的连通性的一般定义与在 11.4 节给出的定义是一致的.

346

8. 运用余集准则与定理 12.41 证明：如果度量空间 X 是度量空间 Y 的子空间，则 X 的子集 A 是 X 中的闭集当且仅当存在 Y 的一个闭子集 C，使得 $A=X\cap C$.

9. 度量空间 X 称为顺向连通的，如果对 X 中的任意两个点 p 及 q，存在连续函数 γ: $[0,1]\to X$，使得 $\gamma(0)=p$ 及 $\gamma(1)=q$.
   a. 证明：顺向连通的度量空间有介值性质.（提示：仿效 11.3 节的证明.）
   b. 证明：顺向连通的度量空间是连通的.

10. 我们定义过 $\mathbb{R}^n$ 的子集 X 是凸的，做以下的练习：
    a. 给出 $C([a,b],\mathbb{R})$ 的子集 X 是凸集的定义.
    b. 证明：$C([a,b],\mathbb{R})$ 的凸子集是顺向连通的.
    c. 证明：$C([a,b],\mathbb{R})$ 中的开球是凸的.
    d. 证明：$C([a,b],\mathbb{R})$ 中的开球是连通的.

11. 假定 X 是由不止一个点所组成的集合，且是具有离散度量的度量空间. 证明：X 是不连通的.

12. 设 X 是列紧度量空间，定义 $C(X,\mathbb{R})$ 是所有连续函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 的集合，对于 $C(X,\mathbb{R})$ 中两个函数 f 与 g，定义

347

$$d(f,g) = \max\{\,|f(p)-g(p)|\;\big|\;p\in X\}.$$

证明：d 在 $C(X,\mathbb{R})$ 上定义了一个度量.

第 13 章　多元函数的微分

13.1　极限

对实数的开区间 I，函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 定义为在 I 中点 x_* 可微的，如果极限

$$\lim_{x\to x_*}\frac{f(x)-f(x_*)}{x-x_*} \tag{13.1}$$

存在，这个极限称为函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在点 x_* 的导数，用 $f'(x_*)$ 表示. 此外，如果函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 I 中的每一点是可微的，则函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 称为是可微的而函数 $f':I\to\mathbb{R}$ 称为函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 的导数. 函数与它的导数之间的关系的研究是一元实变量的实值函数分析中的重要主题之一.

在本章将研究多元实变量的实值函数微分法，并将把前面对一元函数所得到的许多结果推广到多元实变量函数的情形中. 本节从推广集合的极限点的定义和函数极限的定义到多元情形开始.

给定$\mathbb{R}^n$ 的一个子集 A 及$\mathbb{R}^n$ 中的一点 $\mathbf{x}_*$，回忆 $A\setminus\{\mathbf{x}_*\}$ 表示集 $\{\mathbf{x}\in A\mid \mathbf{x}\neq\mathbf{x}_*\}$. 特别地，若 $\mathbf{x}_*$ 不属于 A，则 $A\setminus\{\mathbf{x}_*\}=A$.

定义　设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，$\mathbf{x}_*$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的一点，$\mathbf{x}_*$ 称为集合 A 的**极限点**(limit point)，如果在 $A\setminus\{\mathbf{x}_*\}$ 中存在收敛到 $\mathbf{x}_*$ 的序列.

定义　设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，$\mathbf{x}_*$ 是 A 的极限点，给定函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 及实数 ℓ，记

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}f(\mathbf{x})=\ell, \tag{13.2}$$

348

如果只要 $\{\mathbf{x}_k\}$ 是 $A\setminus\{\mathbf{x}_*\}$ 中收敛到 $\mathbf{x}_*$ 的序列，就有象序列 $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ 收敛到 ℓ.

把(13.2)读作“当 $\mathbf{x}$ 趋近 $\mathbf{x}_*$ 时，$f(\mathbf{x})$ 的极限等于 ℓ”.

正如在一元实变量的实值函数的情形，容易看到，如果 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集而 $\mathbf{x}_*$ 是 A 的极限点，而且也属于 A，则函数 $f:A\to\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbf{x}_*$ 连续当且仅当

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_*). \tag{13.3}$$

然而，在 11.1 节我们研究了多元连续函数，所以鉴于连续性与(13.3)的等价性，我们已经有许多可供使用的分析极限的方法.

例 13.1　考虑$\mathbb{R}^2$ 中的点(1，2)，则有

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left[x^2y+\mathrm{e}^{xy+1}\right]=2+\mathrm{e}^3.$$

这可从如下事实推出：由

$$f(x,y)=x^2y+\mathrm{e}^{xy+1},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

定义的函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 已被证明是连续函数.

例 13.2 设 $\boldsymbol{x}_*$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，则

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}_*\|.$$

这可以从如下事实推出：由

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

定义的函数$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 已被证明是连续函数. ■

下面的定理可通过运用收敛的实数序列的和、积及商性质从极限的定义直接得到，证明留作习题.

定理 13.3 *设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，$\boldsymbol{x}_*$ 是 A 的极限点，假定函数$f:A \to \mathbb{R}$ 及 $g: A\to\mathbb{R}$ 与实数 ℓ_1 及 ℓ_2 有如下性质：*

349

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} f(\boldsymbol{x}) = \ell_1 \quad 及 \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} g(\boldsymbol{x}) = \ell_2.$$

那么

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} [f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})] = \ell_1 + \ell_2, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} [f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})] = \ell_1\ell_2,$$

并且如果对 A 中所有 $\boldsymbol{x}$，$g(\boldsymbol{x})\neq 0$ 且 $\ell_2\neq 0$，则

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} [f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})] = \ell_1/\ell_2.$$ ■

数学分析中许多问题有趣但难以捉摸的特征之一是必须研究

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} [f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})]$$

的商在条件

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad 及 \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} g(\boldsymbol{x}) = 0$$

下的极限.

这样的极限频繁出现. 例如，如果$f:I \to \mathbb{R}$ 在点 x_* 连续，则极限(13.1)就是这种形式的极限，它正是单实变量函数导数的定义，这种形式的极限也出现在多元实变量函数的研究中. 为彻底地弄懂如何处理这种极限，有必要研究多元实变量函数的微分法，在本章随后的几节将对此进行研究. 下面考虑几个这种类型极限的例子.

例 13.4 设(x_0, y_0)是平面$\mathbb{R}^2$ 中的点. 考虑极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{13.4}$$

如果$(x, y)\neq(0, 0)$，定义$f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. 由于多项式是连续的，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = x_0y_0 \text{ 及 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

所以，如果$(x_0, y_0)\neq(0, 0)$，可得

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x_0y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

但如果$(x_0, y_0) = (0, 0)$，则极限(13.4)不存在，为看出这一点，首先注意，序列$\{(1/k, 1/k)\}$收敛到点$(0, 0)$，而由于对每个自然数 k，$f(1/k, 1/k) = 1/2$，可得象序列$\{f(1/k, 1/k)\}$收敛到

1/2. 另一方面，序列$\{(1/k, 0)\}$也收敛到点$(0, 0)$，而由于对每个自然数k，$f(1/k, 0)=0$，可得象序列$\{f(1/k, 0)\}$收敛到0. 因此，如果$(x_0, y_0)=(0, 0)$，极限(13.4)不存在. ■ [350]

例 13.5 考虑下面的极限：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}. \tag{13.5}$$

如果$(x, y)\neq(0, 0)$，定义$f(x, y)=x^3/(x^2+y^2)$. 由于注意到，序列$\{(0, 1/k)\}$收敛到$(0, 0)$，而对于每个下标k，$f(0, 1/k)=0$，可见唯一可能的极限值是0. 为验证极限确实是0，有必要估计$f(x, y)$的大小，事实上，如果$x\neq 0$，则

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x^3}{x^2}\right| = |x|,$$

$$\text{如果}(x,y)\neq(0,0),\quad \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x|.$$

因为当$x=0$而$y\neq 0$时这个估计式显然成立. 所以现假设序列$\{(x_k, y_k)\}$收敛到$(0, 0)$，其中每个$(x_k, y_k)\neq(0, 0)$，则序列$\{x_k\}$收敛到0，所以由上述估计及收敛序列的比较引理可以推出，象序列$\{f(x_k, y_k)\}$收敛到0，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$ ■

例 13.6 我们断言：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1. \tag{13.6}$$

为验证这一点，设序列$\{(x_k, y_k)\}$收敛到$(0, 0)$，其中$(x_k, y_k)\neq(0, 0)$. 对每个k，定义$t_k=x_k^2+y_k^2$. 注意，$\{t_k\}$是收敛到0的非零实数序列，由于$\sin 0=0$、正弦的导数是余弦及$\cos 0=1$，故可得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x_k^2+y_k^2)}{x_k^2+y_k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(t_k)-\sin 0}{t_k-0} = 1.$$

这就证明了(13.6). ■

定理 11.11 给出了映射在一点上的连续性的定义与在一点上的连续性的$\varepsilon-\delta$准则之间的等价性. 对于极限有下面类似的等价的$\varepsilon-\delta$准则，它的证明留作习题. [351]

定理 13.7 设A是$\mathbb{R}^n$的子集，$\boldsymbol{x}_*$是A的极限点，对于函数$f:A\to\mathbb{R}$及实数ℓ，下面的两个推断是等价的：

(i) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_*} f(\boldsymbol{x})=\ell$，即当$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$A\setminus\{\boldsymbol{x}_*\}$中的序列时，

$$\text{如果}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_*,\quad \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k)=\ell.$$

(ii) 对每个正数ε，存在正数δ，使得

$$\text{如果}\ \boldsymbol{x}\ \text{在}\ A\ \text{中且}\ 0<\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_*)<\delta,\ \text{则}\ |f(\boldsymbol{x})-\ell|<\varepsilon.$$

习题

1. 证明：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^2+y^4}=0.$$

2. 分析下面的极限：

a. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$; **b.** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t^2}{t}$.

3. 分析下面的极限：

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x^2+y^2}$; **b.** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$; **c.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$.

4. 设 m 和 n 是自然数，证明：极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^ny^m}{x^2+y^2}$$

存在当且仅当 $m+n>2$.

5. 试举一例：A 是$\mathbb{R}$ 的子集，x 是 A 中的一点，但 x 不是 A 的极限点 .

6. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集且 $\mathbf{x}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点 . 证明：$\mathbf{x}$ 是 A 的极限点当且仅当围绕 $\mathbf{x}$ 的每个开球包含 A 的不等于 $\mathbf{x}$ 的点 .

7. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\mathbf{x}_*$ 是 A 的极限点 . 假定函数 g：$A\to\mathbb{R}$ 有界，即存在数 c 使得

352

$$\text{对 } A \text{ 中所有 } \mathbf{x},\quad |g(\mathbf{x})|\leqslant c.$$

证明：如果 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}f(\mathbf{x})=0$，则 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}[g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})]=0$.

8. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，由

$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \text{若 } \mathbf{x}\in A\\ 0 & \text{若 } \mathbf{x}\notin A\end{cases}$$

定义的函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$称为 A 的特征函数(characteristic function). 设 $\mathbf{x}_*$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，证明：$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}f(\mathbf{x})$存在当且仅当 $\mathbf{x}_*$ 或者是 A 的内点或者是 A 的外点 .

9. 试举一例：函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}f(\mathbf{x})=0$ 但$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\neq 0$.

10. 对函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 及自然数 m，证明：

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^{m+1}=0\quad\text{蕴涵}\quad\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^{m}=0,$$

但反之不成立 .

11. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，假定 $\mathbf{0}$ 是 A 的极限点，假定函数$f:A\to\mathbb{R}$ 有如下性质：存在正数 c 使得

$$\text{对 } A \text{ 中所有的 } \mathbf{x},\quad f(\mathbf{x})\geqslant c\|\mathbf{x}\|^2,$$

而函数 g：$A\to\mathbb{R}$ 有如下性质：

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}g(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^2=0.$$

证明：存在正数 r，使得对 A 中所有满足 $0<\|\mathbf{x}\|<r$ 的 $\mathbf{x}$，

$$f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})\geqslant(c/2)\|\mathbf{x}\|^2.$$

12. 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的子集 . 证明：A 是闭集当且仅当 A 包含它的所有极限点.

13. 设 A 与 B 是$\mathbb{R}^n$ 的子集，满足 $A\subseteq B$，假定$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\mathbf{x}_*$ 是 A 的极限点. 给定函数f：$B\to\mathbb{R}$，定义它在集 A 的限制是如下定义的函数$\bar{f}$：$A\to\mathbb{R}$：对 A 中所有 $\mathbf{x}$，$\bar{f}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$，试举出一个函数的例子，满足 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}\bar{f}(\mathbf{x})$ 存在，但 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*}f(\mathbf{x})$不存在. （注意：通常，为符号简明起见，函数$\bar{f}$：$A\to\mathbb{R}$ 用$f:A\to\mathbb{R}$ 表示，但为区分这

两个极限，还是需要用新的符号.）

13.2 偏导数

考虑多元实变量实值函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$. 假定要比较 $f(\boldsymbol{u})$ 与 $f(\boldsymbol{v})$. 当 $n=1$ 且函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可微时，可用中值定理来比较这两个函数值. 当 $n>1$ 时，自然有下列限制步骤. 考虑从 $\boldsymbol{u}$ 到 $\boldsymbol{v}$ 的参数化段，即如下定义的参数化路径 $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$：

353

$$\text{对 } 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \gamma(t) = \boldsymbol{u} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = t\boldsymbol{v} + (1-t)\boldsymbol{u}.$$

然后考虑函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 与这个参数化路径的复合，也就是由

$$\psi(t) = f(\boldsymbol{u} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{13.7}$$

定义的函数 $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$，于是 $\psi(0) = f(\boldsymbol{u})$ 及 $\psi(1) = f(\boldsymbol{v})$. 这样比较 $f(\boldsymbol{u})$ 与 $f(\boldsymbol{v})$ 就是比较 $\psi(0)$ 与 $\psi(1)$. 如果可以确定 $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是连续的且 $\psi\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ 是可微的，那么可应用单变量函数的中值定理比较 $f(\boldsymbol{u})$ 与 $f(\boldsymbol{v})$. 因而必需研究函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的性质，这些性质将使我们能够推出上述辅助函数 $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是连续的，推出 $\psi\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ 是可微的，并且可计算 $\psi'\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$.

可以把上述函数 $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ 看作是函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的线段以及这条线段上的坐标系的设置的限制. 在 $n=2$ 的情形下，$\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ 的图形由 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的图形与平行于 z 轴且包含连接 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的线段的平面相交得到. 由于这个原因，称函数 $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ 为函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的截面(section). 如图 13.1 所示.

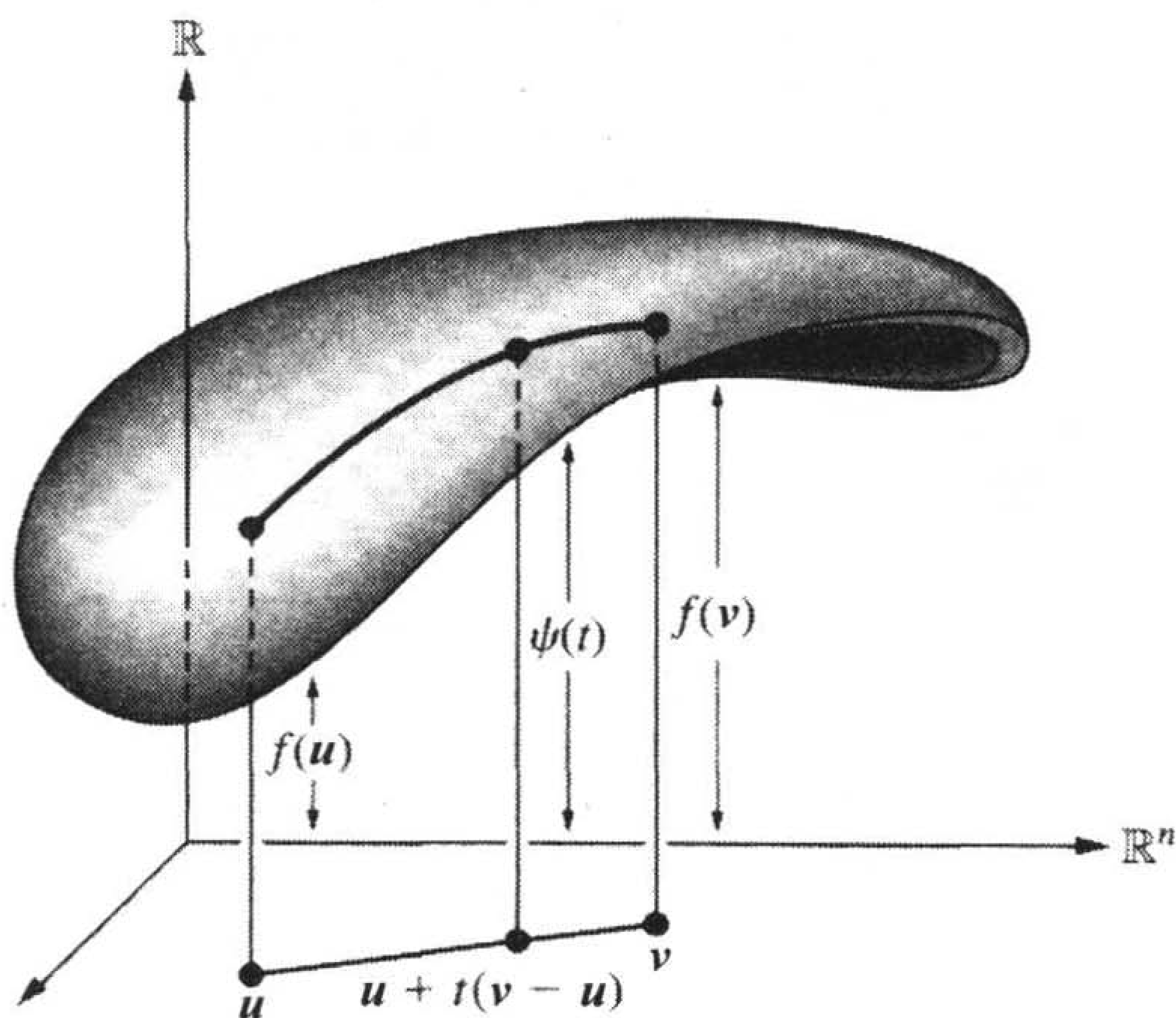


图 13.1 $f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u}) = \psi(1) - \psi(0)$

为分析函数 $\psi\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ 在点 t_0 处的可微性，令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + t_0(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ 及 $s = t - t_0$，变量替换得

$$\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{x})}{s},$$

因此，如果极限存在，就有

$$\psi'(t_0) = \lim_{s\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})}{s}. \tag{13.8}$$

354 作为考察函数的截面以及公式(13.8)的对策，促使引入下面的偏导数概念.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\boldsymbol{x}$的开子集且设$i(1\leqslant i\leqslant n)$为下标. 函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$称为在点$\boldsymbol{x}$有关于它的第$i$分量的偏导数，如果

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{t}$$

存在. 如果这个极限存在，用$\partial f/\partial x_i(\boldsymbol{x})$表示它的值，并称它为$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$\boldsymbol{x}$关于第$i$个分量的偏导数.

$\partial f/\partial x_i(\boldsymbol{x})$的几何意义如下：选择正数$r$，使得开球$\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$之中，并考虑由

$$\psi(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i), \quad |t| < r$$

定义的截面(如图 13.2 所示). 那么如果这个截面在对应于$t=0$的图形上的点有这个切面图形的一条切线，而这个切线在这个点的斜率是

$$\psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$

则f: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点x存在对它的第i个分量的偏导数.

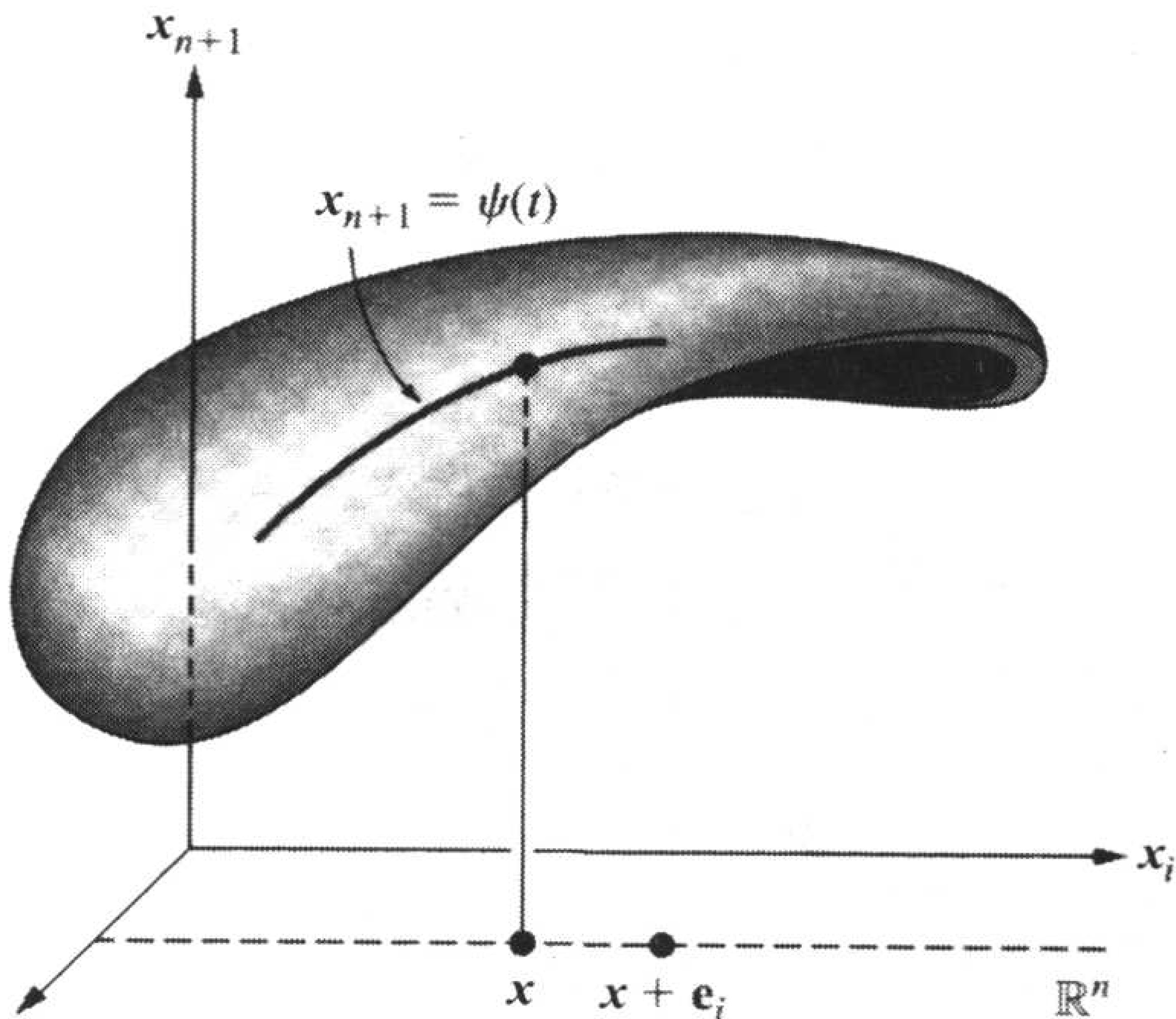


图 13.2 $\psi(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)$

因而$\partial f/\partial x_i(\boldsymbol{x})$的存在性等价于一元实变量函数的可微性，所以可直接使用一元微分法结果获得偏导数的加法、积及商的法则.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集. 则函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$称为有一阶偏导数，如果对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，

355 函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$\mathcal{O}$中的每个点有关于它的第$i$个分量的偏导数.

显然，对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，第$i$个分量射影函数

$$p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

有一阶偏导数，并且如果$j(1\leqslant j\leqslant n)$是下标，$\boldsymbol{x}$是$\mathbb{R}^n$中任意点，则

$$\partial p_i/\partial x_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & 若\ i = j \\ 0 & 若\ i \neq j. \end{cases}$$

于是射影函数的和、积以及适当的商有一阶偏导数. 这意味着以分量为变量的多项式商，如果其分母非零，则定义了有一阶偏导数的函数.

自然地，如果$\mathbb{R}^n$ 的点未用下标记号描述其分量，那么在偏导数的记号中要作相应的改变. 例如，如果给定函数f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，而$\mathbb{R}^3$ 中的点记为(x, y, z)，则$\partial f/\partial y(x_0, y_0, z_0)$表示$f$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 在点(x_0, y_0, z_0)处关于第二个分量的偏导数. 类似地，如果给定函数f: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ 而$\mathbb{R}^4$ 中的点记为(u, v, ω, t)，则$\partial f/\partial t(u_0, v_0, \omega_0, t_0)$表示$f$: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ 在点$(u_0, v_0, \omega_0, t_0)$处关于第四个分量的偏导数.

例 13.8 定义

$$f(x,y,z) = xyz + e^{xy^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

我们正式地验证函数f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 在$\mathbb{R}^3$ 的每一点有关于第二个分量的偏导数. 选择$\mathbb{R}^3$ 中的点(x_0, y_0, z_0). 由于对每个实数t,

$$(x_0,y_0,z_0) + t\boldsymbol{e}_2 = (x_0,y_0 + t,z_0),$$

需要证明

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0 + t,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，这正好是固定分量x_0及z_0，定义$g(y) = x_0yz_0 + e^{x_0y^2}(y\in\mathbb{R})$，并计算$g'(y_0)$. 于是

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = g'(y_0) = x_0z_0 + 2y_0x_0e^{x_0y_0^2}.$$

■

上面的例子描述了实际计算具体的一阶偏导数的一般方法.

命题4.5断定，如果I是实数的开区间且函数$f:I\to\mathbb{R}$在I中点x处是可微的，则函数$f:I\to\mathbb{R}$在点x处也是连续的. 这个论断通常表述为“可微性蕴涵连续性”. 它的证明很直接：如果$h\neq 0$ 且点$x+h\in I$，将差式$f(x+h)-f(x)$写成 [356]

$$f(x + h) - f(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\cdot h,$$

由极限的积规则,

$$\lim_{h\to 0}[f(x + h) - f(x)] = f'(x)\cdot 0 = 0.$$

于是函数$f:I\to\mathbb{R}$ 在点x处连续.

在一元实变量函数与多元实变量函数之间存在一个重要的差别. 对$n>1$，函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数但不需要是连续的. 下面的例子表明会发生这种情况.

例 13.9 定义

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & 若(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & 若(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

对$(x, y)\neq(0, 0)$，存在(x, y)的邻域，在此邻域上$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 的限制是多项式的商，其分母不会变为零，因而$\partial f/\partial x(x, y)$及$\partial f/\partial y(x, y)$存在，此外，简短的计算给出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad 及 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

另一方面，在$(x, y)=(0, 0)=\mathbf{0}$，注意到对每个数t，

$$f(\mathbf{0}+t\boldsymbol{e}_1)=f(t,0)=0,$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{0}+t\boldsymbol{e}_1)-f(\mathbf{0})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0.$$

类似的计算表明$\partial f/\partial y(0, 0)=0$. 因而函数$f$在$\mathbb{R}^2$平面中的每一点处都有一阶偏导数. 而这个函数在点$\mathbf{0}$处不连续. 因为序列$\{(1/k, 1/k)\}$收敛到$(0, 0)$而对每个$k$, $f(1/k, 1/k)=1/2$，所以象序列$\{f(1/k, 1/k)\}$收敛到$1/2$. 但$1/2\neq f(0, 0)$，所以函数f在点$(0, 0)$不连续. ■

但事情往往不像上述例子所示的那么坏. 下面将证明如果$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，且函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有一阶偏导数，如果另外假定对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$, $\partial f/\partial x_i$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的，那么可得到单变量理论的基本结果. 由于这附加的假定在后面将有重要作用，于是用下面的定义把它单独提出来.

357

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集. 函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$称为连续可微的，如果它有一阶偏导数，满足对$1\leqslant i\leqslant n$，每个偏导数$\partial f/\partial x_i$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的.

通过计算例 13.8 中所定义的函数f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$的每一个一阶偏导数，可知该函数是连续可微的. 在例 13.9 中所定义的函数f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$不是连续可微的，因为它的两个一阶偏导数在点$(0, 0)$处都不连续(见习题 3).

下面讨论二阶偏导数. 给定$\mathbb{R}^n$的开子集$\mathcal{O}$及下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，如果函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$\mathcal{O}$中每个点关于它的第$i$个分量有偏导数，则函数$\partial f/\partial x_i$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有定义而我们可能问这个新函数本身是否有一阶偏导数. 固定下标$j(1\leqslant j\leqslant n)$. 如果函数$\partial f/\partial x_i$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$\mathcal{O}$中点$\boldsymbol{x}$处关于它的第j个分量有偏导数，则用

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \quad 表示 \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\boldsymbol{x}).$$

自然当$n=2$或3两点不用下标标记时，我们用更具示意性的记号表示二阶偏导数，例如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\quad 等等.$$

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，考虑函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$.

(i) 函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$称为有二阶偏导数，如果它有一阶偏导数且对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，函数$\partial f/\partial x_i$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$也有一阶偏导数.

(ii) 函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$称为有连续二阶偏导数，如果它有二阶偏导数且对每一对下标i及j，其中$1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$，函数$\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的.

结果是每个连续可微的函数是连续的，且每个具有连续二阶偏导数的函数是连续可微的，然而，为证明这些论断，必须首先对多元函数证明中值定理，在 13.3 节将证明这个中值定理.

358

本节最后讨论一个非常有用的结果，即某些二阶偏导数的相等.

定理 13.10 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，且假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，对任意两个下标$i$及$j$，其中$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$，以及$\mathcal{O}$中任意点$\boldsymbol{x}$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{x}). \tag{13.9}$$

如果先单独提出下面的引理，则证明上述定理就是显而易见的事.

引理 13.11 设$\mathcal{U}$是平面$\mathbb{R}^2$的包含点$(x_0,\ y_0)$的开子集，假定函数$f:\ \mathcal{U}\to\mathbb{R}$有二阶偏导数，则在$\mathcal{U}$中存在点$(x_1,\ y_1)$及$(x_2,\ y_2)$满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1,y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_2,y_2).$$

证明 由于$\mathcal{U}$是开集，可取正数r，使得在取定实数区间$I=(x_0-2r,\ x_0+2r)$及$J=(y_0-2r,\ y_0+2r)$后，矩形$I\times J$包含在$\mathcal{U}$中.

证明的思路是，将下式以两种不同的方式表示为差式：

$$f(x_0+r,y_0+r)-f(x_0+r,y_0)-f(x_0,y_0+r)+f(x_0,y_0).$$

先把它表示为差式

$$[f(x_0+r,y_0+r)-f(x_0+r,y_0)]-[f(x_0,y_0+r)-f(x_0,y_0)], \tag{13.10}$$

然后把它表示为差式

$$[f(x_0+r,y_0+r)-f(x_0,y_0+r)]-[f(x_0+r,y_0)-f(x_0,y_0)]. \tag{13.11}$$

则使用一元实变量函数的中值定理，将表达式(13.10)与(13.11)表示为函数$f:\ \mathcal{U}\to\mathbb{R}$的二阶偏导数.

先分析差式(13.10). 定义辅助函数$\varphi:\ I\to\mathbb{R}$如下：

$$\varphi(x) = f(x,y_0+r)-f(x,y_0),\quad x\in I.$$

由于$f:\ \mathcal{U}\to\mathbb{R}$关于它的第一个分量有偏导数，所以函数$\varphi:\ I\to\mathbb{R}$是可微的. 定理将函数$\varphi:\ I\to\mathbb{R}$限制在闭区间$[x_0,\ x_0+r]$上，在开区间$(x_0,\ x_0+r)$内选取点$x_1$，应用中值定理得

$$\frac{\varphi(x_0+r)-\varphi(x_0)}{r} = \varphi'(x_1),$$

即

359

$$\frac{\varphi(x_0+r)-\varphi(x_0)}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_0+r)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_0). \tag{13.12}$$

固定点x_1，再定义另一个辅助函数$\alpha:\ J\to\mathbb{R}$如下：

$$\alpha(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y),\quad y\in J.$$

将函数$\alpha:\ J\to\mathbb{R}$限制在闭区间$[y_0,\ y_0+r]$上，在开区间$(y_0,\ y_0+r)$内选取点y_1，应用中值定理得

$$\frac{\alpha(y_0+r)-\alpha(y_0)}{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_1,y_1). \tag{13.13}$$

从(13.12)及(13.13)可得

$$\varphi(x_0+r)-\varphi(x_0)=r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_1,y_1). \tag{13.14}$$

然而，$\varphi(x_0+r)-\varphi(x_0)$等于差式(13.10)，于是有

$$[f(x_0+r,y_0+r)-f(x_0+r,y_0)]-[f(x_0,y_0+r)-f(x_0,y_0)]=r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_1,y_1). \tag{13.15}$$

为分析差式(13.11)，将同样的论证用于如下定义的辅助函数 ψ：$J\to\mathbb{R}$：

$$\psi(y)=f(x_0+r,y)-f(x_0,y),\quad y\in J.$$

由此可得在矩形 $I\times J$ 内能取到点(x_2, y_2)，使得

$$[f(x_0+r,y_0+r)-f(x_0,y_0+r)]-[f(x_0+r,y_0)-f(x_0,y_0)]=r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y_2). \tag{13.16}$$

由(13.15)与(13.16)的左端相等可得它们的右端也相等．所以引理得证． ■

定理 13.10 的证明 只在 $n=2$ 的情形下对定理加以证明，而一般情形下的证明留作习题(习题 16)．设(x_0, y_0)是$\mathcal{O}$中的一点，取正数 r，使得开球$\mathcal{B}_r(x_0, y_0)$包含在$\mathcal{O}$中．设 k 是自然数．则可应用引理于$\mathcal{U}=B_{r/k}(x_0, y_0)$，并在 $B_{r/k}(x_0, y_0)$内取点(x_k, y_k)及(u_k, v_k)满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_k,y_k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u_k,v_k). \tag{13.17}$$

但是，由假定知，函数$\partial^2 f/\partial x\partial y$：$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在(x_0, y_0)处是连续的，而函数$\partial^2 f/\partial y\partial x$：$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在(x_0, y_0)处也是连续的．由于两个序列$\{(x_k, y_k)\}$及$\{(u_k, v_k)\}$都收敛到点(x_0, y_0)，于是可得

360

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_k,y_k)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u_k,v_k)\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

由于(13.17)，可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$ ■

注意到，引理 13.11 中仅要求函数f:$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有二阶偏导数．另一方面，定理 13.10 中要求二阶偏导数连续．这个额外的假定是必要的．下面给出一个例子：函数f:$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有二阶偏导数，但$\partial^2 f/\partial x\partial y$ 与$\partial^2 f/\partial y\partial x$ 并非在所有点都相等．

例 13.12 定义函数f:$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y)=\begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2) & 若(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & 若(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

计算(留给读者(见习题 13))表明函数f:$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 有二阶偏导数，但是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1\quad 而\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1.$$ ■

关于符号的注记 偏导数还有其他常用的符号，例如，当函数f：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数时，$\partial f/\partial x(x, y, z)$常用$f_x(x, y, z)$表示．当函数$f$：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 有二阶偏导数时，

$$f_{xx}(x,y,z),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y,z)\quad 以及\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)$$

常表示相同的量. 此外，对$\mathbb{R}^n$的开子集$\mathcal{O}$，连续可微的函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$常称为是$C^1$的，而如果$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，则它称为是$C^2$的.

习题

1. 计算下列函数的一阶偏导数：

a. $f(x, y, z) = x + yz + xy + x\sin(yz)$，$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$.

b. $f(x, y, z) = \sin(x^2y^2)/(1+x^2+y^3)$，$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$.

c. $f(x, y, z) = \sqrt{1+\cos^2(xy)}$，$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$.

2. 证明例 13.8 中定义的函数是连续可微的.

3. 对例 13.9 中定义的函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，证明：函数$\partial f/\partial x$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$和$\partial f/\partial y$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$在点$(0, 0)$都不连续. [361]

4. 假定函数g：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$有如下性质：

$$对\mathbb{R}^2中所有(x,y),\quad |g(x,y)|\leqslant x^2+y^2.$$

证明：g：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$在点$(0, 0)$关于$x$与$y$都有偏导数.

5. 假定函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$有一阶偏导数且

$$对\mathbb{R}^2中所有的(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

证明：函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是常数，即存在某个数$c$，使得对$\mathbb{R}^2$中所有的$(x, y)$，$f(x, y)=c$.（提示：先证明$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$在平行于一条坐标轴的直线上的限制是常数.）

6. 定义

$$g(x,y)=\begin{cases}x^2y^4/(x^2+y^2) & 若(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & 若(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明：函数g：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$有一阶偏导数. 函数$g$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是连续可微的吗？

7.（链式法则的推广）设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\mathbf{x}$的开子集，假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$\mathbf{x}$处有关于第$i$个分量的偏导数. 设$I$是$\mathbb{R}$中满足$f(\mathcal{O})\subseteq I$的开区间，且函数$g:I\to\mathbb{R}$在点$f(\mathbf{x})$有导数. 证明：复合函数$g\circ f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$\mathbf{x}$处有关于第$i$个分量的偏导数，且

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(\mathbf{x})=g'(f(\mathbf{x}))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

8. 假定函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的. 用习题 7 计算下列函数的一阶偏导数：

a. 函数h：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义如下：

$$h(x,y)=g(xy^2+1),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

b. 函数h：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义如下：

$$h(u,v)=g(4u+7v),\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

c. 函数h：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义如下：

$$h(t,s)=g(t-s),\quad (t,s)\in\mathbb{R}^2.$$

9. 假定函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有二阶导数. 计算习题 8 中所定义的函数的二阶偏导数. [362]

10. 假定函数φ：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$及ψ：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有二阶偏导数，定义

$$f(x,y)=\varphi(x-y)+\psi(x+y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：对$\mathbb{R}^2$中所有(x, y)，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)=0$.

11. 函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$称为调和的(harmonic)，如果它有二阶偏导数且

$$\text{对}\mathbb{R}^2\text{中所有}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

下列函数中哪些是调和的？

a. $f(x, y)=e^x\cos y$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

b. $g(x, y)=x^2-y^2$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

c. $h(x, y)=x^2-y^3$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

12. 给定一对函数ϕ：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$及$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. 知道是否存在某个连续可微函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，使得对$\mathbb{R}^2$中所有$(x, y)$，

$$\partial f/\partial x(x,y)=\phi(x,y)\quad\text{及}\quad \partial f/\partial y(x,y)=\psi(x,y)$$

通常是有用的. 这样的函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$称为函数对$(\phi, \psi)$的势函数(potential function).

a. 证明：如果对于函数对(ϕ, ψ)势函数存在，那么势函数在相差一个常数的意义上是唯一确定的，也就是任意两个势函数的差是常数.

b. 证明：如果对一对连续可微的函数ϕ：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$及$\psi$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$存在势函数，则对$\mathbb{R}^2$中所有$(x, y)$，

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y).$$

13. 考虑例13.12中所定义的函数.

a. 证明：

$$\text{对}\mathbb{R}\text{中所有}x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$$

以及

$$\text{对}\mathbb{R}\text{中所有}y,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y.$$

b. 由(a)推出

363

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\quad\text{及}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1.$$

14. 设$\mathcal{U}$是平面$\mathbb{R}^2$中包含点(x_0, y_0)的开子集. 证明：如果$|x-x_0|<2r$及$|y-y_0|<2r$，那么存在正数r，使得(x, y)在$\mathcal{U}$中.

15. 仿效引理13.11的证明中建立(13.15)的论证来验证方程(13.16).

16. 设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$满足定理13.10的假定且设$i$与$j$是下标，满足$1\leqslant i\leqslant n$及$1\leqslant j\leqslant n$，选择正数$r$，使得$\mathbf{x}$的开球$B_r(\mathbf{x})$包含在$\mathcal{O}$中，定义

$$g(s,t)=f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i+s\mathbf{e}_j),\quad\text{对于}s^2+t^2<r^2.$$

a. 验证g：$B_r(0, 0)\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数且

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s\partial t}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{x})\quad\text{及}\quad\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

b. 运用(a)证明定理13.10的一般情形可以从$n=2$的情形推出.

17. 假定函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，设$(x_0, y_0)$是$\mathbb{R}^2$中的点. 证明：对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得如果$0<|h|<\delta$及$0<|k|<\delta$，则有

$$\left|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right|<\varepsilon.$$

（提示：仿效引理 13.11 的证明思路.）

13.3 中值定理与方向导数

在一元实值函数的研究中，中值定理起着重要的作用. 为便于参考，将该定理重述如下，其证明见 4.3 节.

定理 13.13（中值定理） 假定函数 f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的且 f: $(a, b)\to\mathbb{R}$ 是可微的. 则在开区间 (a, b) 中存在点 c，满足

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

本节的目标之一是把上述定理推广到多元实变量函数的情形. 正如在 13.2 节开始时所提到过的，作这一推广的策略是试图通过分析函数在定义域的一个线段上的限制把一般情形归约为一元的情形. 364

引理 13.14（中值引理） 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集且 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是下标. 假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{O}$ 中每一点处有关于第 i 个分量的偏导数. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathcal{O}$ 中的点而 a 是使得点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{e}_i$ 之间的段位于 $\mathcal{O}$ 中的实数. 则存在数 $\theta(1<\theta<1)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\theta a\boldsymbol{e}_i)a. \tag{13.18}$$

证明 由于 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，可选择包含数 0 及 a 的实数开区间 I，使得对 I 中每个 t，点 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i$ 属于 $\mathcal{O}$. 对 I 中每个 t，由 $\phi(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)$ 定义函数 ϕ: $I\to\mathbb{R}$. 则函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 关于它的第 i 个分量的偏可微性蕴涵了在 I 中的每个点 t 处，

$$\phi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i).$$

由此可推出函数 ϕ: $I\to\mathbb{R}$ 可微. 这样可对函数 ϕ: $I\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[0, a]$ 上的限制应用一元函数的中值定理得到点 $\theta(0<\theta<1)$，使得

$$\phi(a)-\phi(0)=\phi'(\theta a)a.$$

由函数 ϕ: $I\to\mathbb{R}$ 的定义以及 $\phi'(t)$ 的计算，可将上式改写为(13.18). ■

命题 13.15（中值命题） 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点而 r 是正数. 假定函数 f: $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数. 那么如果点 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}\in\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$，则在 $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$ 中存在点 z_1，z_2，…，z_n，使得

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i), \tag{13.19}$$

且

$$\text{对每个下标 } i(1\leqslant i\leqslant n),\quad \|\boldsymbol{x}-z_i\|<\|\boldsymbol{h}\|.$$

证明 就 $n=3$ 证明上述结论. 由此，一般的结论显然也成立. 技巧是把差式 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})$ 展开，我们有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})&=f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3+h_3)-f(x_1,x_2,x_3)\\&=f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3+h_3)-f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3)\end{aligned}$$

$$+f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3)-f(x_1+h_1,x_2,x_3)$$

365

$$+f(x_1+h_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3).$$

对每一个差式应用中值引理，在开区间(0，1)中求得 θ_1，θ_2 及 θ_3，满足

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3+\theta_3 h_3)h_3$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1,x_2+\theta_2 h_2,x_3)h_2+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,x_2,x_3)h_1.$$

令 $\boldsymbol{z}_3=(x_1+h_1,\ x_2+h_2,\ x_3+\theta_3 h_3)$，$\boldsymbol{z}_2=(x_1+h_1,\ x_2+\theta_2 h_2,\ x_3)$ 及 $\boldsymbol{z}_1=(x_1+\theta_1 h_1,\ x_2,\ x_3)$，则得到所要证的结果. ■

对于$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集$\mathcal{O}$，函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$定义为在点 $\boldsymbol{x}$ 处有关于第 i 个分量的偏导数，如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{t}$$

存在，下面分析用$\mathbb{R}^n$ 中一般的非零点 $\boldsymbol{p}$ 代替点 $\boldsymbol{e}_i$ 时的上述极限.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集. 考虑函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 以及$\mathbb{R}^n$ 中的非零点 $\boldsymbol{p}$，如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})}{t}$$

存在，则称此极限为函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处在 $\boldsymbol{p}$ 方向上的方向导数[⊖]，表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}).$$

注意到，如果 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_i$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

定理 13.16(方向导数定理) 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集且假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 连续可微，则对$\mathcal{O}$中的每个点 $\boldsymbol{x}$ 及$\mathbb{R}^n$ 中的每个非零点 $\boldsymbol{p}$，函数 f: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处在 $\boldsymbol{p}$ 方向上有一个由如下公式给出的方向导数：

366

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}). \tag{13.20}$$

证明 由于$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，所以可选取正数 r，使得开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$之中，由中值命题可知，如果 t 是任意一个满足 $|t|\,\|\boldsymbol{p}\|<r$ 的数，则存在 n 个点 $\boldsymbol{z}_1$，…，$\boldsymbol{z}_n$，使得

$$f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}tp_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{z}_i), \tag{13.21}$$

且对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\|\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{x}\|\leqslant|t|\,\|\boldsymbol{p}\|. \tag{13.22}$$

可以把(13.21)改写为

⊖ 术语“方向导数”是标准的，但它有时会造成错觉，因为方向导数不仅仅依赖于 $\boldsymbol{p}$ 的方向，但也依赖于它的长度.

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})}{t}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i),\quad t\neq 0. \tag{13.23}$$

由于对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，$\partial f/\partial x_i:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处连续，从(13.22)及(13.23)可得，

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})}{t}=\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

这就证明了公式(13.20).

由于公式(13.20)，我们引入下面的定义.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集，且假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在 $\boldsymbol{x}$ 处有一阶偏导数. 定义函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点 $\boldsymbol{x}$ 处的**梯度**(gradient，用$\nabla f(\boldsymbol{x})$表示)是$\mathbb{R}^n$中如下给出的点：

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right).$$

由于视$\mathbb{R}^n$中的点为向量，故$\nabla f(\boldsymbol{x})$通常称为梯度向量(gradient vector)或导数向量(derivative vector). 使用数量积和梯度，公式(13.20)可以改写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})]\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{p}\rangle. \tag{13.24}$$

注意到(13.24)的一个微小的引伸是有益的：如果 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p}$ 之间的段位于$\mathcal{O}$之中，以 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p}$ 代替 $\boldsymbol{x}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})]=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}\rangle,\quad 对于 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{13.25}$$

367

定理 13.17(中值定理) 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集且假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$连续可微. 如果连接点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ 的段位于$\mathcal{O}$中，则存在数 $\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}),\boldsymbol{h}\rangle. \tag{13.26}$$

证明 由于$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，可选取实数的开区间 I，它包含数 0 与 1，使得对 I 中每个 t，$\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}\in\mathcal{O}$，定义

$$\phi(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}),\quad 对每个 t\in I.$$

使用如公式(13.25)所述的方向导数定理的微小推广，可知

$$对 I 中每个 t,\quad \phi'(t)=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}),\boldsymbol{h}\rangle. \tag{13.27}$$

于是可应用一元实变量函数的中值定理于函数 ϕ：$I\to\mathbb{R}$ 在闭区间[0，1]上的限制，以便可选取数 $\theta(0<\theta<1)$，使得

$$\phi(1)-\phi(0)=\phi'(\theta).$$

由(13.27)以及 ϕ：[0，1]$\to\mathbb{R}$ 的定义，显然，上述公式是公式(13.26)的改写. ■

当 $\boldsymbol{p}$ 是$\mathbb{R}^n$中范数为 1 的点时，在 $\boldsymbol{p}$ 方向上的方向导数可以解释为变化率(rate of change). 为说明这一点，设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$中包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集且假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$连续可微，则如果点 $\boldsymbol{p}$ 的范数为 1 而 t 为正实数，

$$t=\|t\boldsymbol{p}\|,$$

那么如果 t 是正数且足够小，则有

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})}{t}=\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x})}{\|t\boldsymbol{p}\|}.$$

鉴于此，如果 $\boldsymbol{p}$ 的范数是 1，则把 $\partial f/\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 叫做函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处在 $\boldsymbol{p}$ 方向上的变化率是合乎情理的.

推论 13.18 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集，且假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，如果 $\nabla f(\boldsymbol{x})\neq 0$，则函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处范数是 1 的增长最快的方向为如下定义的方向 $\boldsymbol{p}_0$:

368

$$\boldsymbol{p}_0=\frac{\nabla f(\boldsymbol{x})}{\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|}. \tag{13.28}$$

证明 运用公式(13.24)及柯西-施瓦茨不等式可得，如果 $\boldsymbol{p}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个范数为 1 的点，则

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\right|=|\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{p}\rangle|\leqslant\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\cdot\|\boldsymbol{p}\|=\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|. \tag{13.29}$$

另一方面，如果 $\boldsymbol{p}_0$ 由(13.28)所定义，则 $\boldsymbol{p}_0$ 的范数为 1，由(13.24)可得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}_0}(\boldsymbol{x})=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{p}_0\rangle=\left\langle\nabla f(\boldsymbol{x})\frac{\nabla f(\boldsymbol{x})}{\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|}\right\rangle=\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|.$$

上式与不等式(13.29)蕴涵了如果 $\boldsymbol{p}$ 的范数是 1，则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\leqslant\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}_0}(\boldsymbol{x}).$$

■

例 13.19 定义

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y^2},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 简单的计算表明

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2\quad 及\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-2.$$

于是 $\nabla f(1,1)=(2,-2)$. 因此，函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点(1, 1)处增长最快的方向由向量 $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 给定. ■

在 13.2 节我们提到过连续可微函数是连续的. 现在可以证明这一论断.

定理 13.20 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，且假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，则函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续的.

证明 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathcal{O}$ 中的点，要证明函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处是连续的. 下面直接应用连续性的序列定义. 首先，由于 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathcal{O}$ 的内点，因此可选取正数 r，使得开球 $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$ 包含在 $\mathcal{O}$ 中.

设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$ 中收敛到 $\boldsymbol{x}$ 的序列. 对每个自然数 k，置 $\boldsymbol{h}_k=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}$，应用中值定理选择数 $\theta_k(0<\theta_k<1)$，使得

369

$$f(\boldsymbol{x}_k)-f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}_k)-f(\boldsymbol{x})=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta_k\boldsymbol{h}_k),\boldsymbol{h}_k\rangle. \tag{13.30}$$

注意到

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{h}_k=\mathbf{0}\quad 及\quad \lim_{k\to\infty}[\boldsymbol{x}+\theta_k\boldsymbol{h}_k]=\boldsymbol{x}.$$

由于 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，因此可得

$$\lim_{k\to\infty} \nabla f(\boldsymbol{x} + \theta_k \boldsymbol{h}_k) = \nabla f(\boldsymbol{x}).$$

由于对所有正整数 k，(13.30)成立，因此可推断

$$\lim_{k\to\infty}[f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x})] = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{0} \rangle = 0,$$

这意味着象序列 $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}$ 收敛到 $f(\boldsymbol{x})$. ■

推论 13.21 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，且假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶偏导数，则函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的.

证明 对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，函数 $\partial f/\partial x_i$：$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 于是由定理 13.20 知，它是连续的. 这恰好意味着函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. ■

习题

1. 对下列每一个函数，求 $\mathbb{R}^n$ 中有定义的点 $\boldsymbol{x}$ 处的梯度向量：

a. $f(\boldsymbol{x}) = e^{\|\boldsymbol{x}\|^2}$，$\boldsymbol{x}\in R^n$.

b. $f(x, y) = \sin(xy)/\sqrt{x^2+y^2+1}$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

c. $f(\boldsymbol{x}) = 1/\|\boldsymbol{x}\|^2$，$\boldsymbol{x}\in\mathcal{O} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\}$.

2. 假定函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 与 g：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 求用 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 及 $\nabla g(\boldsymbol{x})$ 表示 $\nabla(fg)(\boldsymbol{x})$ 的公式.

3. 假定函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 g：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 求用 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 及 $g'(f(\boldsymbol{x}))$ 表示 $\nabla(g\circ f)(\boldsymbol{x})$ 的公式.

4. 假定函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数，且 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 是 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的局部极小值点(local minimizer)，即存在正数 r，使得

$$\text{若 } \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) < r, \quad \text{则有 } f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \geqslant f(\boldsymbol{x}).$$

证明 $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$.

5. 证明：在 $\boldsymbol{h} = a\boldsymbol{e}_i$ 的情况下，中值公式(13.26)与中值公式(13.18)是一致的.

6. 定义函数 f：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

370

中值定理蕴涵了存在数 $\theta(0<\theta<1)$ 满足

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta,\theta,\theta).$$

求 θ 的值.

7. 假定函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数且 $f(0, 0) = 1$. 而

$$\text{对 } \mathbb{R}^2 \text{ 中所有 } (x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \quad \text{且} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3.$$

证明：对 $\mathbb{R}^2$ 中所有 (x, y)，$f(x, y) = 1 + 2x + 3y$.

8. 假定函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点，对 $\mathbb{R}^n$ 中的非零点 $\boldsymbol{p}$ 及非零实数 α，证明：

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}).$$

9. 定义函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x,y) = \begin{cases} (x/|y|)\sqrt{x^2+y^2} & \text{若 } y\neq 0 \\ 0 & \text{若 } y = 0. \end{cases}$$

a. 证明：函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点(0, 0)处是不连续的.

b. 证明：函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点(0, 0)处所有方向上有方向导数.

c. 证明：如果 c 是任意数，则存在范数为 1 的向量 $\boldsymbol{p}$，使得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}(0,0) = c.$$

d. (c)与推论13.18矛盾吗？

10. 对函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$考虑下面的推断：

a. 函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$是连续可微的.

b. 函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在$\mathbb{R}^2$的每个点处都有所有方向的方向导数.

c. 函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在$\mathbb{R}^2$的每个点处都有一阶偏导数.

解释上述推断之间的牵连关系.

11. 假定函数$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是连续可微的. 定义$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1\}$.

a. 证明：在K中存在点$\boldsymbol{x}$，在该点处函数达到最小值.

371

b. 还假定若$\boldsymbol{p}$是$\mathbb{R}^n$中任意一个范数为1的点，则有$\langle \nabla f(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p} \rangle > 0$. 证明：在(a)中的最小值点$\boldsymbol{x}$的范数小于1.

第14章　实值函数的局部逼近

14.1　一阶逼近、切平面和仿射函数

设$\mathcal{O}$是欧几里得空间$\mathbb{R}^n$的开子集，假设我们希望分析实值函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$\mathcal{O}$中点$\boldsymbol{x}$的一个邻域内的特性(例如，想要确认点$\boldsymbol{x}$是函数的局部最大值点或局部最小值点). 为此，采取的一个策略是选取另一个函数$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，它比给定的函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$更简单，且在$\boldsymbol{x}$的附近是$f$的一个好的逼近. 于是我们可以看到函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$从更简单函数$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$继承下来的性质.

本节我们解释一个*仿射函数*(affine function)的含义，并证明对一个连续可微函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，在$\mathcal{O}$的每一点$x$处，存在一个仿射函数作为它的一阶逼近. 对于二元函数，这个仿射逼近的图形就是切平面. 本章其余两节涉及有连续二阶偏导数的函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$. 在14.2节，$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$\boldsymbol{x}$处的所有二阶偏导数组织成一个$n\times n$矩阵，这个矩阵称为*黑塞矩阵*(Hessian matrix)，并建立了一个二阶方向导数公式. 我们还将每一个$n\times n$阶矩阵与一个二次函数联系起来，并得到二次函数的值的估计. 在14.3节，我们将表明如何求出一个函数$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，它是一个仿射函数与一个二次函数的和，并且是$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$\boldsymbol{x}$处的二阶逼近. 这将允许我们为确定在何种情况下点$\boldsymbol{x}$是函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的局部极大值点或局部极小值点提供一个判别准则.

假设I是实数开区间，函数$f: I\to\mathbb{R}$是可微的. 根据定义，这意味着如果x是I中的一点，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

372

如果改写这个差式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=\frac{f(x+h)-[f(x)+f'(x)h]}{h},$$

则上述导数的定义可改写成

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-[f(x)+f'(x)h]}{h}=0. \tag{14.1}$$

第8章我们研究了泰勒多项式并建立了在一点处函数的值与其泰勒多项式之间的差估计. 由我们在第8章证明的拉格朗日余数定理可得，如果k是一个自然数，且$f:I\to\mathbb{R}$有直到$k+1$阶的连续偏导数，则对$x\in I$及一个扰动$x+h$也属于I，存在数$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(x+h)-\left[f(x)+f'(x)h+\cdots+\left(\frac{1}{k}!\right)f^{(k)}(x)h^k\right]=\frac{f^{(k+1)}(x+\theta h)}{(k+1)!}\cdot h^{k+1},$$

因此有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-[f(x)+f'(x)h+\cdots+(1/k!)f^{(k)}(x)h^k]}{h^k}=0. \tag{14.2}$$

本章我们希望对多元函数建立起类似于(14.1)的逼近式及(14.2)当$k=2$时的逼近式，为

此，引进下述定义.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\boldsymbol{x}$的开区间，对正整数k，两个函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$与$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$称为在点$\boldsymbol{x}$处彼此$k$阶逼近，如果

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^k}=0. \tag{14.3}$$

例 14.1 对每个数h，定义$f(h)=e^h$，则$f(0)=f'(0)=f''(0)=1$. 在点$x=0$处，由公式(14.2)可见，

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-[1+h]}{h}=0,$$

而

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-[1+h+(1/2)h^2]}{h^2}=0.$$

因此，一次泰勒多项式$p_1(h)=1+h$是函数f在点$x=0$处的一阶逼近. 而二次泰勒多项式 373 $p_2(h)=1+h+(1/2)h^2$是函数f在点$x=0$处的二阶逼近. ■

下面的定理是逼近公式(14.1)在多元函数情况下的一个推广.

定理 14.2(一阶逼近定理) 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，且假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的. 设$\boldsymbol{x}$是$\mathcal{O}$中的点，则

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-[f(\boldsymbol{x})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle]}{\|\boldsymbol{h}\|}=0. \tag{14.4}$$

证明 由于$\boldsymbol{x}$是$\mathcal{O}$的内点，因此可以选择正数r，使得开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$中. 固定$\mathbb{R}^n$中的非零点$\boldsymbol{h}$，满足$\|\boldsymbol{h}\|<r$，则点$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$属于$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$，所以由中值定理，可选取数$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}),\boldsymbol{h}\rangle.$$

于是

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})-\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle,$$

所以，用柯西-施瓦茨不等式，可得估计

$$|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle|\leqslant\|\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})-\nabla f(\boldsymbol{x})\|\cdot\|\boldsymbol{h}\|.$$

用$\|\boldsymbol{h}\|$除此估计式，得到

$$\frac{|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-[f(\boldsymbol{x})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle]|}{\|\boldsymbol{h}\|}\leqslant\|\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})-\nabla f(\boldsymbol{x})\|. \tag{14.5}$$

因为已假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，所以

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\|\nabla f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})-\nabla f(\boldsymbol{x})\|=0,$$

从而由估计式(14.5)推出式(14.4)式成立. ■

对于连续可微函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，它的定义域$\mathcal{O}$为平面$\mathbb{R}^2$中的开子集，且点$(x_0,y_0)$在$\mathcal{O}$中，如果用$(x,y)$表示$\mathcal{O}$中一般的点，且置$\boldsymbol{h}=(x-x_0,y-y_0)$，显然，$\boldsymbol{h}$趋于0当且仅当$(x,y)$趋向于$(x_0,y_0)$，并且$\|\boldsymbol{h}\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 因此逼近性质(14.4)可改写为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-[f(x_0,y_0)+\partial f/\partial x(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial f/\partial y(x_0,y_0)(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0. \tag{14.6}$$

这最后的公式有一个涉及切平面存在的几何解释．为说明这点，给出下列定义．

定义 设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$的开子集，假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$\mathcal{O}$中点$(x_0, y_0)$处是连续的，与$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的图形在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$相切的平面，是指形式为 [374]

$$\psi(x,y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

的函数$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的图形，其中$a$，$b$，$c$是实数，具有性质

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \psi(x,y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0. \tag{14.7}$$

二元连续函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$\mathcal{O}$中点$(x_0, y_0)$可以有所有方向的方向导数，而无须在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处有切平面（见习题17、18及19），这样的例子出现的原因是，切平面的定义需要极限(14.7)的存在不依赖点(x, y)趋向于(x_0, y_0)的方式．然而，对于连续可微函数来说，逼近性质(14.6)恰是证明下面的推论所需要的．

推论 14.3 假定$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$的包含点(x_0, y_0)的开子集，而函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，则存在与函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的图形在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$相切的平面，这个切平面是由

$$\psi(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{14.8}$$

在$\mathbb{R}^2$中对(x, y)定义的函数$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的图形.

证明 对$\mathcal{O}$中一般的点(x, y)，置

$$\boldsymbol{h} = (x,y) - (x_0,y_0).$$

注意到

$$\langle \nabla f(x_0,y_0), \boldsymbol{h}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0).$$

由于$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，因此，一阶逼近定理蕴涵了

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \psi(x,y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0,$$

即函数$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的图形是与函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的图形在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处相切的平面． ■ [375]

为了看出为什么上述推论中所描述的切平面必定是由方程(14.8)所描述的平面[⊖]，我们可以从几何上思考．事实上，假定$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$的开子集，考虑函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$．在$\mathcal{O}$中的点$(x_0, y_0)$处，我们期望平面是与$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的图形在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处相切．如果函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在$(x_0, y_0)$处有一阶偏导数，则由偏导数的定义及在一元函数情形下，导数为切线的斜率的含义可得，向量

$$\boldsymbol{T}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \quad 与 \quad \boldsymbol{T}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

应当平行于所提到的切平面．于是所提到的切平面应当以

$$\eta = \boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2 = (-\partial f/\partial x(x_0,y_0), -\partial f/\partial y(x_0,y_0), 1) \tag{14.9}$$

作为法向量，如图14.1所示．这个通过点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$且同η正交的平面由$\mathbb{R}^3$中所有

⊖ 关于线性代数的附录B包括$\mathbb{R}^3$中平面性质及$\mathbb{R}^3$中两个向量的向量积的讨论.

满足方程

$$\langle \boldsymbol{\eta}, (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0$$

的点(x, y, z)组成，显然，这意味着$\mathbb{R}^3$中的点(x, y, z)位于由方程(14.8)所定义的函数的图形上.

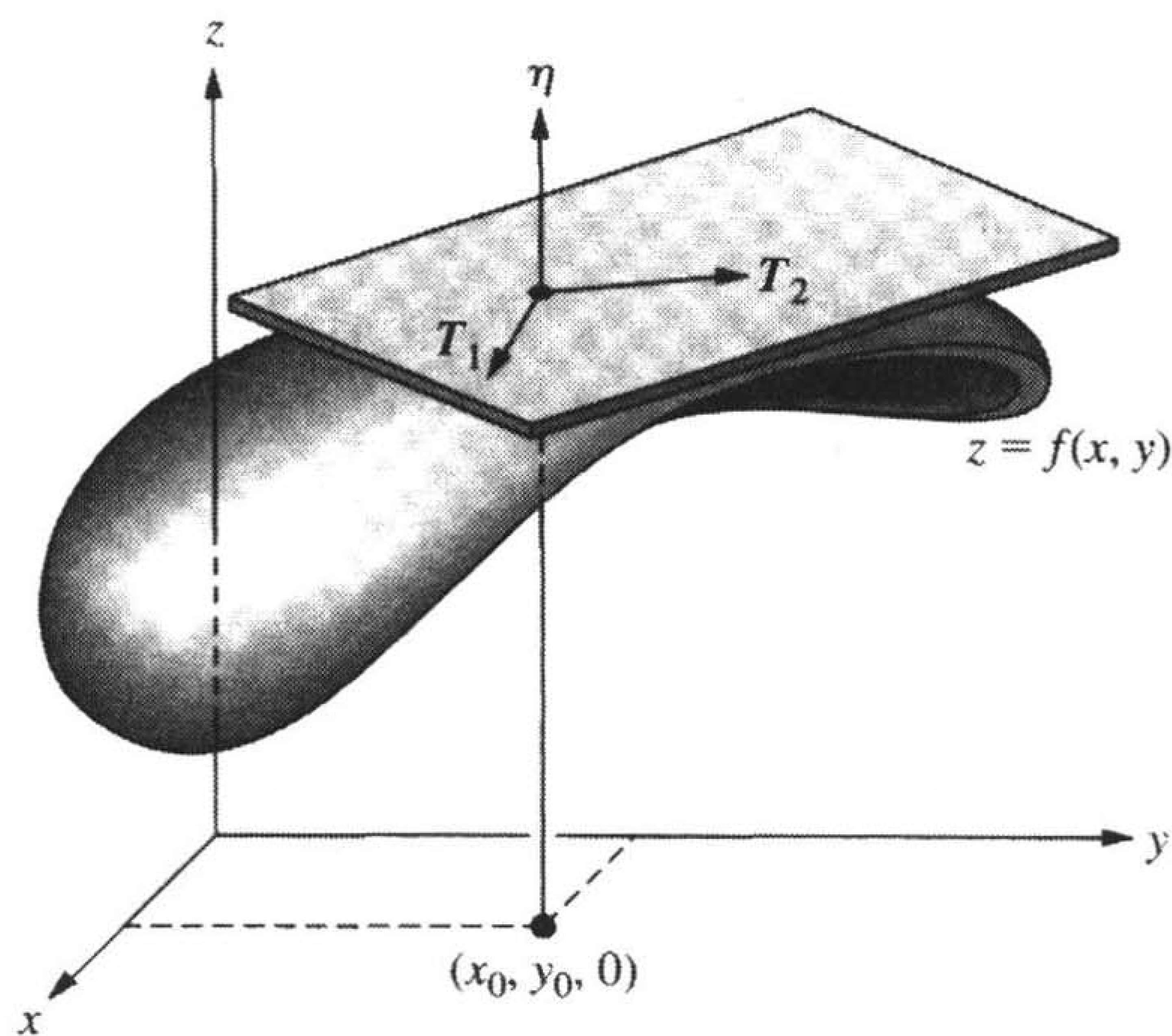


图 14.1 图形在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面

一阶逼近定理从另一个较少几何的观点来看也是有用的. 它使我们可以用较简单的函数去逼近颇为复杂的函数，并准确地推断函数彼此接近的方式. 当然，最简的函数类型是常数函数. 其次两类最简单的函数是线性函数和仿射函数，它们的定义如下.

376

定义 函数g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$称为仿射函数，如果它由

$$g(\boldsymbol{u}) = c + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$$

定义，其中c及a_i均为指定的数. 如果$c=0$，则函数称为线性函数.

推论 14.4 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\boldsymbol{x}$的开子集，并假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，则存在一仿射函数，它是函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$\boldsymbol{x}$处的一阶逼近，即由

$$g(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} \rangle, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$$

定义的函数g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

证明 注意到，函数g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是仿射函数且

$$g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle, \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n.$$

一阶逼近定理断言函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$与$g$: $\mathcal{O}$是在点$\boldsymbol{x}$处彼此一阶逼近的函数. ■

例 14.5 定义

$$f(x, y) = \sin(x - y - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$是连续可微的. 计算在点(0, 0)处的偏导数，可查明作为f在点(0, 0)的一阶逼近的仿射函数由

$$\psi(x,y) = x - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

定义计算在点$(\pi, 0)$处的偏导数，查明作为f在点$(\pi, 0)$的一阶逼近的仿射函数由

$$\psi(x,y) = \pi - x + y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

给出. ■

习题

1. 定义

$$f(x,y) = e^{2x+4y+1}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

求在点$(0, 0, e)$处与函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$的图形相切的切平面方程. 377

2. 定义

$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

在函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$图形上的哪些点处切平面平行于$xy$平面？

3. 设a，b及c是正数. $\mathbb{R}^3$中点(x, y, z)满足

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 1$$

的集合称为双曲面(hyperboloid). 求这个双曲面在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程，其中z_0为正数.

4. 定义

$$f(x,y) = 2y + x^2 + xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

求仿射函数，它是函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在点$(0, 0)$处的一阶逼近.

5. 定义

$$f(x,y) = e^{\sin(x-y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

求仿射函数，它是函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在点$(0, 0)$处的一阶逼近.

6. 定义

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

求仿射函数，它是函数f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$在点$(0, 0, 0)$处的一阶逼近.

7. 固定$\mathbb{R}^n$中的点$\mathbf{x}$. 设$\mathbf{c}$是$\mathbb{R}^n$的点，定义函数ψ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$如下：

$$\psi(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{u} - \mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

a. 证明：函数ψ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是仿射函数.

b. 证明：给定任意非常数仿射函数ψ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，可以在$\mathbb{R}^n$中选取点$\mathbf{x}$及$\mathbf{c}$，使得$\psi$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$具有上述形式.

8. 假定函数g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$及$h$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$都是连续可微的. 定义函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$如下：

$$f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

求仿射函数，它是函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在点$(0, 0)$处的一阶逼近.

9. 假定函数$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$与$h$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$是连续可微的，求这两个函数彼此是在点$(0, 0)$处的一阶逼近的充分必要条件.

10. 设a，b及c是实数. 证明： 378

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^2 + bxy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

11. 证明：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x + 2y) - 2x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

12. 证明：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1 + 2x + y^2)^{3/2} - 1 - 3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

13. 设 a 是实数. 证明：如果

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

则 $a=0$.

14. 设 a，b 及 c 是实数，证明：如果

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{c+ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

则 $c=a=b=0$.

15. 假定函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续的. 设 a 及 b 是任意实数. 证明：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)-(f(0,0)+ax+by)] = 0.$$

请问 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-[f(0,0)+ax+by]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 成立吗？

16. 设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$ 的开子集，且假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在$\mathcal{O}$中点(x_0, y_0)处是连续的. 对于数 a，b 及 c，定义

$$\psi(x,y) = a+b(x-x_0)+c(y-y_0), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

假定 $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 的图形与 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的图形在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处相切.

a. 证明 $a=f(x_0, y_0)$.

b. 证明：$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在(x_0, y_0)处有一阶偏导数且 $b=\partial f/\partial x(x_0, y_0)$，$c=\partial f/\partial y(x_0, y_0)$.

c. 用(a)及(b)证明只可能有一个切平面.

17. 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(y^2/x)\cdot\sqrt{x^2+y^2} & \text{若 } x\neq 0\\ 0 & \text{若 } x=0.\end{cases}$$

a. 证明：函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点$(0, 0)$处是连续的，且在$(0, 0)$处的每个方向都有方向导数.

379

b. 证明：任何平面都不会是 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 的图形在点$(0, 0, f(0, 0))$处的切平面.

18. 假定连续函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处有切平面. 证明：函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在点(x_0, y_0)处的所有方向都有方向导数.

*14.2 二次函数、黑塞矩阵和二阶导数

对于多元函数，常常有必要确定函数取最大值及最小值的点. 就一元函数来说，我们在第4章中给出二阶导数检验法，对于多元函数，当然希望发现与此检验法专门对应的法则，这将在14.3节进行讨论. 作为准备，本节我们将求出多元函数的截面的二阶导数公式，并给出由二次函数所达到值的估计.

回想 $n\times n$ 矩阵(matrix)是指由 n 行及 n 列实数组成的矩形阵列. 如果这样一个 $n\times n$ 矩阵用 $\mathbf{A}$ 表示，则写成

$$\mathbf{A}=[a_{ij}],$$

这里对每一对下标 i 及 j(其中 $1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$)，a_{ij}表示矩阵 $\mathbf{A}$ 中第 i 行第 j 列的数，称 a_{ij}为矩阵的第 ij 个元素.

定义 给定任意 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$及$\mathbb{R}^n$ 中点 $\mathbf{x}$，符号 $\mathbf{Ax}$ 表示$\mathbb{R}^n$ 中这样的点：对于每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，该点的第 i 分量等于 $\mathbf{A}$ 的第 i 行与 $\mathbf{x}$ 的内积. 于是

$$\mathbf{Ax}\equiv\mathbf{y},$$

其中对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

由于点 $\boldsymbol{Ax}$ 的第 i 个分量由 $\boldsymbol{x}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的内积给出，因此，如果用 $\boldsymbol{A}_i$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，则

$$\boldsymbol{Ax} = (\langle \boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{x}\rangle,\cdots,\langle \boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{x}\rangle,\cdots,\langle \boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{x}\rangle).$$

定义 设 $A=[a_{ij}]$是 $n\times n$ 矩阵. 定义为

$$Q(\boldsymbol{x}) \equiv \langle \boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}\rangle,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

380

的函数 Q：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 称为与矩阵 A 相伴的二次函数.

注意到

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,$$

所以 $Q(\boldsymbol{x})$是 x_jx_i 的线性组合，因此称为二次函数(quadratic function).

例 14.6 2×2 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}$有与它相伴的二次函数 Q：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，定义如下：

$$Q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$ ■

例 14.7 考虑如下定义的 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}.$$

与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相伴的二次函数 Q：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$Q(x,y,z) = \lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$ ■

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，并假定函数f:$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有二阶偏导数. 函数f:$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在$\mathcal{O}$中点 $\boldsymbol{x}$ 处的黑塞矩阵用

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$$

表示，由如下的 $n\times n$ 矩阵定义：对每一对下标 i 及 j(其中 $1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$)，第 ij 个元素为

$$(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}))_{ij} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

注意，对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，黑塞矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$的第 i 行是函数$\partial f/\partial x_i$：$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的梯度. 还注意到，由定理 13.10 中所推断的交叉偏导数的相等可推出黑塞矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$是对称的(symmetric)，即若函数$f$:$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶偏导数，则第 ij 个元素等于第 ji 个元素.

例 14.8 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^2$ 中包含点$(x_0,\ y_0)$的开子集，并假定函数f:$\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有二阶偏导数. 则f在$(x_0,\ y_0)$处的黑塞矩阵由下式给出：

381

$$\nabla^2 f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x\partial x(x_0,y_0) & \partial^2 f/\partial y\partial x(x_0,y_0)\\ \partial^2 f/\partial x\partial y(x_0,y_0) & \partial^2 f/\partial y\partial y(x_0,y_0)\end{bmatrix}.$$ ■

例 14.9 定义

$$f(x,y) = x^2y+y^2+1,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

二阶导数的简短计算表明，在$\mathbb{R}^2$中点(x_0, y_0)处，

$$\nabla^2 f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2y_0 & 2x_0 \\ 2x_0 & 2 \end{bmatrix}.$$

特别地，在点(3，2)处，

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$ ■

例 14.10 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^3$的开子集，假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有二阶偏导数. 则$f$在$\mathcal{O}$中点$(x_0, y_0, z_0)$处的黑塞矩阵由下式给出：

$$\nabla^2 f(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x\partial x(x_0,y_0,z_0) & \partial^2 f/\partial y\partial x(x_0,y_0,z_0) & \partial^2 f/\partial z\partial x(x_0,y_0,z_0) \\ \partial^2 f/\partial x\partial y(x_0,y_0,z_0) & \partial^2 f/\partial y\partial y(x_0,y_0,z_0) & \partial^2 f/\partial z\partial y(x_0,y_0,z_0) \\ \partial^2 f/\partial x\partial z(x_0,y_0,z_0) & \partial^2 f/\partial y\partial z(x_0,y_0,z_0) & \partial^2 f/\partial z\partial z(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}.$$ ■

例 14.11 定义

$$f(x,y,z) = \sin(xyz) + e^{x+y} + z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

二阶导数的简短计算表明，在点(0，0，0)处，

$$\nabla^2 f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ ■

下面的定理说明了黑塞矩阵是如何参与多元函数截面的二阶导数计算的.

定理 14.12 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\mathbf{x}$的开子集，并假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数. 选取正数$r$，使得$\mathbf{x}$的开球$\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$包含在$\mathcal{O}$中，如果$\|\mathbf{h}\| < r$且$|t| \leqslant 1$，则

$$\frac{d}{dt}[f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})] = \langle \nabla f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}), \mathbf{h}\rangle \tag{14.10}$$

及

382

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})] = \langle \nabla^2 f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle. \tag{14.11}$$

证明 设I是包含点0与1的实数开区间，满足如果t属于I，则$\mathbf{x}+t\mathbf{h}$属于$\mathcal{O}$. 定义

$$\phi(t) = f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}), \quad t \in I.$$

方向导数定理蕴涵了如果t在I中，则

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}[f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})] = \langle \nabla f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}), \mathbf{h}\rangle = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{h}).$$

然而，对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，可以再把方向导数定理用于偏导数$\partial f/\partial x_i$: $\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，于是对上述等式两边求微分可得

$$\phi''(t) = \frac{d}{dt}[\phi'(t)] = \sum_{i=1}^n h_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\right] = \sum_{i=1}^n h_i \left\langle \nabla\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\mathbf{x}+t\mathbf{h}), \mathbf{h}\right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\mathbf{x}+t\mathbf{h}), \mathbf{h}\right\rangle h_i = \langle \nabla^2 f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle.$$ ■

上面的公式(14.11)对于下一节建立多元函数极值点的二阶导数准则是非常有用的. 但也需要对二次函数所达到的值的大小作某些估计. 本节余下部分将用来建立这些估计.

定义 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的范数用 $\|\boldsymbol{A}\|$ 表示，定义如下：

$$\|\boldsymbol{A}\| \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{2}}.$$

注意，如果定义$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，则 $\boldsymbol{A}$ 的范数的平方可以写成

$$\|\boldsymbol{A}\|^2 = \|\boldsymbol{A}_1\|^2+\|\boldsymbol{A}_2\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{A}_n\|^2.$$

引进上述矩阵范数的定义，是因为由此范数定义可有下述有用的柯西-施瓦茨不等式的变式. 383

定理 14.13(广义的柯西-施瓦茨不等式) 设 A 是 $n\times n$ 矩阵且设 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，则

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{u}\|. \tag{14.12}$$

证明 将(14.12)两边平方，显然，此不等式成立当且仅当

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2. \tag{14.13}$$

若对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，令$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = (\langle\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{u}\rangle,\cdots,\langle\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{u}\rangle).$$

于是，根据标准的柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|^2 &= (\langle\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{u}\rangle)^2+\cdots+(\langle\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{u}\rangle)^2\\ &\leqslant \|\boldsymbol{A}_1\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{A}_n\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\\ &= (\|\boldsymbol{A}_1\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{A}_n\|^2)\|\boldsymbol{u}\|^2\\ &= \|\boldsymbol{A}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2.\end{aligned}$$

于是证明了不等式(14.13)，因此也就证明了不等式(14.12). ■

推论 14.14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，Q：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 相伴的二次函数，且 $\boldsymbol{u}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的点，则

$$|Q(\boldsymbol{u})| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{u}\|^2. \tag{14.14}$$

证明 根据定义

$$|Q(\boldsymbol{u})| = |\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle|.$$

如果先用标准的柯西-施瓦茨不等式，再用广义的柯西-施瓦茨不等式便得到

$$|Q(\boldsymbol{u})| = |\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{u}\|^2.$$ ■

定义 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定的，如果对$\mathbb{R}^n$ 中所有非零点 $\boldsymbol{u}$，

$$\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle > 0;$$

称为负定的，如果对$\mathbb{R}^n$ 中所有非零点 $\boldsymbol{u}$，

$$\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle < 0.$$

完全能够借助矩阵的元素给出明确的准则以确定它何时为正定，何时为负定，最简单的情况是 2×2 矩阵. 384

命题 14.15 2×2 对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}$$

是正定的，当且仅当

$$a > 0 \quad 且\ ac - b^2 > 0.$$

证明 注意，与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相伴的二次函数 Q：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 如下式所示：

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

对于 $y \neq 0$ 的点 (x, y)，置 $t = x/y$，$p(t) = at^2 + 2bt + c$. 则有

$$Q(x,y) = y^2[a(x/y)^2 + 2b(x/y) + c] = y^2 p(t).$$

二次多项式 $p(t)$ 是正的，当且仅当 $a > 0$ 且 $ac - b^2 > 0$. 在 $y = 0$ 的情况下，$a > 0$ 当且仅当对所有 $x \neq 0$，$Q(x, 0) = ax^2 > 0$. ■

类似的论证表明命题 14.15 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的，当且仅当

$$a < 0 \quad 且 \quad ac - b^2 > 0.$$

命题 14.16 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 正定矩阵. 则存在正数 c，使得对 $\mathbb{R}^n$ 中所有 $\boldsymbol{u}$，

$$Q(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant c \| \boldsymbol{u} \|^2.$$

证明 由于二次函数 Q：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是连续函数(即分量射影函数)的积的和，它是连续的. 另一方面，单位球面 $S = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{u}\| = 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集. 根据列紧定理(定理 11.18)，单位球面是列紧的. 于是由极值定理(定理 11.22)知，在 S 上存在一点，它是二次函数在 S 上的限制的极小值点. 定义 c 是二次函数在此极小值点的函数值. 因为假定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，所以 c 是正数且对 S 中所有的点 $\boldsymbol{u}$，

$$Q(\boldsymbol{u}) \geqslant c. \tag{14.15}$$

而对 $\mathbb{R}^n$ 中所有点 $\boldsymbol{u}$ 及所有实数 λ，$\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$，所以

385

$$Q(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda^2 Q(\boldsymbol{u}). \tag{14.16}$$

此外，如果 $\boldsymbol{u}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意非零点，则

$$Q(\boldsymbol{u}) = Q\left(\|\boldsymbol{u}\| \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \right).$$

由不等式(14.16)可得

$$Q(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 Q\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \right).$$

但 $\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|$ 是 s 中的点，所以由不等式(14.15)得，

$$Q(\boldsymbol{u}) \geqslant c \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

显然，如果 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，该不等式也成立 . ■

习题

1. 定义

$$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + 2xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a. 定义 ϕ：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $\phi(t) = f(2t, 3t)$，$t \in \mathbb{R}$. 直接计算 $\phi''(0)$.

b. 求函数 f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在点 $(0, 0)$ 处的黑塞矩阵，并用公式(14.11)计算

$$\phi''(0) = \frac{d^2}{dt^2}[f(2t, 3t)] \Big|_{t=0}.$$

2. 设$\mathcal{O}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz>-1\}$，定义$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$如下：

$$g(x,y,z)=\sqrt{1+xyz},\quad (x,y,z)\in\mathcal{O}.$$

a. 定义$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为$\phi(t)=g(3t,1-t,t)$，$t\in\mathbb{R}$. 直接计算$\phi''(0)$.

b. 求函数$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$在点$(0,1,0)$处的黑塞矩阵，并用公式(14.11)计算

$$\phi''(0)=\frac{d^2}{dt^2}[g(3t,1-t,t)]\bigg|_{t=0}.$$

3. 假定函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，并假定在原点$(0,0)$处，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad 及 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

令$\boldsymbol{h}$是平面$\mathbb{R}^2$中的非零点，且假定

$$\langle\nabla^2 f(0,0)\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle>0.$$

用一元函数的有关定理证明：存在某个正数r，使得

$$若 0<|t|<r.\quad f(t\boldsymbol{h})>f(0,0).$$

386

4. 在习题3中，假定对$\mathbb{R}^2$中的每个非零点$\boldsymbol{h}$，

$$\langle\nabla^2 f(0,0)\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle>0.$$

解释为什么这不是直接推断原点为函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的局部极小值点的充分条件.

5. 设a，b及c是实数且$a\neq0$，定义$p(t)=at^2+2bt+c$.

a. 证明：对每个数t，$p(t)>0$当且仅当$a>0$且$ac-b^2>0$.

b. 证明：对每个数t，$p(t)<0$当且仅当$a<0$且$ac-b^2>0$.

6. 假定$\boldsymbol{A}$是3×3对称矩阵且是正定的. 证明：下面四条性质成立且从每一条性质都可得到关于矩阵$\boldsymbol{A}$的表值的信息.

a. $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle>0$，$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2\rangle>0$，且$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3\rangle>0$.

b. 对所有非零$\boldsymbol{u}=(h,k,0)$，$h,k\in\mathbb{R}$，有$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle>0$.

c. 对所有非零$\boldsymbol{u}=(0,h,k)$，$h,k\in\mathbb{R}$，有$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle>0$.

d. 对所有非零$\boldsymbol{u}=(h,0,k)$，$h,k\in\mathbb{R}$，有$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle>0$.

7. 对下列每一个二次函数，求与之相伴的2×2矩阵：

a. $h(x,y)=x^2-y^2$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b. $g(x,y)=x^2+8xy+y^2$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

8. 通过选择适当的矩阵$\boldsymbol{A}$，证明：广义的柯西–施瓦茨不等式包含了标准的柯西–施瓦茨不等式作为其特例.

9. 求与如下定义的二次函数$Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$相伴的$3\times3$矩阵：

$$Q(x,y,z)=x^2-y^2+3xy+yz-z^2,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

10. 定义函数$Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为$Q(x)=x^4$. 注意到对所有$x\neq0$，

$$Q(x)>0.$$

证明：不存在正数c，使得对所有$x\neq0$，

$$Q(x)\geqslant cx^2.$$

解释为什么这与命题14.16不矛盾.

*14.3 二阶逼近和二阶导数检验

定义 设A是$\mathbb{R}^n$包含点$\boldsymbol{x}$的子集，并考虑函数$f:A\to\mathbb{R}$：

(i)点$\boldsymbol{x}$称为函数$f:A\to\mathbb{R}$的局部最大值点，如果存在某个正数r，使得

$$若 \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} 在 A 中且 \|\boldsymbol{h}\|<r,\quad 则 f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\leqslant f(\boldsymbol{x}).$$

387

(ii)点$\boldsymbol{x}$称为函数$f:A\to\mathbb{R}$的局部最小值点，如果存在某一正数r，使得

$$\text{若 } \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \text{ 在 } A \text{ 中且 } \|\boldsymbol{h}\| < r, \text{则 } f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \geqslant f(\boldsymbol{x}).$$

(iii) 点 $\boldsymbol{x}$ 称为函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 的局部极值点，如果它或者是 $f:A\to\mathbb{R}$ 的局部最小值点或者是 $f:A\to\mathbb{R}$ 的局部最大值点.

立即可以得到一点是函数局部极值点的如下的必要条件.

命题 14.17 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集，并假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数. 如果点 $\boldsymbol{x}$ 是函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的局部极值点，则

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}. \tag{14.17}$$

证明 由于 x 是 $\mathcal{O}$ 的内点，于是可选取正数 r，使得开球 $\mathcal{B}_r(x)$ 包含在 $\mathcal{O}$ 中. 固定下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，定义函数 ϕ：$(-r, r)\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\phi(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i), \quad |t| < r.$$

则点 0 是函数 ϕ：$(-r, r)\to\mathbb{R}$ 的极值点，所以

$$\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

此式对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都成立，这就意味着(14.17)式成立. ■

注意，为了寻求局部极值点，首先必须在 $\mathcal{O}$ 中求使得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{14.18}$$

的点 $\boldsymbol{x}$. 然而，方程(14.18)是 n 个未知变量的 n 个纯量方程组. 除非函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有非常简单的形式，否则不可能求得(14.18)的明确解. 因为事实上哪怕是一元可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，除非 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 非常简单，否则也不可能明确地求得下列方程的所有解 x：

$$f'(x) = 0.$$

例 14.18 考虑定义如下的函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，$g$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 及 h：$\mathbb{R}^2-\mathbb{R}$：

$$f(x,y) = x^2+y^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
$$g(x,y) = -x^2-y^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
$$h(x,y) = x^2-y^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

388

上述每一个函数都是连续可微的，且原点(0, 0)是上述每一个函数在平面上仅有的梯度向量为零的点. 点(0, 0)是 f 的局部极小值点，是 g 的局部极大值点，但不是 h 的局部极值点. ■

在上述例子中，仅仅因为函数是如此简单才使得我们能够确定它们在点(0, 0)邻近处的性状. 为了分析更复杂的函数，需要以某种方式构造二阶偏导数集以便给出多元函数的“二阶导数检验法”的公式. 下面将会看到正确的做法是将二阶导数排列为黑塞矩阵，然后检查与此矩阵相伴的二次函数.

在第 8 章，我们考虑用泰勒多项式逼近一元函数，得到函数与它的多项式逼近之间的差的估计. 拉格朗日余数定理提供了这样的估计. 我们需要该定理的下列特例.

定理 14.19 设 I 是实数开区间，假定函数 f：$I\to\mathbb{R}$ 有二阶导数. 则对区间 I 中的每一对点 x 与 $x+h$，存在数 $\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2. \tag{14.19}$$

由关于一元函数的这一结果及在14.1节中所得到的多元函数导数的计算可得下面的定理.

定理 14.20 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数. 则对$\mathcal{O}$中每一对具有它们之间的段也位于$\mathcal{O}$中之性质的点$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$，存在数$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle. \tag{14.20}$$

证明 选择I为包含0及1的实数开区间，满足若t在I中，则$\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}$属于$\mathcal{O}$. 定义函数$\psi: I\to\mathbb{R}$如下：

$$\psi(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}),\quad t\in I.$$

注意，定理14.12蕴涵了函数$\psi: I\to\mathbb{R}$有二阶导数且有下列的一阶及二阶导数公式：

$$\psi'(t)=\langle\nabla f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}),\boldsymbol{h}\rangle \quad 及 \quad \psi''(t)=\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle,\quad t\in I. \tag{14.21}$$

389

就$x=0$及$h=1$将定理14.19应用于函数$\psi: I\to\mathbb{R}$，选择数$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$\psi(1)=\psi(0)+\psi'(0)+\frac{1}{2}\psi''(\theta), \tag{14.22}$$

将$\psi(1)$与$\psi(0)$的值及上面对$\psi'(0)$与$\psi''(\theta)$的公式代入上式，所得到的就是公式(14.20) ■

定理 14.21（二阶逼近定理） 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\boldsymbol{x}$的开子集，假定函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数. 则

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\left[f(\boldsymbol{x})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle\right]}{\|\boldsymbol{h}\|^2}=0. \tag{14.23}$$

证明 由于点$\boldsymbol{x}$是$\mathcal{O}$的内点，可选取正数r，使得开球$B_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$中. 定义

$$R(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\left[f(\boldsymbol{x})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle\right],\quad \|\boldsymbol{h}\|<r.$$

必须证明

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{R(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^2}=0. \tag{14.24}$$

固定$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{h}$，其中$0<\|\boldsymbol{h}\|<r$. 由定理14.20，可选取数$\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle,$$

所以

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{h})&=\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle-\frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle\\&=\frac{1}{2}\langle[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})-\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})]\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle.\end{aligned} \tag{14.25}$$

用这一公式及广义的柯西-施瓦茨不等式推得

$$|R(\boldsymbol{h})|\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})-\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\|\|\boldsymbol{h}\|^2.$$

用 $\|\boldsymbol{h}\|^2$ 除此估计式，得到

390

$$\frac{|R(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|^2} \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}) - \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\|. \tag{14.26}$$

但已假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶偏导数，所以

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\|\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}) - \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\| = \boldsymbol{0},$$

于是从估计式(14.26)得(14.24)式. ■

定理 14.22(二阶导数检验法) 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集，假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶偏导数. 假设

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0.$$

(i)如果黑塞矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$是正定的，则点 $\boldsymbol{x}$ 是函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的严格的局部最小值点.

(ii)如果黑塞矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$是负定的，则点 $\boldsymbol{x}$ 是函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的严格的局部最大值点.

证明 只需要考虑情形(i). 情形(ii)可由(i)通过 $-f$ 代替 f 得到. 假定黑塞矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$是正定的. 由于点 $\boldsymbol{x}$ 是$\mathcal{O}$的内点，可选取正数 r，使得开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$中. 证明的策略是把差式 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})$写成

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{h}) + R(\boldsymbol{h}), \tag{14.27}$$

其中 Q: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是正定二次函数且

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{R(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = 0. \tag{14.28}$$

事实上，如果定义

$$R(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \left[f(\boldsymbol{x}) + \langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle\right], \quad \|\boldsymbol{h}\| < r, \tag{14.29}$$

则二阶逼近定理断定(14.28)成立. 比外，如果定义 Q: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是与二分之一的黑塞矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$相伴的二次函数，则此二次函数是正定的. 最后，由于$\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，可以改写(14.29)得到(14.27).

由于二次函数 Q: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是正定的，可使用命题 14.16 选取正数 c，使得对$\mathbb{R}^n$ 中所有 $\boldsymbol{h}$，

$$Q(\boldsymbol{h}) \geqslant c\|\boldsymbol{h}\|^2.$$

另一方面，用(14.28)可选取小于 r 的正数 δ，使得

391

$$\text{若}\quad 0 < \|\boldsymbol{h}\| < \delta,\quad \text{则}\frac{|R(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|^2} < \frac{c}{2}.$$

比较这两个估计式，由(14.27)可得

$$\text{如果}\,0 < \|\boldsymbol{h}\| < \delta,\quad \text{则}\,f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{h}) + R(\boldsymbol{h}) \geqslant c\|\boldsymbol{h}\|^2 + R(\boldsymbol{h}) > \frac{c}{2}\|\boldsymbol{h}\|^2.$$

所以点 $\boldsymbol{x}$ 是函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的严格局部最小值点. ■

在命题 14.15 中，我们刻划过正定对称的 2×2 矩阵的特性. 因此记录下二阶导数检验法的下列特例是有用的.

推论 14.23 设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$ 的包含点(x_0, y_0)的开子集，假定函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶偏导数. 假定

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad 及 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

还假定

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$$

以及

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2>0.$$

则点(x_0, y_0)是$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的一个严格的局部最小值点.

习题

1. 分析下列函数的局部极值：

a. $f(x, y)=e^{x^2-4y+y^2}$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

b. $g(x, y, z)=e^{x^2-4y+y^2}+z^2$，$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$.

c. $f(x, y)=(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

d. $f(x, y)=x^3y^2(6-x-y)$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$中$x>0$及$y>0$的区域.

2. 求2×2对称矩阵为负定矩阵的充分必要条件. 运用这个信息叙述并证明：一点是二元函数局部最大值点的充分条件.

3. 定义K是闭矩形$\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqslant x\leqslant1, -\pi\leqslant y\leqslant\pi\}$，定义函数$f: K\to\mathbb{R}$为$f(x, y)=xe^{-x}\cos y$，$(x, y)\in K$. 求函数$f: K\to\mathbb{R}$的最大与最小值.（提示：分别地分析在$K$边界上的情形）.

4. 证明：点$(-1, 1)$是如下定义的函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的最小值点：

$$f(x,y)=(2x+3y)^2+(x+y-1)^2+(x+2y-2)^2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

392

5. 定义

$$f(x,y)=x^2+y^2-3xy,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

解释为什么函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$没有局部极值点.

6. 分析如下定义的函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$的局部极值点：

$$f(x,y)=\cos(x+y)+\sin(x+y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

7. 假设函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，设$\mathbf{x}$是$\mathbb{R}^n$中满足$\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$的点. 还假定在$\mathbb{R}^n$中存在点$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$，满足

$$\langle\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle>0 \quad 及 \quad \langle\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle<0.$$

证明：点$\mathbf{x}$既不是$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$的局部最大值点也不是$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$的局部最小值点.

8. 假定函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数. 设$\mathbf{x}$是$\mathbb{R}^n$中满足$\nabla f(\mathbf{x})=0$的点，并且使得黑塞矩阵$\nabla^2 f(\mathbf{x})$的所有元素是0. 通过举例证明：这样的点$\mathbf{x}$可能是局部最大值点、局部最小值点或者两者都不是.

9. 证明：如果函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，且如果在$\mathbb{R}^n$中点$\mathbf{x}$处，$\nabla f(\mathbf{x})=0$及$\nabla^2 f(\mathbf{x})$正定. 则存在正数$c$和$\delta$，使得

$$若\ \|\mathbf{h}\|<\delta,\quad 则 f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})\geqslant c\|\mathbf{h}\|^2.$$

10. 证明：若黑塞矩阵在某点是负定的，则该点是严格局部最大值点. 从而完成二阶导数检验法的证明.

11. 应用一阶或二阶逼近定理计算下列极限：

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+xy-y)-(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b. $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{s^2t}{\sqrt{s^2+t^2}}$.

c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x-y}-1-x+y}{x^2+y^2}$.

d. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x-y+xy)-(1-1/2x^2+xy-1/2y^2)}{x^2+y^2}$.

393

第 15 章　用线性映射逼近非线性映射

15.1　线性映射和矩阵

现在来研究非线性映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$，其中$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，n 与 m 是正整数．为研究这样一般的映射，我们采用前面常用的策略：用形式简单得多的映射逼近这样的映射．这里，我们把线性映射看作是较简单的映射．

本节我们考虑线性映射以及线性映射与矩阵之间的对应．特别地，建立线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的可逆性及与它相关联的 $n\times n$ 矩阵的可逆性之间的等价关系．15.2 节将描述用线性映射逼近非线性映射的方法．导数矩阵及微分是极重要的概念．15.3 节将研究第 4 章为复合函数求导数所建立的链式法则的推广，建立一般的非线性映射的复合求导数公式．

定义　映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 称为**线性映射**，如果对$\mathbb{R}^n$ 中的每一对点 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 以及每一对数 α 与 β，

$$\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})+\beta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}).\tag{15.1}$$

例 15.1　对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，第 i 个分量射影函数

$$p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

是线性映射．这可由加法及标量乘法的定义直接得到，因为对$\mathbb{R}^n$ 中每一对点 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 与每一对数 α 及 β，

394

$$p_i(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha u_i+\beta v_i=\alpha p_i(\boldsymbol{u})+\beta p_i(\boldsymbol{v}).$$ ■

命题 15.2　对$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{a}$，定义映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：

$$对\mathbb{R}^n 中所有 \boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle.\tag{15.2}$$

那么映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是线性的．而且对每个线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，在$\mathbb{R}^n$ 中存在唯一的点 $\boldsymbol{a}$，使得 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 由公式(15.2)所定义．

证明　给定$\mathbb{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{a}$，如我们在前面所提到过的，内积具有性质：对$\mathbb{R}^n$ 中每一对点 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 与每一对数 α 及 β，

$$\langle\boldsymbol{a},\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}\rangle=\alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle+\beta\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}\rangle.$$

这正是映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是线性映射的含义．

现假设 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是任意的线性映射．对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，定义 $a_i=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)$，然后定义$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ \cdots,\ a_n)$．于是由 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的线性性，对$\mathbb{R}^n$ 中所有 $\boldsymbol{x}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{T}(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)\\&=x_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+x_n\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_n)\\&=x_1a_1+\cdots+x_na_n\\&=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle.\end{aligned}$$ ■

注意，对下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，第 i 个分量射影函数 p_i：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 由公式(15.2)所定义，其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i$ 是$\mathbb{R}^n$ 中第 i 个分量为 1 而其他分量为 0 的向量．

例 15.3 线性变换 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 由指定三个数 a, b, c 和定义

$$T(x,y,z) = ax + by + cz, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

完全确定. ■

对线性映射 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，其中 m 是大于 1 的整数，命题 15.2 有一个自然的推广. 为理解这个推广究竟是什么，对线性映射 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 及下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$，回想函数

$$T_i = p_i \circ T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

称为映射 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的第 i 个分量函数及对$\mathbb{R}^n$ 中所有的 x,

$$T(x) = (T_1(x), \cdots, T_m(x)).$$

395

命题 15.4 映射 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性映射当且仅当它的分量函数是线性映射.

证明 对$\mathbb{R}^n$ 中每一对点 u 及 v 与每一对数 α 及 β，由$\mathbb{R}^m$ 中相等的定义，

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \tag{15.3}$$

当且仅当对每个下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$,

$$p_i(T(\alpha u + \beta v)) = p_i(\alpha T(u) + \beta T(v)). \tag{15.4}$$

注意到分量射影函数是线性的，因此对每个下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$,

$$p_i(\alpha T(u) + \beta T(v)) = \alpha p_i(T(u)) + \beta p_i(T(v)).$$

于是等式(15.3)成立当且仅当对每个下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$,

$$T_i(\alpha u + \beta v) = \alpha T_i(u) + \beta T_i(v). \tag{15.5}$$

(15.3)与(15.5)的等价正是命题的证明所需要的结果. ■

例 15.5 映射 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 可以写成

$$T(x,y) = (g(x,y), h(x,y)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

其中 $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 及 $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是分量函数. 命题 15.4 蕴涵映射 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性的当且仅当函数 $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 与 $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是线性的. 由命题 15.2 中所建立的线性函数的特性可得，$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性的当且仅当存在数 a, b, c 及 d，使得

$$T(x,y) = (ax + by, cx + dy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$ ■

设 m 与 n 是正整数. 回想所谓 $m \times n$ 矩阵是指由 m 行与 n 列实数组成的矩形阵列，如果这样的 $m \times n$ 矩阵用 A 表示，可写成

$$A = [a_{ij}],$$

其中对每一对下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$及 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$，$a_{ij}$表示在矩阵 A 的第 i 行与第 j 列的数，称 a_{ij}为矩阵的第 ij 个元素，有时为方便起见，用$(A)_{ij}$表示.

定义 对 $m \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$及$\mathbb{R}^n$ 中的点 x，用符号 Ax 表示$\mathbb{R}^m$ 中这样的点：对于每个下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$，该点第 i 个分量等于 A 的第 i 行与 x 的内积，从而

396

$$Ax \equiv y,$$

其中对每个下标 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$,

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

矩阵与线性映射之间的基本对应由下面的定理所描述.

定理 15.6 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，定义映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 如下：

$$\text{对}\mathbb{R}^n\text{中所有 }\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{15.6}$$

那么映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 而且对每个线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，存在唯一的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，使得 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 由(15.6)所定义. 对每对下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 及 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 ij 个元素由如下公式所确定：

$$a_{ij} = \langle \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j),\boldsymbol{e}_i\rangle. \tag{15.7}$$

证明 由于映射是线性映射当且仅当它的分量函数是线性映射，为验证公式(15.6)定义了一个线性映射，必须要证明对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，分量函数 $p_i\circ\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是线性的. 但正是根据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的定义，对$\mathbb{R}^n$ 中所有的 $\boldsymbol{x}$，

$$(p_i\circ\boldsymbol{T})(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{x}\rangle,$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，所以由命题 15.2 得，每个分量函数是线性的.

现设 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是任意的线性映射，则每个分量函数是线性的. 于是根据命题 15.2，对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，可在$\mathbb{R}^n$ 中选点 $\boldsymbol{A}_i$，使得第 i 个分量函数定义如下：

$$\text{对}\mathbb{R}^n\text{中所有 }\boldsymbol{x},\quad (p_i\circ\boldsymbol{T})(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{x}\rangle. \tag{15.8}$$

定义 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其第 i 行为 $\boldsymbol{A}_i$，则(15.8)与(15.6)等价.

注意，如果 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，则对每对下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 与 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，$\boldsymbol{A}$ 的第 ij 个元素是第 i 行的第 j 个分量，即 $a_{ij}=\langle\boldsymbol{A}_i,\ \boldsymbol{e}_j\rangle$. 于是在(15.8)中置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_j$，有

$$a_{ij} = \langle\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle = (p_i\circ\boldsymbol{T})(\boldsymbol{e}_j) = \langle\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j),\boldsymbol{e}_i\rangle. \qquad \blacksquare$$

定义 对线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，满足

397

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad x\in\mathbb{R}^n$$

的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为与映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 相伴的矩阵.

例 15.7 假设映射 $\boldsymbol{T}$: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是线性映射且

$$\boldsymbol{T}(1,0) = (-4,1/2,1) \quad \text{及} \quad \boldsymbol{T}(0,1) = (0,6,10).$$

由公式(15.7)得，与此映射相伴的 3×2 矩阵是由

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1/2 & 6 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

给出的矩阵 $\boldsymbol{A}$，从而由公式(15.6)可知，对$\mathbb{R}^2$ 中所有$(x,\ y)$，

$$\boldsymbol{T}(x,y) = (-4x,x/2+6y,x+10y). \qquad \blacksquare$$

例 15.8 定义映射 $\boldsymbol{T}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 如下：

$$\text{对}\mathbb{R}^3\text{中所有}(x,y,z),\quad \boldsymbol{T}(x,y,z) = (x,z).$$

这个映射是线性的且与它相伴的 2×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 定义如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

例 15.9 对于数 θ，定义 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是与矩阵 A 相伴的线性映射. 这个线性映射把平面上的点绕原点逆向旋转 θ 弧度(如图 15.1 所示). 这是因为如果平面$\mathbb{R}^2$ 上的点(x, y)写成极坐标$(r\cos\phi, r\sin\phi)$, 运用正弦及余弦的加法性质经直接计算表明, 它的象 $T(x, y)$是点$(r\cos(\theta+\phi), r\sin(\theta+\phi))$.

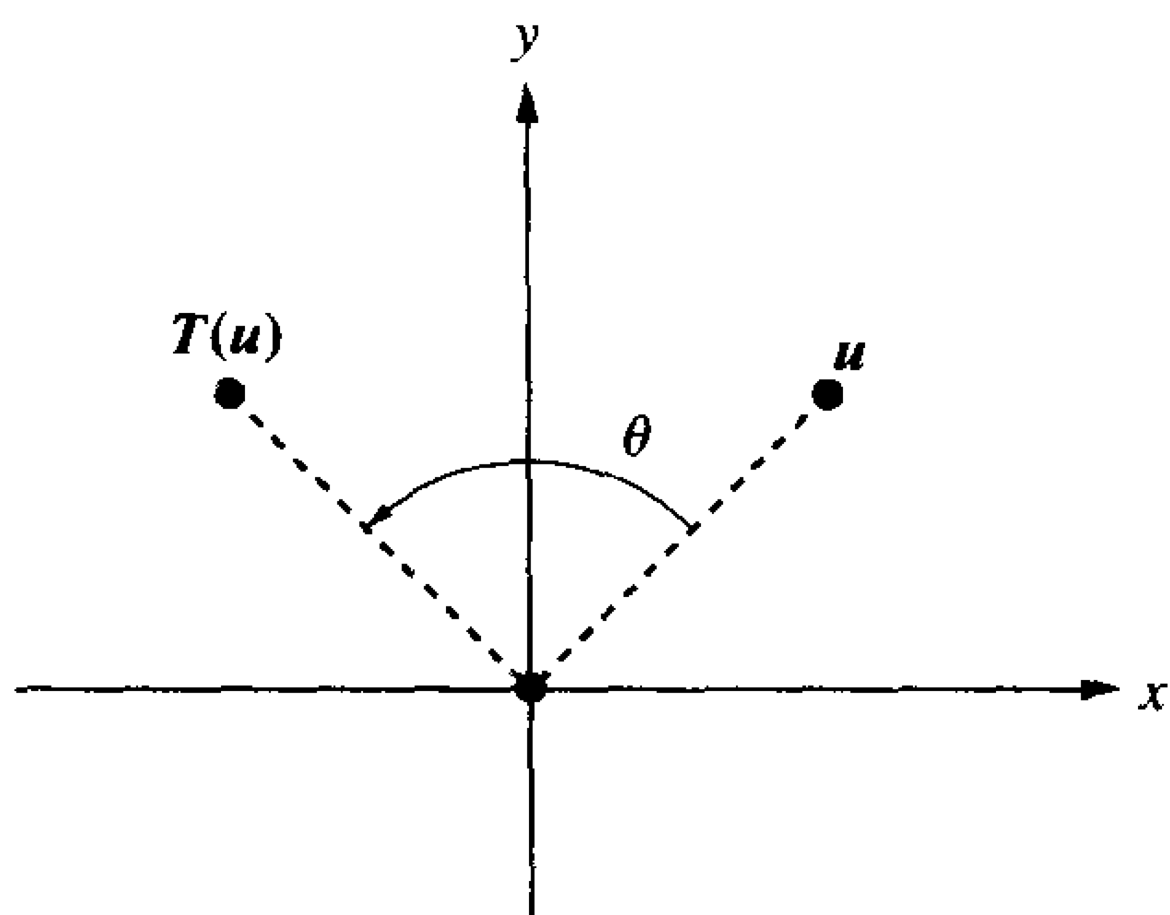


图 15.1 绕原点旋转 θ 弧度 ■ [398]

例 15.10 在平面$\mathbb{R}^2$ 中, 考虑直线 $\ell=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x\}$. 对平面$\mathbb{R}^2$ 中的点(x, y), 定义 $T(x, y)$是直线 ℓ 上离(x, y)最近的点, 如图 15.2 所示. 这就定义了映射 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 它是线性映射. 因为从内积的几何意义我们有下列公式: 设$(x_0, y_0)=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, 于是$(x_0, y_0)$是在 ℓ 上长度为 1 的点. 由简单的三角法运用命题 10.3 论证可得, 对$\mathbb{R}^2$ 中所有(x, y),

$$\begin{aligned}T(x,y) &= \langle (x,y),(x_0,y_0)\rangle (x_0,y_0)\\ &= \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2},\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).\end{aligned}$$

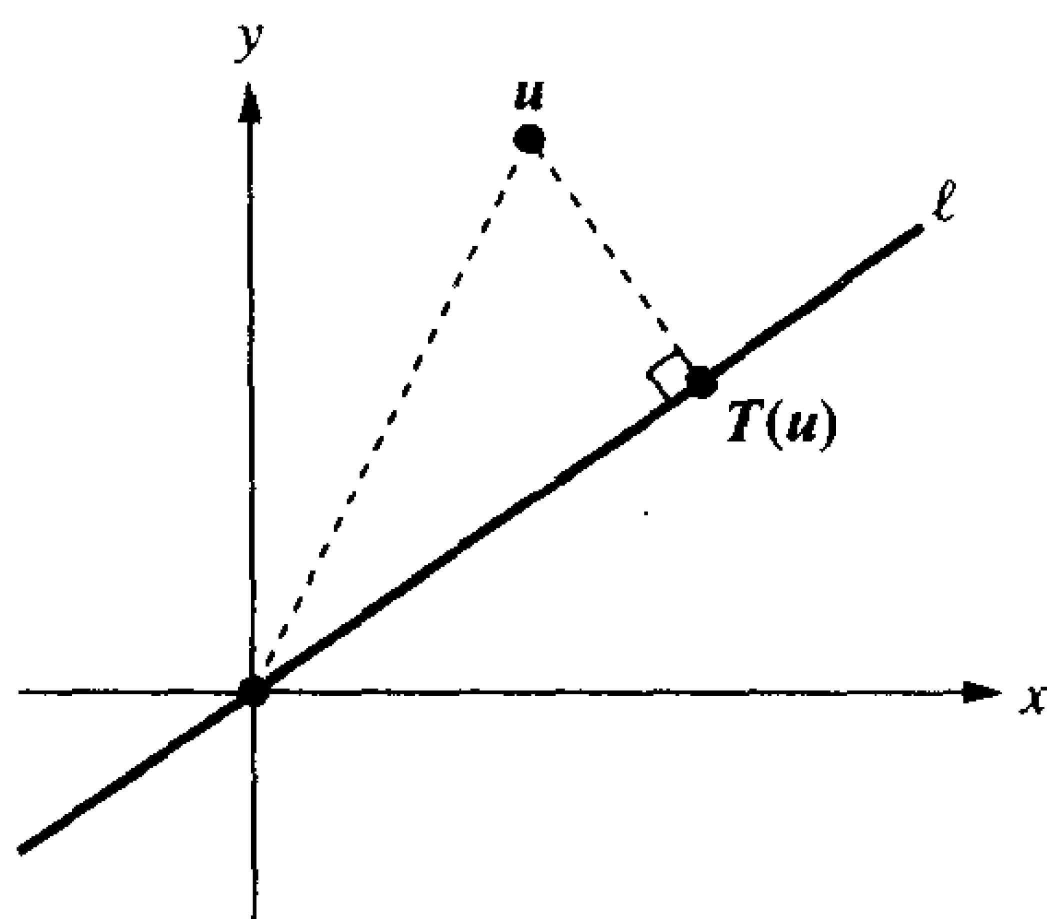


图 15.2 在角平分线上最接近的点 ■

对两个线性映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 与 $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 以及两个数 α 与 β, 定义映射 $\alpha T+\beta S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 如下:

$$对\mathbb{R}^n 中所有 x,\quad (\alpha T+\beta S)(x)\equiv\alpha T(x)+\beta S(x).$$

这样的映射称为映射 T 和 S 的线性组合. 立即可得线性映射的线性组合仍是线性映射.

定义 对两个 $m\times n$ 矩阵 A 与 B 及两个数 α 与 β, 矩阵 $\alpha A+\beta B$ 是 $m\times n$ 矩阵, 它的第 ij 个元素$(\alpha A+\beta B)_{ij}$定义如下:

$$(\alpha A+\beta B)_{ij}\equiv\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}.$$

矩阵的线性组合的这个定义是这样构造的：与两个线性映射 T 及 S 的线性组合相伴的矩阵是分别与 T 及 S 相伴的矩阵同样的线性组合. 我们把这一点完整阐述为如下命题，其证明可由射影函数的线性性质及公式(15.8)直接推出.

399

命题 15.11 假定线性映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 与 $m\times n$ 矩阵 A 相伴，线性映射 $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 与 $m\times n$ 矩阵 B 相伴. 那么对任意一对数 α 与 β，线性映射 $\alpha T+\beta S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 与 $m\times n$ 矩阵 $\alpha A+\beta B$ 相伴.

某些线性映射可以复合. 特别地，给定线性映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 及线性映射 $S:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$，则复合映射 $S\circ T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 定义如下：对$\mathbb{R}^n$ 中所有的 x，

$$(S\circ T)(x)\equiv S(T(x)).$$

不难验证复合映射仍然是线性映射.

定义 对正整数 n，m 及 k，设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=[b_{ij}]$ 是 $k\times m$ 矩阵. 那么积矩阵 BA 定义为 $k\times n$ 矩阵，其第 ij 个元素 $(BA)_{ij}$ 定义为：

$$(BA)_{ij}\equiv\sum_{\ell=1}^{m}b_{i\ell}a_{\ell j}. \tag{15.9}$$

公式(15.9)断定 BA 的第 ij 个元素是 B 的第 i 行与 A 的第 j 列的内积. 矩阵积是这样定义的：与线性映射的复合映射相伴的矩阵乃是与构成复合的映射相伴的矩阵的乘积. 我们把这一点完整阐述为如下命题，其证明仍是由射影的线性性质及公式(15.8)推出.

命题 15.12 对自然数 n，m 及 k，假定线性映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 与 $m\times n$ 矩阵 A 相伴，线性映射 $S:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ 与 $k\times m$ 矩阵 B 相伴. 那么复合映射 $S\circ T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 与 $k\times n$ 积矩阵 BA 相伴.

推论 15.13 对自然数 n，m，k 及 ℓ，设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $k\times m$ 矩阵，c 是 $\ell\times k$ 矩阵，则

$$C(BA)=(CB)A. \tag{15.10}$$

证明 设线性映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 与 $m\times n$ 矩阵 A 相伴，线性映射 $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 与 $k\times m$ 矩阵 B 相伴，线性映射 $L:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$ 与 $\ell\times k$ 矩阵 C 相伴. 命题15.12蕴涵映射 $S\circ T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 与矩阵 BA 相伴，映射 $L\circ(S\circ T):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ 与矩阵 $C(BA)$ 相伴. 类似地，映射 $(L\circ S)\circ T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ 与矩阵 $(CB)A$ 相伴. 但对$\mathbb{R}^n$ 中每个点 x，

400

$$((L\circ S)\circ T)(x)=L(S(T(x)))=(L\circ(S\circ T))(x),$$

这表明映射 $(L\circ S)\circ T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ 与 $L\circ(S\circ T):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ 是相等的. 于是它们的相伴矩阵是相等的，即公式(15.10)成立. ■

公式(15.10)中所陈述的矩阵乘法的性质称为矩阵乘法的结合性质(associative property). 对两个矩阵 A 和 B，积矩阵 BA 仅当 B 中的列数等于 A 中的行数时才有定义. 于是当 BA 有定义时 AB 未必有定义. 此外，当 $n=m=k$ 时，BA 与 AB 理所当然地定义为 $n\times n$ 矩阵. 一般来说，$AB=BA$ 不成立. 在代数语言中，这意味着矩阵乘法不是可交换的.

例 15.14 定义 2×2 矩阵 A 与 B 如下：

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\quad 及\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

那么

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad 而 \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

回想给定任意两个集合 A 与 B 及映射 $F:A \to B$，这个映射的象用 $F(A)$ 表示，由 B 中所有这样的点 b 组成的子集定义：对于 B 中的点 b，存在 A 中的点 a，使得 $b = F(a)$. 此映射称为一对一(one to one)的，如果对 $F(A)$ 中每一点 b，在 A 中恰有一个点 a，使得 $F(a) = b$. 此外，映射 $F:A \to B$ 称为映上(onto)的，如果 $F(A)$ 等于 B. 最后，映射 $F:A \to B$ 称为可逆的(invertible)，如果它既是一对一的又是映上的. 给定一个可逆映射 $F:A \to B$，对 B 中每个点 b，定义 $F^{-1}(b)$ 是 A 中唯一使得 $F(a) = b$ 的点 a. 这就定义了映射 $F^{-1}:B \to A$，称为映射 $F:A \to B$ 的逆映射(inverse mapping).

可逆线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 有逆映射，并且也是线性映射. 为验证这一点，必须要证明对 $\mathbb{R}^n$ 中每一对点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 和每一对数 α 和 β,

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}) + \beta \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{v}).$$

根据逆映射的定义，上式意味着

$$\boldsymbol{T}(\alpha \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}) + \beta \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{v})) = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}.$$

然而，最后这个不等式可由映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的线性性质及逆映射的定义推出.

在 $\mathbb{R}^n$ 上的恒等映射(identity mapping，用 $\boldsymbol{Id}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 表示)是把每一点映射到它自身的映射，即对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{Id}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}$. 与恒等映射相伴的 $n \times n$ 矩阵是对角线上为 1 其余位置为 0 的矩阵，用 $\boldsymbol{I}_n$ 表示，并称为单位矩阵(identity matrix). 401

正如映射有可逆性概念一样，$n \times n$ 矩阵也有可逆性概念.

定义 *$n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为可逆的，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 具有性质*

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n \quad 及 \quad \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n.$$

*只有一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 具有上述性质(见习题 11)，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示，并称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的***逆矩阵**(inverse matrix).

在线性映射的可逆性和与它相伴的矩阵的可逆性之间有下列重要的等价性.

定理 15.15 *对于与 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相伴的线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 来说，下面两个断言是等价的：*

(i) 映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是可逆映射.

(ii) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

证明 首先，假定映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是可逆映射，逆映射 $\boldsymbol{T}^{-1}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 也是线性映射. 设逆映射 $\boldsymbol{T}^{-1}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 与 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相伴.

恒等映射 $\boldsymbol{Id}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 相伴，而与两个映射的复合相伴的矩阵是与构成复合的映射相伴的矩阵的积. 于是由

$$\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{Id}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad 及 \quad \boldsymbol{T}^{-1} \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{Id}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

可推得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n \quad 及 \quad \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并且它的逆矩阵是 $\boldsymbol{B}$.

为证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可逆性蕴涵映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的可逆性，假定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，定义

$S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是与矩阵 A^{-1} 相伴的线性映射. 而与复合映射 $S \circ T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 相伴的矩阵是 $A^{-1}A = I_n$，这意味着对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的 x，

$$(S \circ T)(x) = I_n x = x.$$

即对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的 x，

$$S(T(x)) = x. \tag{15.11}$$

类似地，由于 $AA^{-1} = I_n$，因此对 R^n 中所有的 x，

$$T(S(x)) = x. \tag{15.12}$$

402 恒等式(15.11)及(15.12)蕴涵了映射 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是可逆的(见习题 12)及它的逆是 $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. ■

虽然定理 15.15 断定了从 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的线性映射的可逆性和它的相伴的 $n \times n$ 矩阵的可逆性之间等价，但是它没有给出如何确定这样的一个映射实际上是可逆的. 对每个 $n \times n$ 矩阵 A，定义有一个数 $\det A$，称为 A 的行列式(determinant). 行列式在代数、几何及分析中起着重要作用. 其性质之一是 $n \times n$ 矩阵是可逆的当且仅当它的行列式是非零数.

对 $n \times n$ 矩阵 A 和一对下标 i 和 j，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$ 及 $1 \leqslant j \leqslant n$，$A$ 的第 ij 个子式(minor，用 A^{ij} 表示)是用从矩阵 A 中去掉第 i 行及第 j 列所得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵.

1×1 矩阵的行列式就是它单个元素的值. 假定 k 是正整数且对所有的 $k \times k$ 矩阵，行列式已定义，则若 A 是 $(k+1) \times (k+1)$ 矩阵，A 的行列式定义如下：

$$\det A \equiv \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A^{1j}. \tag{15.13}$$

由数学归纳法原理，对所有的方阵，行列式都已定义.

例 15.16 对 2×2 矩阵 $A = [a_{ij}]$，A 的行列式由下式给出：

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det A^{11} - a_{12} \det A^{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

■

例 15.17 对 3×3 矩阵 $A = [a_{ij}]$，A 的行列式由下式给出：

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det A^{11} - a_{12} \det A^{12} + a_{13} \det A^{13} \\ &= a_{11} \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] - a_{12}[a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}] + a_{13}[a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}].\end{aligned}$$

■

对于一般的 $n \times n$ 矩阵的行列式，这里我们不作详细讨论. 附录 B 中包括了关于 3×3 矩阵
403 的行列式及 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量的向量积与内积的讨论以及体积的计算[⊖].

定理 15.18(克莱姆法则(Cramer's Rule)) *$n \times n$ 矩阵 A 是可逆的当且仅当 $\det A \neq 0$. 此外，如果 $\det A \neq 0$，则存在下列的逆矩阵公式：*

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A^{ji}).$$

⊖ 线性代数初等部分可参见 David C. Lay 的《Linear Algebra and Its Applications》(Boston：Addison Wesley，2002)，高级部分可参见 Peter D. Lax 的《Linear Algebra》(New York：John Wiley，1996). 特别地，定理 15.18 的证明可从 Lax 的书中找到，而 3×3 的情况在附录 B 中有证明.

例 15.19 对 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，克莱姆法则蕴涵了如果

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有由下式给出的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$：

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

在此情形下，直接的矩阵乘法将表明这一公式实际上定义了逆矩阵. ■

克莱姆法则连同映射的可逆性和它的相伴矩阵可逆性之间的等价性给出了下列的推论.

推论 15.20 对于与 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相伴的线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 来说，下面的三个断言是等价的：

(i) $\det \boldsymbol{A}\neq 0$.

(ii) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

(iii) 映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可逆映射.

一般的连续映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 可以是一对一的而无须是映上的，也可以是映上的而无须是一对一的. 然而，线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一对一的当且仅当它是映上的. 对 $n=3$ 的证明可见附录 B. 相同维数的欧几里得空间之间线性映射的这一性质是证明下述定理(ii)蕴涵(i)所必须的.

定理 15.21 对 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，下列的两个断言是等价的：

(i) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.

(ii) 存在正数 c，使得对 $\mathbb{R}^n$ 中所有点 $\boldsymbol{h}$，

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\| \geqslant c\|\boldsymbol{h}\|.$$

证明 首先假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的. 则对 $\mathbb{R}^n$ 中每个点 $\boldsymbol{h}$，

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}),$$

404

于是根据广义的柯西-施瓦茨不等式，

$$\|\boldsymbol{h}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{h})\| \leqslant \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|.$$

于是(ii)成立，其中 $c=1/\|A^{-1}\|$.

反之，假定(ii)成立. 则对 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{h}$，如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=0$，则 $\boldsymbol{h}=0$. 令 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相伴的线性映射. 由于对 $\mathbb{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$，置 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$，可见若 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$，则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，即线性映射是一对一的. 根据在定理前面的评述可知，线性映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可逆的. 于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也是可逆的. ■

对每个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，相应有另一个 $n\times n$ 矩阵，称为**转置矩阵**(transpose matrix)，其性质与 $\boldsymbol{A}$ 的性质密切相关，定义如下.

定义 对每个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 定义为如下的 $n\times n$ 矩阵：对下标 i 与 j，其中 $1\leqslant i\leqslant n$ 及 $1\leqslant j\leqslant n$，它的第 ij 个元素等于 a_{ji}.

例 15.22 对 3×3 矩阵，转置矩阵的定义意味着

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$ ■

对任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 在 $n=2$ 及 $n=3$ 情形下，可用直接的计算加以证明. 运用推论 15.20 及矩阵的行列式与它的转置矩阵的行列式相等可得下列重要的定理.

定理 15.23 $n\times n$ 矩阵是可逆矩阵当且仅当它的转置矩阵是可逆矩阵.

习题

1. 下列映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 中哪一个是线性映射？
   a. $\boldsymbol{F}(x, y)=(-y, e^x)$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.
   b. $\boldsymbol{F}(x, y)=(x-y^2, 2y)$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.
   c. $\boldsymbol{F}(x, y)=17(x, y)$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$.
2. 定义
$$\boldsymbol{T}(x,y)=(x+y,x-y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
   a. 直接证明：映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一对一的和映上的.

405

   b. 用推论 15.20 证明：映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一对一的和映上的.
3. 定义
$$\boldsymbol{T}(x,y,z)=(x+z,2x-4y+3z,y+6z),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$
   证明：映射 $\boldsymbol{T}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是可逆的.
4. 证明：不存在具有如下特性的线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$：
$$\boldsymbol{T}(1,1)=(4,0),\quad \boldsymbol{T}(-2,-2)=(0,1).$$
5. 求具有如下性质的线性变换 $\boldsymbol{T}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$：
$$\boldsymbol{T}(1,1,1)=(0,2,0),\quad \boldsymbol{T}(1,1,-1)=(1,2,0),\quad \boldsymbol{T}(2,0,0)=(1,1,1).$$
   (提示：对 $i=1, 2, 3$，运用线性性质定出 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)$.)
6. 对平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 (x, y)，定义 $\boldsymbol{T}(x, y)$ 是直线 $\ell=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x\}$ 上离 (x, y) 最近的点. 证明：映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是线性映射，并求出与这个映射相伴的 2×2 矩阵.
7. 对 $\mathbb{R}^3$ 中的点 (x, y, z)，定义 $\boldsymbol{T}(x, y, z)$ 是在平面 $P=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ 上离 (x, y, z) 最近的点. 证明：映射 $\boldsymbol{T}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是线性映射，并求出与这个映射相伴的 3×3 矩阵.
8. 定义 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. 求所有具有如下性质的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$：
$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}.$$
9. 对于数 θ，定义 2×2 旋转矩阵 $\boldsymbol{A}_\theta$ 如下：
$$\boldsymbol{A}_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$
   通过直接计算矩阵的乘积证明：对任意 θ 与 ϕ，有
$$\boldsymbol{A}_\theta\boldsymbol{A}_\phi=\boldsymbol{A}_{\theta+\phi}.$$
   这样，两个旋转矩阵的乘积仍是旋转矩阵. 运用命题 15.12 说明为什么这一乘积公式正是我们所期望的.
10. 求与下述映射相伴的 2×2 矩阵：该映射把平面上的点绕着原点沿反时针方向旋转 90°.
11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，且假定 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}'$ 是两个有如下性质的 $n\times n$ 矩阵：
$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}.$$
    通过如下验证证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'$：
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{B}'.$$
12. 假定映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 具有如下性质：存在另一个映射 $\boldsymbol{S}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得对 $\mathbb{R}^n$ 中所有 $\boldsymbol{x}$，

406

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}.$$

证明：$\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可逆的且它的逆是映射 $\boldsymbol{S}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，证明：对每一对下标 $i(1\leqslant i)$ 及 $j(j\leqslant n)$，

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_j\rangle.$$

运用这一公式及内积的线性性质证明：对$\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\rangle.$$

15.2 导数矩阵和微分

本节将考虑欧几里得空间之间的非线性映射以及用线性映射这些映射逼近的方法．下面的定义给出我们将要考虑的映射的种类.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，并考虑用分量函数 $\boldsymbol{F}=(F_1,\cdots,F_m)$所描述的映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$.

(i)映射 $F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 称为在$\mathcal{O}$中点 $\boldsymbol{x}$ 处有一阶偏导数，如果对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，分量函数 $\boldsymbol{F}_i:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处有一阶偏导数.

(ii)映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 称为有一阶偏导数，如果它在$\mathcal{O}$中每一点有一阶偏导数.

(iii)映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 称为连续可微的，如果每个分量函数是连续可微的.

例 15.24 定义映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 如下：

$$\text{对}\mathbb{R}^2\text{ 中所有的}(x,y),\quad \boldsymbol{F}(x,y)=(x^2+\mathrm{e}^{xy},\sin(xy),y+1).$$

那么 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是连续可微的，因为它的三个分量函数的每一个都是连续可微的. ■

命题 15.25 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，并假定映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 是连续可微的．则映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 是连续的.

证明 根据定义，映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 的每一个分量函数是连续可微的．从定理 13.20 可得，每个分量函数是连续的．因此，由按分量连续定理(定理 11.9)可推出，映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 本身是连续的. ■

407

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，并假定 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 在$\mathcal{O}$中点 $\boldsymbol{x}$ 处有一阶偏导数．则 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的导数矩阵定义为 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$，它是这样的矩阵：对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，它的第 i 行等于$\nabla \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x})$．于是这个导数矩阵的第 ij 个元素由如下公式给出：

$$(\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}))_{ij}\equiv\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}).$$

例 15.26 如果映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 有一阶偏导数，其分量表示为：

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(u(x,y),v(x,y)),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

那么在点(x_0,y_0)处的导数矩阵是

$$\boldsymbol{DF}(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}\partial u/\partial x(x_0,y_0) & \partial u/\partial y(x_0,y_0)\\ \partial v/\partial x(x_0,y_0) & \partial v/\partial y(x_0,y_0)\end{bmatrix}.$$ ■

例 15.27 假定函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数，则在$\mathbb{R}^2$ 中点(x_0,y_0)处，导数矩阵是

$$\nabla f(x_0,y_0)=[\partial f/\partial x(x_0,y_0),\partial f/\partial y(x_0,y_0)],$$

它是对应于梯度向量的 1×2 矩阵. ■

例 15.28 假定映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 有一阶偏导数，其分量表示为

$$\boldsymbol{F}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad t\in\mathbb{R},$$

则在$\mathbb{R}$中点t_0处，导数矩阵是如下给出的3×1矩阵：

$$DF(t_0)=\begin{bmatrix}x'(t_0)\\y'(t_0)\\z'(t_0)\end{bmatrix}.$$

■

定理 15.29（一般映射的中值定理） 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，并假定映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$是连续可微的. 假设点$\boldsymbol{x}$与点$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$在$\mathcal{O}$中且连接这两点的段也位于$\mathcal{O}$中. 则在开区间(0, 1)中存在数$\theta_1$，$\theta_2$，…，$\theta_m$，使得对$1\leqslant i\leqslant m$，

$$F_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-F_i(\boldsymbol{x})=\langle\nabla F_i(\boldsymbol{x}+\theta_i\boldsymbol{h}),\boldsymbol{h}\rangle,\tag{15.14}$$

即

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h},\tag{15.15}$$

408 这里$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，它的第i行是$\nabla F_i(\boldsymbol{x}+\theta_i\boldsymbol{h})$.

证明 只要把实值函数的中值定理用到每个连续可微的分量函数上便可得到公式(15.14). 而公式(15.15)只是以矩阵符号改写公式(15.14). ■

自然要问的一个问题是在(15.14)中能不能选择所有的θ_i是相等的. 在这样的情况下，(15.15)将变为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},\tag{15.16}$$

这是实值函数中值定理从符号到符号的推广. 然而，公式(15.16)并不成立. 一般地，在区间(0, 1)中不存在一个数θ，使得(15.16)成立，下面的例子表明会出现怎样的情况.

例 15.30 定义映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$如下：

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(x^2,y^3),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

对$(x, y)\in\mathbb{R}^2$，置$\psi(x, y)=x^2$及$\phi(x, y)=y^3$. 取点$\boldsymbol{x}$是原点(0, 0)，$\boldsymbol{h}$是点(1, 1). 上述中值定理的推广蕴涵了在区间(0, 1)中存在数θ_1及θ_2，使得

$$\begin{aligned}\psi(1,1)-\psi(0,0)&=\langle\nabla\psi(\theta_1,\theta_1),(1,1)\rangle,\\\phi(1,1)-\phi(0,0)&=\langle\nabla\phi(\theta_2,\theta_2),(1,1)\rangle.\end{aligned}\tag{15.17}$$

但$\nabla\psi(x, y)=(2x, 0)$及$\nabla\phi(x, y)=(0, 3y^2)$，$(x, y)\in\mathbb{R}^2$，于是代入(15.17)可知，

$$1=2\theta_1\quad 及\quad 1=3\theta_2^2,$$

即$\theta_1=1/2$，$\theta_2=\sqrt{1/3}$，因此肯定找不到$\theta_1=\theta_2$使(15.16)式成立. ■

回想对标量值函数的一阶逼近定理，它断言如果$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，则在$\mathcal{O}$中每一点$\boldsymbol{x}$处，

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-[f(\boldsymbol{h})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle]}{\|\boldsymbol{h}\|}=0.\tag{15.18}$$

409 下面的定理给出这个结果到一般映射的推广.

定理 15.31（对于映射的一阶逼近定理） 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点$\boldsymbol{x}$的开子集，且假定映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$是连续可微的，则

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}]\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0.\tag{15.19}$$

证明 由于$\mathcal{O}$是开集，可选取正数 r，使得开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$中. 对$\mathbb{R}^n$中满足$\|\boldsymbol{h}\|<r$的点$\boldsymbol{h}$，定义

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}].$$

必须证明

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{15.20}$$

但如果把映射 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别表示为 $\boldsymbol{F}=(F_1, \cdots, F_m)$和 $\boldsymbol{R}=(R_1, \cdots, R_m)$，则显然，对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，

$$R_i(\boldsymbol{h}) = F_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [F_i(\boldsymbol{x}) + \langle\nabla F_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}\rangle], \quad \|\boldsymbol{h}\| < r.$$

由于函数 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 是连续可微的，对实值函数的一阶逼近定理蕴涵了

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_i(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

由于对 $0<\|h\|<r$，$\dfrac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \left(\sum_{i=1}^{m}\left[\dfrac{R_i(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}\right]^2\right)^{1/2}$，因此可推得(15.20)成立. ■

对函数$f:I\to\mathbb{R}$，其中 I 为开区间，在 I 中点 x 处，如果存在数 a，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-[f(x)+ah]}{h} = 0,$$

如果 $h\neq 0$ 且 $x+h$ 在 I 中，则由于

$$\frac{f(x+h)-[f(x)+ah]}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a,$$

因此可得$f:I\to\mathbb{R}$ 在 x 处是可微的且 $f'(x)=a$，这一性质推广到映射有如下定理. [410]

定理 15.32 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点 $\boldsymbol{x}$ 的开子集并考虑映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$，假定 $\boldsymbol{A}$ 是具有如下性质的 $m\times n$ 矩阵：

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}]\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{15.21}$$

则映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处有一阶偏导数且

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}).$$

证明 将映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 用分量函数表示为 $\boldsymbol{F}=(F_1, \cdots, F_m)$且置 $a_{ij}=(\boldsymbol{A})_{ij}$. 必须证明对每对下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$及$j(1\leqslant j\leqslant n)$，

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}).$$

对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，定义 $\boldsymbol{A}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行.

由于$\mathcal{O}$是开集，可取正数 r，使得对 $\boldsymbol{x}$ 的开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$中. 注意，如果 $1\leqslant i\leqslant m$ 且 $\|\boldsymbol{h}\|<r$，则

$$F_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [F_i(\boldsymbol{x}) + \langle\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{h}\rangle] = p_i(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}]),$$

所以

$$|F_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [F_i(\boldsymbol{x}) + \langle\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{h}\rangle]| \leqslant \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}]\|.$$

由(15.21)可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_i(x+h)-[F_i(x)+\langle A_i,h\rangle]}{\|h\|}=0.$$

特别地，对下标$j(1\leqslant j\leqslant n)$，

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_i(x+te_j)-[F_i(x)+\langle A_i,te_j\rangle]}{\|te_j\|}=0. \tag{15.22}$$

然而，$\|te_j\|=|t|$，所以(15.22)等价于

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_i(x+te_j)-F_i(x)}{t}=\langle A_i,e_j\rangle,$$

于是证明了$F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$在$x$处有一阶偏导数，且对于$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，

$$a_{ij}=\langle A_i,e_j\rangle=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x).$$ ■

上述定理蕴涵了对于连续可微的映射，导数矩阵是仅有的具有一阶逼近性质(15.19)的矩阵.

鉴于在15.1节所描述的$m\times n$矩阵和$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的线性映射之间的对应，引进下列导数矩阵的对应是有益的.

411

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点x的开子集，并假定映射$F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$在点$x$处有一阶偏导数，则线性映射

$$\mathrm{d}F(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

定义为对$\mathbb{R}^n$中所有h，

$$\mathrm{d}F(x)(h)\equiv DF(x)h.$$

它称为映射$F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$在点$x$处的**微分**(differential).

当线性映射是非线性映射在一点的微分的情形下，我们把推论15.20的内容描述为下面的定理.

定理15.33 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的包含点x的开子集，并假定映射$F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$在$x$处有一阶偏导数. 则下列三个断言是等价的：

(i) $\det DF(x)\neq 0$.

(ii) 导数矩阵$DF(x)$是可逆的$n\times n$矩阵.

(iii) 微分$\mathrm{d}F(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是可逆的线性映射.

一阶逼近定理是对

$$F(x+h)\approx F(x)+\mathrm{d}F(x)(h)$$

这种表达形式在h充分接近$\mathbf{0}$时的精确论断.

下面两章将描述连续可微映射从在一点处它的微分那里继承下来的性质.

习题

1. 定义

$$F(x,y)=(e^{xy}+2x,y^2+\sin(x-y)),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

求映射$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$在点(0, 0)及(π, 0)处的导数矩阵.

2. 定义

$$F(x,y,z)=(xyz,x^2+yz,1+3x),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

求映射 F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 在点(1, 2, 3)，(0, 1, 0)及(-1, 4, 0)处的导数矩阵.

3. 假定映射 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是连续可微的，且在$\mathbb{R}^n$ 中的每个点 x 处导数矩阵 $DF(x)$的所有元素等于0. 证明：映射 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是常项，即在$\mathbb{R}^m$ 中存在某个点 c，使得对$\mathbb{R}^n$ 中每个 x，

$$F(x) = c.$$

412

4. 假定 A 是 $m \times n$ 矩阵. 定义映射 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 如下：

$$\text{对}\mathbb{R}^n\text{ 中每个 } x, \quad F(x) = Ax.$$

证明：对$\mathbb{R}^n$ 中所有 x，$DF(x) = A$.

5. 假定映射 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是连续可微的，且存在一个固定的 $m \times n$ 矩阵 A，使得对$\mathbb{R}^n$ 中每个 x，

$$DF(x) = A.$$

证明：在$\mathbb{R}^m$ 中存在某个 c，使得对$\mathbb{R}^n$ 中每个 x，

$$F(x) = Ax + c.$$

对于 $n = m = 1$ 的情形重述这一结果.

6. 定义映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 如下：

$$F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a. 在$\mathbb{R}^2$ 中求点(x_0, y_0)，要求在该点处导数矩阵 $DF(x_0, y_0)$是可逆的.

b. 在$\mathbb{R}^2$ 中求点(x_0, y_0)，要求在该点处微分 $dF(x_0, y_0):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是可逆的线性映射.

7. 对一阶逼近定理给出一个建立在中值定理基础上的证明.

8. 假定映射 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的，还假定 $F(0) = 0$ 且导数矩阵 $DF(0)$有如下特性：存在某个正数 c，使得

$$\text{对}\mathbb{R}^n\text{ 中所有 } h, \quad \| DF(0)h \| \geq c \| h \|.$$

证明：存在某个正数 r，使得若 $\| h \| \leq r$，则

$$\| F(h) \| \geq c/2 \| h \|.$$

9. 假定连续可微映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 用分量函数表示为

$$F(x,y) = (\psi(x,y), \varphi(x,y)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

定义函数 $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 如下：

$$g(x,y) = \frac{1}{2}[(\psi(x,y))^2 + (\varphi(x,y))^2], \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a. 证明：

$$Dg(x_0,y_0) = [DF(x_0,y_0)]^{\mathrm{T}} F(x_0,y_0).$$

b. 用(a)证明：如果(x_0, y_0)是函数 $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的最小值点且 $DF(x_0, y_0)$是可逆的，则

$$F(x_0,y_0) = 0.$$

413

15.3 链式法则

由一元实值函数的链式法则可得，如果$\mathcal{O}$和$\mathcal{U}$是实数开集，且函数$f:\mathcal{O} \to \mathbb{R}$及$g:\mathcal{U} \to \mathbb{R}$是连续可微的，满足$f(\mathcal{O})$包含在$\mathcal{U}$中，则复合函数

$$g \circ f:\mathcal{O} \to \mathbb{R}$$

也是连续可微的，并且对$\mathcal{O}$中每个点 x，

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{15.23}$$

链式法则可在一般的连续可微映射的复合中延续下来，其中用导数矩阵取代导数，用矩阵乘法取代标量乘法. 一般的链式法则可从带有实值函数映射的复合得到.

为清晰地陈述链式法则，使用下面的符号：对$\mathbb{R}^m$ 的开子集$\mathcal{U}$及具有一阶偏导数的函数 $g:\mathcal{U} \to \mathbb{R}$，在$\mathcal{U}$中每个点 p 处，对每个下标 $i(1 \leq i \leq m)$，定义

$$D_i g(\boldsymbol{p}) \equiv \lim_{t\to 0}\frac{g(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_i)-g(\boldsymbol{p})}{t}.$$

这个符号有如下的优点：关于第 i 个分量的偏导数用这样的记号表示，该记号不依赖于定义域中的点使用过的符号. 而且，对$\mathcal{U}$中每个点 $\boldsymbol{p}$，

$$\nabla g(\boldsymbol{p}) = (D_1 g(\boldsymbol{p}),\cdots,D_m g(\boldsymbol{p})).$$

定理 15.34（链式法则） *设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，并假定映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 是连续可微的，还假定$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^m$的开子集且函数 $g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，最后，假定 $\boldsymbol{F}(\mathcal{O})$ 包含在$\mathcal{U}$中. 则复合函数 $g\circ\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 也是连续可微的. 而且，对$\mathcal{O}$中每个点 $\boldsymbol{x}$ 及每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} D_j g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \tag{15.24}$$

即

$$\nabla(g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \nabla_g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}). \tag{15.25}$$

证明 设 $\boldsymbol{x}$ 是$\mathcal{O}$中的点. 由于$\mathcal{O}$是开集，可选取正数 r，使得开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x})$包含在$\mathcal{O}$中. 此外，因为映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 是连续的且$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^m$的开子集，所以也可以假设如果 $\|\boldsymbol{h}\|<r$，则连接点 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ 的段位于$\mathcal{U}$中，对$\mathbb{R}^n$中每个满足 $\|\boldsymbol{h}\|<r$ 的 $\boldsymbol{h}$，定义

414

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}.$$

根据对于映射的一阶逼近定理

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0, \tag{15.26}$$

且由 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h})$ 的定义知，如果 $\|\boldsymbol{h}\|<r$，则

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{h}). \tag{15.27}$$

对$\mathbb{R}^n$中每个使得 $\|\boldsymbol{h}\|<r$ 的 $\boldsymbol{h}$，可在连接点 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ 的段上把中值定理用于函数 $g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$，便可在这个段上选取一点，标记为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{h})$，在该点处有

$$g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})) - g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = \langle\nabla g(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{h})),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\rangle.$$

以(15.27)代入，便给出

$$(g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - (g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \langle\nabla g(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{h})),\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\rangle + \langle\nabla g(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{h})),\boldsymbol{R}(\boldsymbol{h})\rangle. \tag{15.28}$$

注意，$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ 的连续性蕴涵了

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}). \tag{15.29}$$

下面将验证(15.24). 固定下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，对满足 $0<|t|<r$ 的数 t，如果定义 $\boldsymbol{h}=t\boldsymbol{e}_i$，则从(15.28)可得

$$\frac{(g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-(g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x})}{t} = \langle\nabla g(\boldsymbol{v}(t\boldsymbol{e}_i)),\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i\rangle + \left\langle\nabla g(\boldsymbol{v}(t\boldsymbol{e}_i)),\frac{\boldsymbol{R}(t\boldsymbol{e}_i)}{t}\right\rangle.$$

从这一不等式，通过使用(15，26)及(15.29)，可得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \langle\nabla g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i\rangle. \tag{15.30}$$

但是

$$DF(x)e_i = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x), \cdots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(x)\right),$$

所以标量等式(15.30)恰为(15.24)，特别地，这表明函数 $g \circ F: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 有一阶偏导数，并且，因为公式(15.24)的右端关于 x 连续，所以 $g \circ F: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 是连续可微的. 为结束证明，只要注意(15.25)是(15.24)用矩阵符号的改写就可以了. ■

下面将详细讨论链式法则最通常出现的某些形式.

例 15.35 假定函数 $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 与 $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，还假定 $\mathcal{O}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的开子集并且函数 $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，最后，假定对 $\mathbb{R}^2$ 中所有 (x, y)，$(\psi(x, y), \varphi(x, y))$ 在 $\mathcal{O}$ 中，则

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(\psi(x,y),\varphi(x,y))) = D_1 f(\psi(x,y),\varphi(x,y))\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) + D_2 f(\psi(x,y),\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$$

415

及

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(\psi(x,y),\varphi(x,y))) = D_1 f(\psi(x,y),\varphi(x,y))\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) + D_2 f(\psi(x,y),\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y).$$ ■

例 15.36 设函数 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，定义函数 $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $\psi(x) = g(x^2, 2x, 1-x)$，$x \in \mathbb{R}$. 则对 $\mathbb{R}$ 中每个 x，

$$\psi'(x) = D_1 g(x^2,2x,1-x)(2x) + D_2 g(x^2,2x,1-x)(2) + D_3 g(x^2,2x,1-x)(-1).$$ ■

例 15.37 假定函数 $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 及 $w: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，且函数 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 也是连续可微的. 则对平面 $\mathbb{R}^2$ 中的每个点 (x, y)，

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(u(x,y),v(x,y),w(x,y))) = D_1 g(u(x,y),v(x,y),w(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + D_2 g(u(x,y),v(x,y),w(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + D_3 g(u(x,y),v(x,y),w(x,y))\frac{\partial w}{\partial x}(x,y).$$ ■

关于符号的注记 在包含偏导数计算的书中，读者会发现一大类符号. 例如，例 15.35 中的第二个导数公式通常简记为

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{15.31}$$

类似地，例 15.37 中的导数公式常常简记为

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{15.32}$$

我们要注解的另一个简洁而实用的符号表示法的常见例子是，如果函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是连续可微的且函数 $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

则根据链式法则，对$\mathbb{R}^2$中每个点(r, θ)，

416

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = D_1f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + D_2f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta.$$

上面的公式常简记为

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta. \tag{15.33}$$

为了要理解它与前面的表达具有相同的含义，必须对此公式详细地加以解释.

简写的公式(如(15.31)、(15.32)及(15.33))在压缩很长的等式及缩短各种计算时是非常有用的. 但这样的公式不严谨，因为它没有指出在哪里求导数的值，且关于变量是什么有些含糊不清. 在使用这些公式时必须格外小心.

当我们分析两个或三个变量的函数，特别是在计算高阶导数时，

$$\text{用}\frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{p})\text{ 表示 }D_1g(\mathbf{p}),\quad \text{用}\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{p})\text{ 表示 }D_2g(\mathbf{p})\text{ 及用}\frac{\partial g}{\partial z}(\mathbf{p})\text{ 表示 }D_3g(\mathbf{p})$$

在记法上是实用的，即使x，y及z没有明确地引进为分量变量。在下面的例子中我们将使用这一符号约定.

例 15.38 函数$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$称为调和的，如果它有连续的二阶偏导数且对$\mathbb{R}^2$中所有的$(x, y)$，满足恒等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

假定函数$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是调和的，对$\mathbb{R}^2$中所有的$(x, y)$，定义

$$v(x,y) = u(x^2 - y^2, 2xy).$$

则函数$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$也是调和的. 为验证这一点，必须证明对$\mathbb{R}^2$中所有的$(x, y)$，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

然而，对$\mathbb{R}^2$中的(x, y)，

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x^2 - y^2, 2xy)2x + \frac{\partial u}{\partial y}(x^2 - y^2, 2xy)2y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^2 - y^2, 2xy)4x^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(x^2 - y^2, 2xy)2$$

417

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x^2 - y^2, 2xy)8xy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x^2 - y^2, 2xy)4y^2.$$

对$\partial^2 v/\partial y^2(x, y)$进行类似的计算，由于对$\mathbb{R}^2$中所有$(x, y)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^2 - y^2, 2xy) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x^2 - y^2, 2xy) = 0,$$

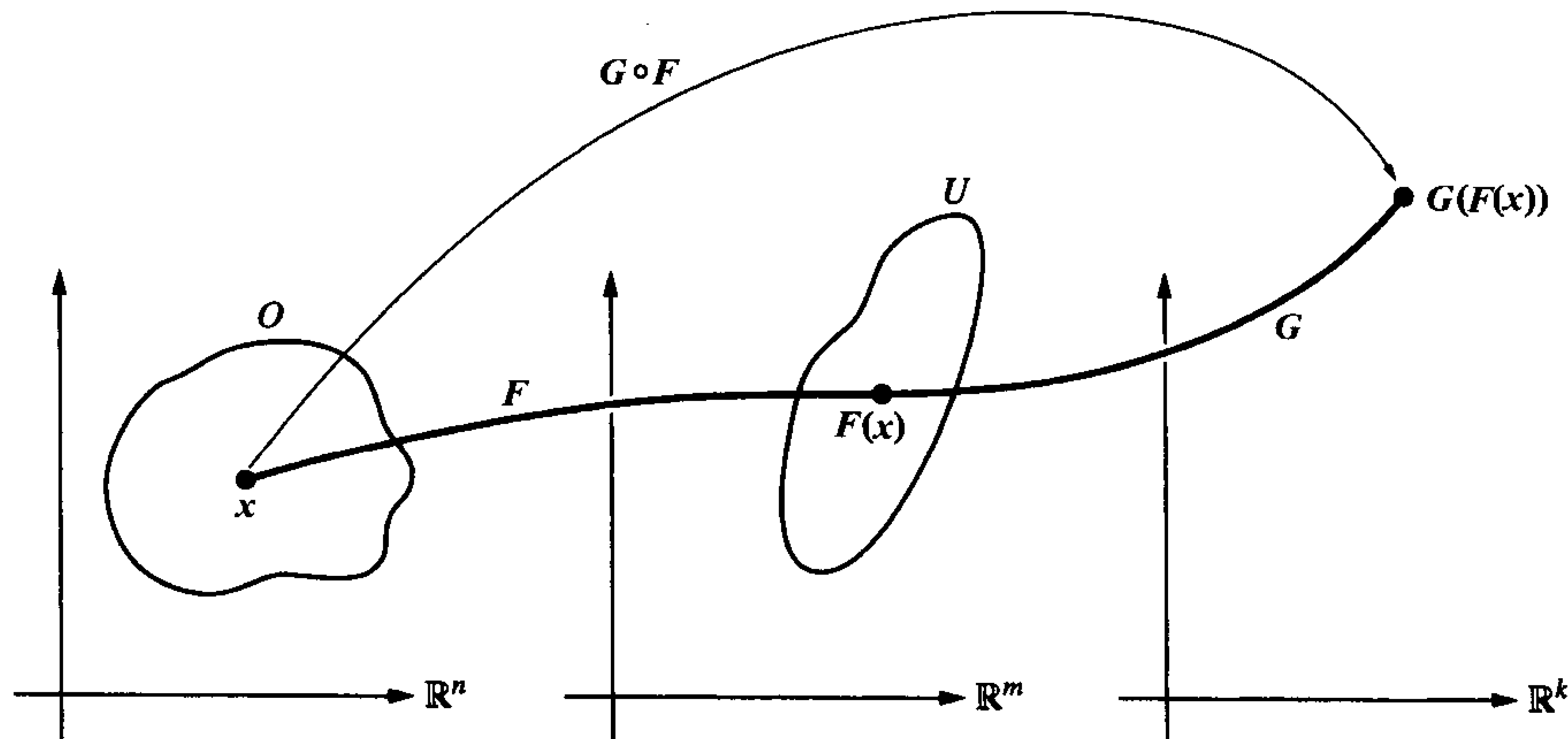
留作练习题 4 的计算表明对$\mathbb{R}^2$中的(x, y)，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$ ■

刚刚证明的特殊情形下的链式法则可以给出对一般情形下的链式法则的证明.

定理 15.39(对一般映射的链式法则) 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，并假定映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$是连续可微的，还假定$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^m$的开子集且映射$\boldsymbol{G}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$是连续可微的，最后，假定$\boldsymbol{F}(\mathcal{O})$包含在$\mathcal{U}$中．则复合映射$\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$(如图 15.3 所示)也是连续可微的．而且，对$\mathcal{O}$中每一点$\boldsymbol{x}$，

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}). \tag{15.34}$$



$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$

图 15.3 映射 $\boldsymbol{F}$ 与映射 $\boldsymbol{G}$ 的复合

证明 把映射$\boldsymbol{G}$用分量函数$\boldsymbol{G}=(G_1,\cdots,G_k)$表示．注意，复合映射$\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$用分量函数$\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}=(G_1\circ\ \boldsymbol{F},\ G_2\circ\ \boldsymbol{F},\ \cdots,\ G_k\circ\ \boldsymbol{F})$表示．对于下标$j(1\leqslant j\leqslant k)$，分量函数$G_j:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$是连续可微的，所以从定理 15.34 可得，对$\mathcal{O}$中所有点$\boldsymbol{x}$，

$$\nabla(G_j\circ\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \nabla G_j(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

418

这个公式表明对于$1\leqslant j\leqslant k$，公式(15.34)中每个矩阵的第j行相等，从而矩阵公式(15.34)成立．于是复合函数$\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$在每一点有一阶偏导数，且从(15.34)右端元素的连续性可以推出复合映射是连续可微的． ■

习题

1. 假定函数$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是连续可微的．定义函数$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$如下：

$$g(s,t) = \psi(s^2t,s),\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

求$\partial g/\partial s(s,\ t)$及$\partial g/\partial t(s,\ t)$.

2. 假定函数h: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$是连续可微的．定义函数$\eta$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$如下：

$$\eta(u,v,w) = (3u+2v)h(u^2,v^2,uvw),\quad (u,v,w)\in\mathbb{R}^3.$$

求$D_1\eta(u,\ v,\ w)$，$D_2\eta(u,\ v,\ w)$及$D_3\eta(u,\ v,\ w)$.

3. 假定函数g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$及h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数．定义函数$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$如下：

$$u(s,t) = g(s-t)+h(s+t),\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：对$\mathbb{R}^2$中所有的$(s,\ t)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,\ t)-\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,\ t)=0$.

4. 为验证函数$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是调和的，将例 15.38 中需要的计算继续下去．

5. 设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$的开子集，并设映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$表示为$\boldsymbol{F}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$，$(x,y)\in\mathcal{O}$. 映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$称为柯西-黎曼映射(Cauchy-Riemann mapping)，如果函数$u:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$及$v:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数且对$\mathcal{O}$中所有的$(x,y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

证明：如果函数$w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是调和的且映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$是柯西-黎曼映射，则函数$w\circ\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$也是调和的.

6. 假定函数$w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是调和的，用习题5证明下列每一个函数也是调和的：

a. $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义为$v(x,y)=w(e^x\cos y,\ e^x\sin y)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b. $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义为$v(x,y)=w(x^2-y^2,\ 2xy)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

c. $v:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$定义为$v(x,y)=w(x/(x^2+y^2),\ -y/(x^2+y^2))$，$(x,y)\in\mathcal{O}$，其中$\mathcal{O}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>0\}$.

419

7. 假设函数$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是调和的. 设$a$，$b$，$c$及$d$是实数，满足

$$a^2+b^2=1,\quad c^2+d^2=1\quad 及\quad ac+bd=0.$$

定义函数$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$如下：

$$v(x,y)=u(ax+by,cx+dy),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：函数$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$也是调和的.

8. 假定函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有连续的二阶偏导数，还假定存在数$\lambda$，使得对$\mathbb{R}$中所有的$x$，

$$f''(x)=\lambda f(x)\quad 及\quad g''(x)=\lambda g(x).$$

定义函数$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$如下：

$$u(x,y)=f(x)g(y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：对$\mathbb{R}^2$中每个(x,y)，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$.

9. 设$\mathcal{O}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2>0\}$，且定义函数$u:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$如下：

$$u(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}\|},\quad \boldsymbol{p}\in\mathcal{O}.$$

证明：对$\mathcal{O}$中每个(x,y,z)，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z)=0.$$

10. 假定函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$及$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是连续可微的，用这些函数的偏导数表示下面两个极限

a. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(g(1+t,2),h(1+t,2))-f(g(1,2),h(1,2))}{t}$.

b. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(g(1,2)+t,h(1,2))-f(g(1,2),h(1,2))}{t}$.

11. 假设函数$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是连续可微的. 对$\mathbb{R}^n$中点$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{p}$，方向导数定理断言：如果$\psi(t)=g(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p})$，$t\in\mathbb{R}$，则对$\mathbb{R}$中每个$t$，

$$\psi'(t)=\langle\nabla g(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}\rangle.$$

420

证明：这是链式法则的一种特殊情况.

第16章　象和逆象：反函数定理

16.1　一元函数与平面上的映射

假设$\mathcal{O}$是欧几里得空间$\mathbb{R}^n$的开子集及非线性映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$是连续可微的. 在$\mathcal{O}$中点$x_*$处，假设导数

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(x_*):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \text{ 是一对一的且映上的,}$$

这等价于假设这个导数矩阵的行列式不为零，即

$$\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_*)\right]\neq 0.$$

于是推知这个非线性映射继承了在点x_*附近"局部可逆性"，准确地说，存在$\mathbb{R}^n$的一个含有点x_*的开子集U及$\mathbb{R}^n$的一个含有象$\boldsymbol{F}(x_*)$的开子集V，使得

$$\boldsymbol{F}:U\to V\quad \text{是一对一的且映上的}$$

及它的逆$\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$也是连续可微的. 这就是反函数定理. 这个定理的证明需要一些具有独立价值的一些新概念. 本章将描述这些概念、证明这个定理及给出这个定理的一些例子.

本节将证明一元函数的反函数定理，并对平面的映射叙述这个定理，此外，还将给出几个例子. 16.2节将介绍非线性映射的稳定性概念. 一个线性映射$\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是稳定的，当且仅当它是可逆的. 在包含点$x_*$的开集内的稳定性是连续可微的非线性映射从它的微分$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的可逆性继承的重要的解析性质. 16.3将首先介绍极小化原理以证明连续可微的稳定映射把开集映成开集. 然后叙述、证明及讨论一般反函数定理.

出于提出本章主题的考虑，我们先从证明一个实变量的实值函数的如下定理开始.

定理16.1　*令$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$中一个开子集且假设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的. 令$x_0$是$\mathcal{O}$中一点且有*

$$f'(x_0)\neq 0. \tag{16.1}$$

那么存在一包含点x_0的开区间I及一包含象$f(x_0)$的开区间J，使得函数

$$f:I\to J\quad \text{是一对一的且映上的.} \tag{16.2}$$

此外，反函数$f^{-1}:J\to I$也是连续可微的，且对J中点y，如果对I中点x有$f(x)=y$，则

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}. \tag{16.3}$$

一元函数的反函数如图16.1所示.

证明　假设$f'(x_0)>0$. 因为x_0是$\mathcal{O}$的内点，且$f':\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的，所以可以选取一个正数$r$，使得闭区间$[x_0-r,\ x_0+r]$包含在$\mathcal{O}$内，且对区间$[x_0-r,\ x_0+r]$中所有点有$f'(x)>0$. 中值定理蕴涵函数$f$: $[x_0-r,\ x_0+r]\to\mathbb{R}$是严格递增的. 特别地，$f$: $[x_0-r,\ x_0+r]\to\mathbb{R}$是一对一的. 此外，由介值定理知，如果$y$严格位于$f(x_0-r)$与$f(x_0+r)$之间，则在开区间$(x_0-r,\ x_0+r)$有点$x$，使得$f(x)=y$.

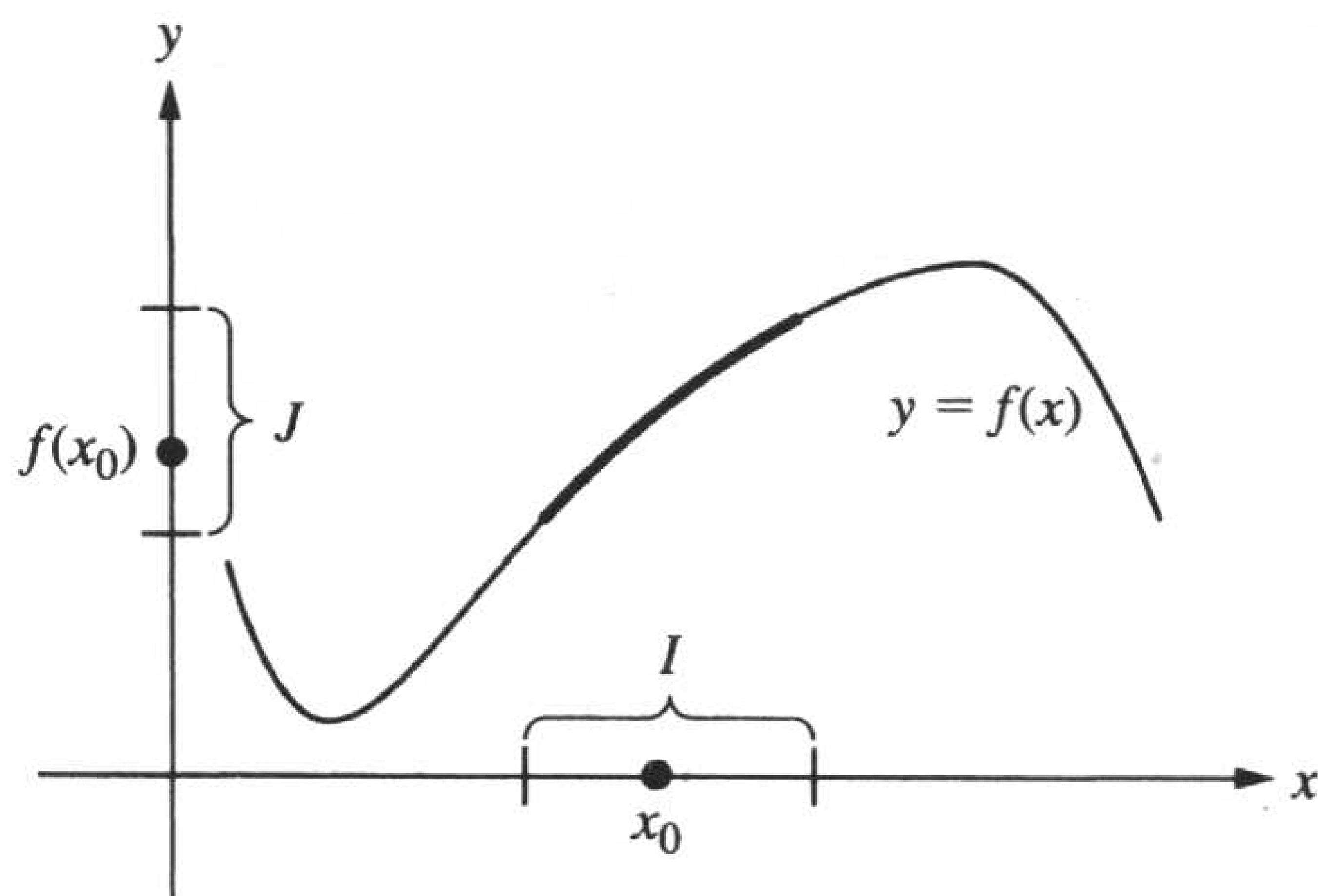


图 16.1　一元函数的反函数

422 定义 $I=(x_0-r,\ x_0+r)$ 及 $J=(f(x_0-r),\ f(x_0+r))$，则 $f:I\to J$ 是一对一的且映上的. 反函数的可微性及公式(16.3)在定理 4.11 中已证明了. ■

本章的目的在于描述一连串同把定理 16.1 扩充到映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 上有关的概念，这里$\mathcal{O}$是欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 中的开子集. 在我们描述到平面映射的扩充之前，首先介绍点的邻域这一概念，它推广了点的开球的概念.

定义　欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 的开子集，当它含有点 $\boldsymbol{x}$ 时，称为点 $\boldsymbol{x}$ 的**邻域**(neighborhood).

对平面$\mathbb{R}^2$ 的开子集到$\mathbb{R}^2$ 的映射，我们有如下定理.

定理 16.2(平面上的反函数定理)　设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$ 的一个开子集，并假设 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$ 是连续可微的. 令$(x_0,\ y_0)$是$\mathcal{O}$中一点且导数矩阵

$$\boldsymbol{DF}(x_0,y_0)\ \text{是可逆的}, \tag{16.4}$$

则存在点$(x_0,\ y_0)$的一个邻域 U 及象 $\boldsymbol{F}(x_0,\ y_0)$的一个邻域 V，使得

$$\boldsymbol{F}:U\to V\ \text{是一对一的且映上的}. \tag{16.5}$$

而且逆映射 $\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$ 也是连续可微的，及对 V 中的点$(u,\ v)$，如果$(x,\ y)$是 U 中的点且 $\boldsymbol{F}(x,\ y)=(u,\ v)$，则逆映射在点$(u,\ v)$的导数矩阵由下式给出：

$$\boldsymbol{DF}^{-1}(u,v) = [\boldsymbol{DF}(x,y)]^{-1}. \tag{16.6}$$

平面间的映射及其逆映射如图 16.2 所示.

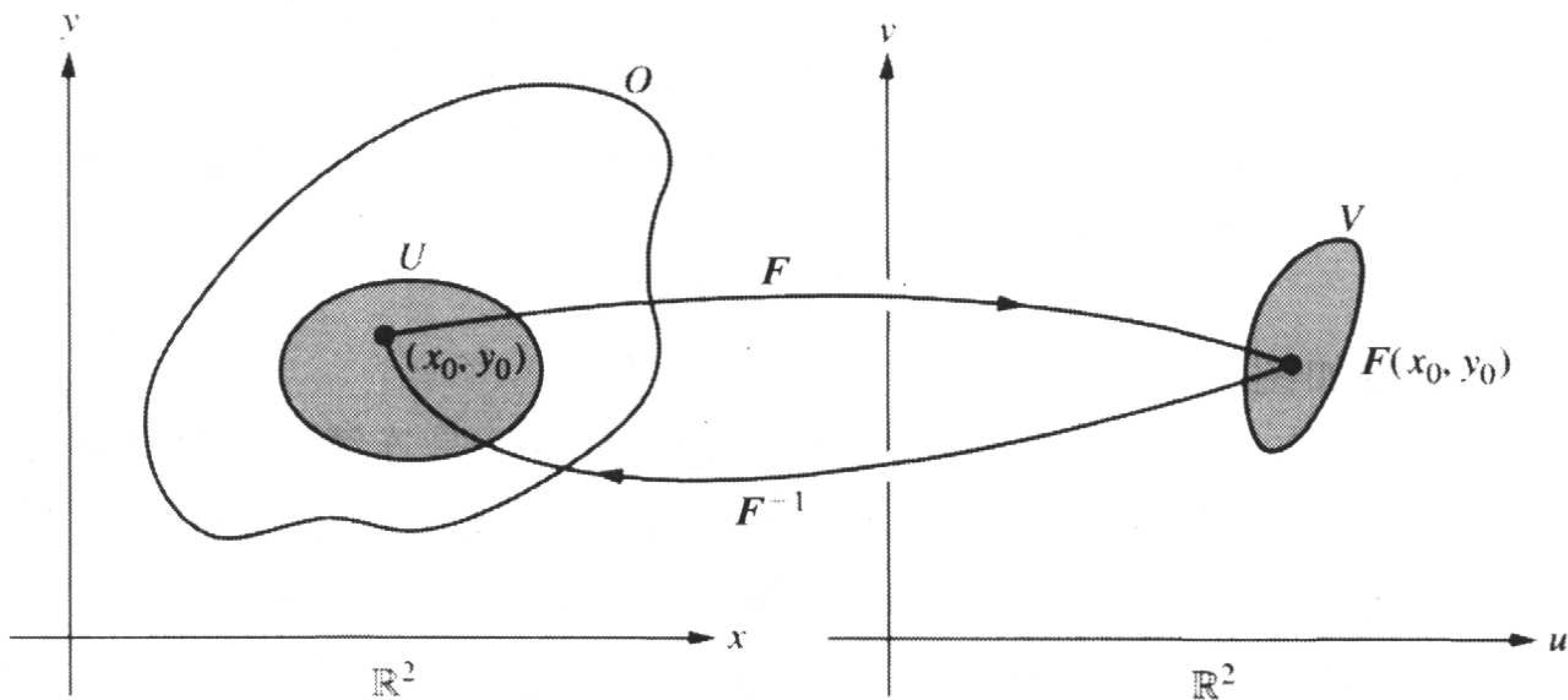


图 16.2　平面中的映射及其逆映射

注意，在定理 16.1 的证明中，我们用了介值定理，这一结果不容易推广到其象位于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的那些映射平面上的反函数定理的证明是很困难的. 在随后的两节中，我们将讨论某些概念，它们有独立的意义，并将在 16.3 节中用于证明一般反函数定理，这是包含定理 16.2 作为特例的一个结果. 我们在本节余下部分讨论平面内的反函数定理. [423]

如同在 15.1 节中讨论过的，一个 $n\times n$ 矩阵是*可逆的*，当且仅当它的行列式是非零的. 当这个矩阵可逆时，可由克莱姆法则求得逆矩阵. 对 2×2 矩阵，通过验证可知，克莱姆法则是显然的. 事实上，对 2×2 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

如果

$$\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$

则通过直接求矩阵乘积便可证实下述求矩阵 A 的逆矩阵的公式是正确的：

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}.$$

特别地，在平面反函数定理陈述中，对映射 $F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$ 的假定(16.4)成立当且仅当

$$\det DF(x_0,y_0)\neq 0.$$

如果映射 $F:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$ 用分量函数表示为

$$F(x,y)=(\psi(x,y),\phi(x,y)),\quad (x,y)\in\mathcal{O},$$

则

$$DF(x,y)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix},$$

所以假定(16.4)等价于假定

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0,y_0)-\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0. \tag{16.7}$$

上面对 2×2 矩阵的逆的公式使我们可以用公式(16.6)计算逆映射 $F^{-1}:V\to U$ 的分量函数的偏导数. 事实上，$F^{-1}:V\to U$ 可用分量函数表示为

$$F^{-1}(u,v)=(g(u,v),h(u,v)),\quad (u,v)\in V,$$

[424]

所以

$$DF^{-1}(u,v)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}.$$

对 V 中的点 (u,v)，设 (x,y) 是 U 中的点，满足

$$u=\psi(x,y),\quad v=\phi(x,y).$$

为了记号上的方便[⊖]，令

⊖ 我们在这里使用字母 J 是因为在一点上的导数矩阵的行列式有时称为*雅可比行列式*(Jacobian determinant). 导数矩阵通常称为*雅可比矩阵*(Jacobian matrix).

$$J(x,y) \equiv \det \boldsymbol{DF}(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)\,\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y).$$

可是利用上述 2×2 矩阵求逆公式可推出，公式(16.6)等价于

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{1}{J(x,y)}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y);\\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= -\frac{1}{J(x,y)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y);\\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) &= -\frac{1}{J(x,y)}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y);\\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) &= \frac{1}{J(x,y)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y). \end{aligned} \tag{16.8}$$

例 16.3 对$\mathbb{R}^2$中的点(x, y)定义

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (\mathrm{e}^{x-y} + x^2y + x(y-1)^4, 1 + x^2 + x^4 + (xy)^5).$$

在这个例子中，映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 再次是连续可微的，因为它的每一个分量函数是连续可微. 在点$(x_0, y_0)=(1, 1)$处，简短计算偏导数表明

$$\boldsymbol{DF}(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0\\ 11 & 5\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{DF}(1, 1)$的行列式是非零的. 我们可以用反函数定理得出结论：存在点$(1, 1)$的一个邻域 U 和它的象$(2, 4)$的一个邻域 V，使得映射 $\boldsymbol{F}:U\to V$ 是一对一的且映上的，而其逆映射 $\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$ 也是连续可微的. 此外，如果用分量函数把逆映射表示为 $\boldsymbol{F}^{-1}(u, v)=(g(u, v), h(u, v))$，则由(16.8)推出

425

$$\frac{\partial g}{\partial u}(2,4) = \frac{1}{3}, \frac{\partial g}{\partial v}(2,4) = 0, \frac{\partial h}{\partial u}(2,4) = -\frac{11}{15}, \frac{\partial h}{\partial u}(2,4) = \frac{1}{5}.$$ ■

例 16.4 对平面$\mathbb{R}^2$中的一点(x, y)，定义

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 也是连续可微的，因为它的每个分量函数明显是连续可微的. 首先考虑$\mathbb{R}^2$中的一个非零点(x_0, y_0)，我们有

$$\boldsymbol{DF}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 & -2y_0\\ 2y_0 & 2x_0\end{bmatrix},$$

因此 $\det \boldsymbol{DF}(x_0, y_0)=4(x_0^2+y_0^2)\neq 0$，再次应用反函数定理可得，推出存在点$(x_0, y_0)$的邻域 U 及象$(x_0^2-y_0^2, 2x_0y_0)$的邻域 V，使得 $\boldsymbol{F}:U\to V$ 是一对一的且映上的，且有其逆 $\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$ 也是连续可微的. 假定用分量函数把逆映射表示为 $\boldsymbol{F}^{-1}(u, v)=(g(u, v), h(u, v))$，如果$(u_0, v_0)=(x_0^2-y_0^2, 2x_0y_0)$，则由(16.8)推出

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{x_0}{2(x_0^2+y_0^2)},\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{y_0}{2(x_0^2+y_0^2)},$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{-y_0}{2(x_0^2+y_0^2)},\quad \frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

现在考虑点$(x_0, y_0)=(0, 0)$. 在这一点上反函数定理的假设肯定不成立，因为

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

此外，反函数定理的结论在这一点也不成立，因为只要我们注意到 $F(x, y) = F(-x, -y)$ 对平面上所有点 (x, y) 都成立，则不存在点 $(0, 0)$ 的邻域，使得映射是一对一的. ■

例 16.5 定义 $F(x, y) = (\cos(x+y^2), \sin(x+y^2))$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$. 那么映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是连续可微的. 但是$\mathbb{R}^2$ 上不存在使得反函数定理的结论成立的点. 为了看到这一点，注意如果点 (u, v) 位于 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的象上，则 $u^2 + v^2 = 1$. 于是这个映射的象是位于以原点为中心半径为 1 的圆上. 特别地，这个象不包含平面上任一开子集，所以平面上肯定不存在开子集 U 和 V，使得 $F:U \to V$ 是一对一的且映上的. ■

注意，平面上的反函数定理的结论可以改进得更漂亮些. 在这个定理的结论中，它断言存在集 U 和 V 分别是点 (x_0, y_0) 和它的象 $F(x_0, y_0)$ 的邻域. 事实上，我们可选取 V 是点 $F(x_0, y_0)$ 的一个开球. 为了看到为什么可以这样做，首先回忆一个连续可微的映射是连续的，且由定理 11.12 可知，一个连续映射把开集的逆象映成开集. 现在，因 V 是开集，我们可选取一个正数 r，使得一个开球$\mathcal{B}_r(F(x_0, y_0))$包含在 V 中. 把$\mathcal{B}_r(F(x_0, y_0))$记为 V'，并定义 $U' = F^{-1}(V') \cap U$，则 U'是(x_0, y_0)的一个邻域. 这样，把 U 替换为 U'，V 替换为 V'，U'是(x_0, y_0)的邻域，而 V'是 $F(x_0, y_0)$的邻域，且映射 $F:U' \to V'$ 是一对一的且映上的，但现在 V'是一个开球(见习题 12). [426]

反函数定理可解释为关于方程组的可解性的命题. 给定两个函数，$\psi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 和 $\phi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 及两个数 a 与 b，考虑方程组

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= a, \\ \phi(x,y) &= b. \end{aligned} \tag{16.9}$$

我们可能问何时此方程组有解，及如果有解，何时仅有一个解. 如果定义映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 $F(x, y) = (\psi(x, y), \phi(x, y))$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$，关于方程组(16.9)的解的存在性及唯一性的这两个问题，可以转述为映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的象的问题及映射是否具有一对一的性质. 下面的例子表明反函数定理如何提供方程组的信息.

例 16.6 考虑方程组

$$\begin{aligned} e^{x-y} + x^2y + x(y-1)^4 &= 2, \\ 1 + x^2 + x^4 + (xy)^5 &= 4. \end{aligned} \tag{16.10}$$

注意 $(x, y) = (1, 1)$ 是(16.10)的一个解. 对$\mathbb{R}^2$ 中的 (x, y)，映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $F(x,y) = (e^{x-y} + x^2y + x(y-1)^4, 1 + x^2 + x^4 + (xy)^5)$，它恰好是例 16.3 中，考虑的映射. 从那个例子的分析得出结论，有一个正数 r 及点 $(1, 1)$ 的一个邻域 U，使得对任意数 a 与 b，有 $(a-2)^2 + (b-4)^2 < r^2$，则方程组

$$\begin{aligned} e^{x-y} + x^2y + x(y-1)^4 &= a, \\ 1 + x^2 + x^4 + (xy)^5 &= b, \quad (x,y) \in U \end{aligned}$$

确实有一解. ■

习题

1. 定义函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

在$\mathbb{R}$中哪些点x可应用反函数定理?

2. 定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为

$$f(x)=x^3+x+\cos x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

247 在$\mathbb{R}$中哪些点x处可应用反函数定理？证明：函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一对一的且映上的.

3. 假设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微的及一对一的且映上的. 假设$f(1)=0$, $f(0)=1$, $f'(0)=-4$及$f'(1)=-10$. 求$(f^{-1})'(1)$及$(f^{-1})'(0)$.

4. a. 给出一个连续可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一对一的但非映上的例子.

   b. 给出一个连续可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是映上的但非一对一的例子.

5. 假设连续可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$有如下性质：存在正数$c$，使得对$\mathbb{R}$中每个$x$，有

$$f'(x)\geqslant c.$$

证明：这个函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一对一的且映上的.

6. 对$\mathbb{R}$中的x，定义$f(x)=x^3$. 证明：$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一对一的且映上的及它的反函数$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的. 在哪些点上这个反函数是可微的？

7. 令$\mathcal{O}$及V是$\mathbb{R}$的开子集，且假设可微函数$f:\mathcal{O}\to V$是一对一的且映上的. 假设x_0是$\mathcal{O}$中一点且$f'(x_0)=0$. 证明：反函数$f^{-1}:V\to\mathbb{R}$在点$f(x_0)$是不可微的.（提示：用反证法及用链式法则对恒等式$f^{-1}(f(x))=x(x\in\mathcal{O})$.）

8. 对下述每个映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，在$(x_0, y_0)=(0, 0)$处运用反函数定理并计算逆映射在点$(u_0, v_0)=\boldsymbol{F}(0, 0)$处的分量的偏导数：

   a. 对$\mathbb{R}^2$中的(x, y)，$\boldsymbol{F}(x, y)=(x+x^2+e^{x^2y^2}, -x+y+\sin(xy))$.

   b. 对$\mathbb{R}^2$中的(x, y)，$\boldsymbol{F}(x, y)=(e^{x+y}, e^{x-y})$.

9. 定义函数$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为$\boldsymbol{F}(x, y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$, $(x, y)\in\mathbb{R}^2$.

   a. 证明：在平面$\mathbb{R}^2$中任意点处都可应用反函数定理.

   b. 证明：函数$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$不是一对一的.

   c. (b)与(a)矛盾吗?

10. 对$\mathbb{R}^2$中的(r, θ)，定义映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为$\boldsymbol{F}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

    a. 在$\mathbb{R}^2$中哪些点(r_0, θ_0)处对这个映射可应用反函数定理?

    b. 求关于点$(r, \theta)=\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$的局部逆映射的某个显式公式.（提示：局部逆映射对应于极坐标的赋值.）

11. 对一对实数a与b，考虑非线性方程组

$$x+x^2\cos y+xye^{x^3y^2}=a,$$
$$y+x^5+y^3-x^2\cos(xy)=b.$$

428 运用反函数定理证明：存在某个正数r，使得当$a^2+b^2<r^2$时，这个方程组至少有一个解.

12. 我们注意到，反函数定理的结论可以改进，在其中可以把邻域V选成一个开球. 利用同样的论据证明，可以把邻域U选成一个开球. 证明：一般不可能把U及V同时选成开球.（提示：考虑对$\mathbb{R}^2$中的点(x, y)，把映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$定义为$\boldsymbol{F}(x,y)=(x,2y)$.）

13. 令连续可微映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$用分量函数表示为$\boldsymbol{F}(x, y)=(\psi(x, y), \phi(x, y))$, $(x, y)\in\mathbb{R}^2$. 假设$\mathbb{R}^2$中的点(x_0, y_0)有如下性质：对$\mathbb{R}^2$中所有的(x, y)，

$$\psi(x,y)\geqslant\psi(x_0,y_0).$$

    a. 用解析方式说明为什么反函数定理的假设在(x_0, y_0)处不成立.

    b. 用几何方式说明为什么反函数定理的结论在(x_0, y_0)处不成立.

14. 假设函数$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是连续可微的，且定义映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(\psi(x,y), -\psi(x,y)),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

    a. 用解析方式说明为什么反函数定理的假设在$\mathbb{R}^2$中每一点(x_0, y_0)处都不成立.

b. 用几何方式说明为什么反函数定理的结论在$\mathbb{R}^2$中每一点(x_0, y_0)处都不成立.

16.2 非线性映射的稳定性

本节将首先研究非线性映射的稳定性(stability)概念. 为此，我们先重述$n \times n$矩阵的可逆性如下的特征(定理 15.21).

定理 16.7 对一个$n \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$，下述两个断言是等价的：

(i) 矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆的.

(ii) 存在一个正数c，使得对$\mathbb{R}^n$中所有的点$\boldsymbol{h}$，有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\| \geqslant c\|\boldsymbol{h}\|.$$

正如在 15.1 节所讨论的，对于$n \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$相伴的一个线性映射$\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,断言：线性映射$\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$可逆等价于矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵. 这样，如果令$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$，及由线性性可看到$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$，从上述定理知，线性映射$\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是可逆的，当且仅当存在正数$c$，使得对$\mathbb{R}^n$中所有的点$\boldsymbol{u}$及$\boldsymbol{v}$，有 429

$$\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})\| \geqslant c\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

由此我们给出下述关于一般映射的定义.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的子集. 映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to \mathbb{R}^n$称为**稳定的**(stable)，如果存在一个正数c(它称为这个映射的**稳定常数**，stability constant)，使得对$\mathcal{O}$中所有的点$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$，

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\| \geqslant c\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|. \tag{16.11}$$

本节的主要结果是：如果一个连续可微映射在一点处有可逆的导数矩阵，则存在这点的一个邻域，使这个映射是稳定的. 为证明它，首先建立下述关于逆矩阵的扰动结果是有用的.

引理 16.8 设$\boldsymbol{A}$是可逆的$n \times n$矩阵，且c是正数，使得对$\mathbb{R}^n$中所有的点$\boldsymbol{h}$，有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\| \geqslant c\|\boldsymbol{h}\|.$$

如果$\boldsymbol{B}$是$n \times n$矩阵且$\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\| \leqslant \frac{c}{2}$，则对$\mathbb{R}^n$中所有的点$\boldsymbol{h}$，有

$$\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\| \geqslant \frac{c}{2}\|\boldsymbol{h}\|. \tag{16.12}$$

特别地，对每对下标$i(1\leqslant i\leqslant n)$，$j(1\leqslant j\leqslant n)$，有

$$|a_{ij} - b_{ij}| \leqslant \frac{c}{2n},$$

则(16.12)式成立.

证明 设$\boldsymbol{h}$是$\mathbb{R}^n$中一点. 由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{h} + [\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}]\boldsymbol{h},$$

由三角不等式得

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\| \leqslant \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\| + \|[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}]\boldsymbol{h}\|,$$

由广义的柯西-施瓦茨不等式得

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\| \leqslant \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\| + \|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\| \cdot \|\boldsymbol{h}\|.$$

但由假设

$$c\|\boldsymbol{h}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\| \quad 及 \quad \|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\| < \frac{c}{2},$$

得

430

$$\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\| \geqslant \frac{c}{2}\|\boldsymbol{h}\|.$$

最后，如果 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ 的每个元素的绝对值小于 $c/2n$，则由矩阵的模的定义得

$$\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij}-b_{ij})^2} \leqslant \frac{c}{2},$$

因为 $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij}-b_{ij})^2$ 是 n^2 个每项小于 $c^2/4n^2$ 的和. ■

定理 16.9(非线性的稳定性定理) 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$中的一个开子集，并假设映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的，假设 x_* 是$\mathcal{O}$中的点，此点处的导数矩阵

$$\boldsymbol{DF}(x_*) 是可逆的.$$

则存在 x_* 的邻域 U，使得

(i) 映射 $\boldsymbol{F}$: $U\to\mathbb{R}^n$ 是稳定的.

(ii) 导数矩阵 $\boldsymbol{DF}(x)$ 在 U 中的每一点 x 处是可逆的.

证明 因为矩阵 $\boldsymbol{DF}(x_*)$ 是可逆的，由定理 16.7 知，我们可选取一正数 c，使得对$\mathbb{R}^n$中所有的$\boldsymbol{h}$，有

$$\|\boldsymbol{DF}(x_*)\boldsymbol{h}\| \geqslant c\|\boldsymbol{h}\|. \tag{16.13}$$

因为映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的，所以可选择正数 r，使得开球 $U=\mathcal{B}_r(x_*)$ 包含在$\mathcal{O}$内，并有性质：对 U 中每一点 z 及每一对下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 与 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，使得

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_*)\right| < \frac{c}{2n}. \tag{16.14}$$

估计式(16.13)与(16.14)及引理 16.8 一起蕴涵着，如果 $\boldsymbol{B}$ 是任意 $n\times n$ 矩阵，对每一对下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，$j(1\leqslant j\leqslant n)$，对 U 中某个点 z_{ij}，有

$$b_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z_{ij}), \tag{16.15}$$

则对$\mathbb{R}^n$中所有的 $\boldsymbol{h}$ 有

$$\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\| \geqslant \frac{c}{2}\|\boldsymbol{h}\|.$$

为证明 $\boldsymbol{F}:U\to\mathbb{R}^n$ 是稳定的. 令 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 U 中不同的点，根据对映射的中值定理，有 n 个点 $z_1,\cdots,z_n$ 位于点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的线段上，使得如果 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 矩阵，它的第 i 行是 $\nabla F_i(z_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，则

431

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}).$$

但是 $\boldsymbol{B}$ 是一个由(16.15)所描述的那样的矩阵，其中 $z_{ij}=z_i$，从而

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\| \geqslant \frac{c}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

这证明了映射 $\boldsymbol{F}:U\to\mathbb{R}^n$ 是稳定的.

为证明对 U 中的每个 x，$\boldsymbol{DF}(x)$ 是可逆的，只要注意到对 U 中的 x，$\boldsymbol{DF}(x)$ 正是由

(16.15)所描述的那样的矩阵，其中 $z_{ij}=\boldsymbol{x}$，因而对$\mathbb{R}^n$ 中所有的点 $\boldsymbol{h}$，

$$\|\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\| \geqslant \frac{c}{2}\|\boldsymbol{h}\|.$$

这样，由定理 16.7 得，导数矩阵 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$是可逆的. ■

习题

1. 设 n 是奇正整数，对$\mathbb{R}$ 中的每个 x，定义 $f(x)=x^n$.
   a. 证明：函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一对一及映上的.
   b. 运用幂函数的差的公式证明：如果 $n>1$，则函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是不稳定的.
2. 设 I 是一开区间，并假设函数$f:I\to\mathbb{R}$是可微的. 证明：$f:I\to\mathbb{R}$是稳定的，具有稳定常数 c，当且仅当对 I 中所有的 x，有
$$|f'(x)|\geqslant c.$$
3. 对$\mathbb{R}^2$ 中的(x, y)，定义
$$\boldsymbol{G}(x,y) = (x^2,y).$$
   证明：在$(0, 0)$处不存在邻域 U，使得 $\boldsymbol{G}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是稳定的.
4. 稳定的映射的和也是稳定的吗？
5. 假设函数f: $[0, \infty)\to[0, \infty)$是连续且稳定的，$f(0)=0$. 证明：$f$: $[0, \infty)\to[0, \infty)$是一对一且映上的.
6. 求一个常数 $\gamma>0$，使得矩阵
$$\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ b & 1 & c\\ c & 0 & 1\end{bmatrix}$$
   在 $|a|<\gamma$，$|b|<\gamma$ 及 $|c|<\gamma$ 时为可逆的.
7. (一个整体反函数定理)假设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续且稳定的. 证明：$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一对一映上的. (提示：同时证明 $f([0, \infty))$及$f((-\infty, 0])$是无界的，其中一个是上无界而另一个是下无界.)
8. 令 U 是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，假设连续可微映射 $\boldsymbol{F}$: $U\to\mathbb{R}^n$ 是稳定的. 证明：对 U 中每一个点 $\boldsymbol{x}$，导数矩阵 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$是可逆的. (提示：运用一阶逼近定理.)

432

16.3 极小化原理与一般反函数定理

为了证明平面上以及推广到一般欧几里得空间上的反函数定理，我们必须面对这样的问题：如何去证明一个特殊的点位于一个映射的象上. 对于一元实值函数，介值定理是十分有用的，因为对于定义在区间上的连续函数，要证明一个点位于函数的象上，只要证明有函数值同时大于及小于这一点. 介值定理不容易推广到象位于$\mathbb{R}^m$($m>1$)的映射上. 因此我们将寻找一个不同的策略. 为了说明一个特殊的方程有一个解，我们引进一个具有如下性质的辅助函数：这个辅助函数的极小值点是给定方程的解.

命题 16.10(极小化原理) 设 U 是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，假设映射 $\boldsymbol{F}:U\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的. 此外，假设在 U 中的每一点 $\boldsymbol{x}$ 处，导数矩阵 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$是可逆的. 令 $\boldsymbol{y}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的一点，定义函数 E[⊖]$:U\to\mathbb{R}$ 为

$$E(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\|^2,\quad \boldsymbol{x}\in U.$$

⊖ 符号 E 用来表示误差(error)，因为 $E(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\|^2$ 是一个点 $\boldsymbol{x}$ 离开方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 的解有多远的度量.

则下述两个断言是等价的：

(i)点 $\boldsymbol{y}$ 位于 $\boldsymbol{F}:U \to \mathbb{R}^n$ 的象上.

(ii)函数 $E:U \to \mathbb{R}$ 达到极小值.

证明 因为对 U 中的每一点，$E(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$. 如果 $\boldsymbol{y}$ 位于映射 $\boldsymbol{F}:U \to \mathbb{R}^n$ 的象上，则函数 $E:U \to \mathbb{R}$ 达到值 0，并且 0 肯定是 E 的极小值. 从而断言(i)蕴涵断言(ii).

反之，假设函数 $E:U \to \mathbb{R}$ 达到极小值，设 U 中的点 $\boldsymbol{x}$ 是函数 $E:U \to \mathbb{R}$ 的极小值点，则在点 $\boldsymbol{x}$ 处有

$$\nabla E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

考虑到对每个下标 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} 2(F_j(\boldsymbol{x}) - y_j)\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \tag{16.16}$$

因此 E 的梯度可以用 $\boldsymbol{DF}$ 的转置表示为

433

$$\nabla E(\boldsymbol{x}) = 2[\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}).$$

从而得

$$2[\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}. \tag{16.17}$$

由假设，矩阵 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$是可逆的，由定理 15.23 知，它的转置$[\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$ 也是可逆的.

但是对任一 $n \times n$ 可逆矩阵 A 及$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{0}, \quad 当且仅当 u = \boldsymbol{0}.$$

从而由(16.17)推出 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}.$$

■

为了运用上述极小化原理，必须建立某些定义在$\mathbb{R}^n$ 的开子集上的连续函数有极小值. 推论 11.23 断言定义在$\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集上的每个连续实值函数有极小值. 对于$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}_0$ 及 $r>0$，$\boldsymbol{x}_0$ 的半径为 r 的闭球(closed ball，记为$\mathcal{CB}_r(\boldsymbol{x}_0)$)定义为

$$\mathcal{CB}_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) \leqslant r\}.$$

闭单位球$\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)$是$\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集. 假设$f:\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0) \to \mathbb{R}$ 是连续的且满足当 $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = r$ 时，

$$f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x}). \tag{16.18}$$

推论 11.23 蕴涵着函数$f:\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0) \to \mathbb{R}$ 在$\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)$上达到极小值. 由假设(16.18)推出这个极小值点不会出现在 $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = r$ 上. 这样，限制函数$f:\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0) \to \mathbb{R}$ 是在开集上定义的连续函数，且在定义域内达到极小值. 这便是我们运用极小化原理的一种策略.

引理 16.11(开映象引理) 设 U 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集，假设连续可微映射 $\boldsymbol{F}:U \to \mathbb{R}^n$ 是稳定的且在 U 中每一点有一个可逆的导数矩阵，则象 $\boldsymbol{F}(U)$也是开的.

证明 设 $\boldsymbol{y}_0$ 是 $\boldsymbol{F}(U)$中的一点. 我们需证明 $\boldsymbol{y}_0$ 是 $\boldsymbol{F}(U)$的内点，即是需找到某个正数 r，使得开球$\mathcal{B}_r(y_0)$包含在 $\boldsymbol{F}(U)$内. 为做到这一点，设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 U 中使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$ 的点. 因为 U 是开的，我们可选取一个正数 r_0，使得闭球$\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)$包含在 U 内. 正如上面指出的，$\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)$是闭且有界的. 定义 $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = r_0\}$. 在象内构造一个开球，如图 16.3 所示.

由假设，映射 $\boldsymbol{F}:U \to \mathbb{R}^n$ 是稳定的，因此我们可选取正数 c，使得对 U 内所有的点 u，v，

434

$$\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) \| \geqslant c \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \|.$$

特别地，

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}_0\| = \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\| \geqslant c\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) = cr_0, \quad \boldsymbol{x}\in S. \tag{16.19}$$

定义 $r=cr_0/2$. 我们断言：开球$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{y}_0)$包含在$\boldsymbol{F}(U)$内，为证明这一点，我们运用极小化原理. 选取$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{y}_0)$中一点 $\boldsymbol{y}$.

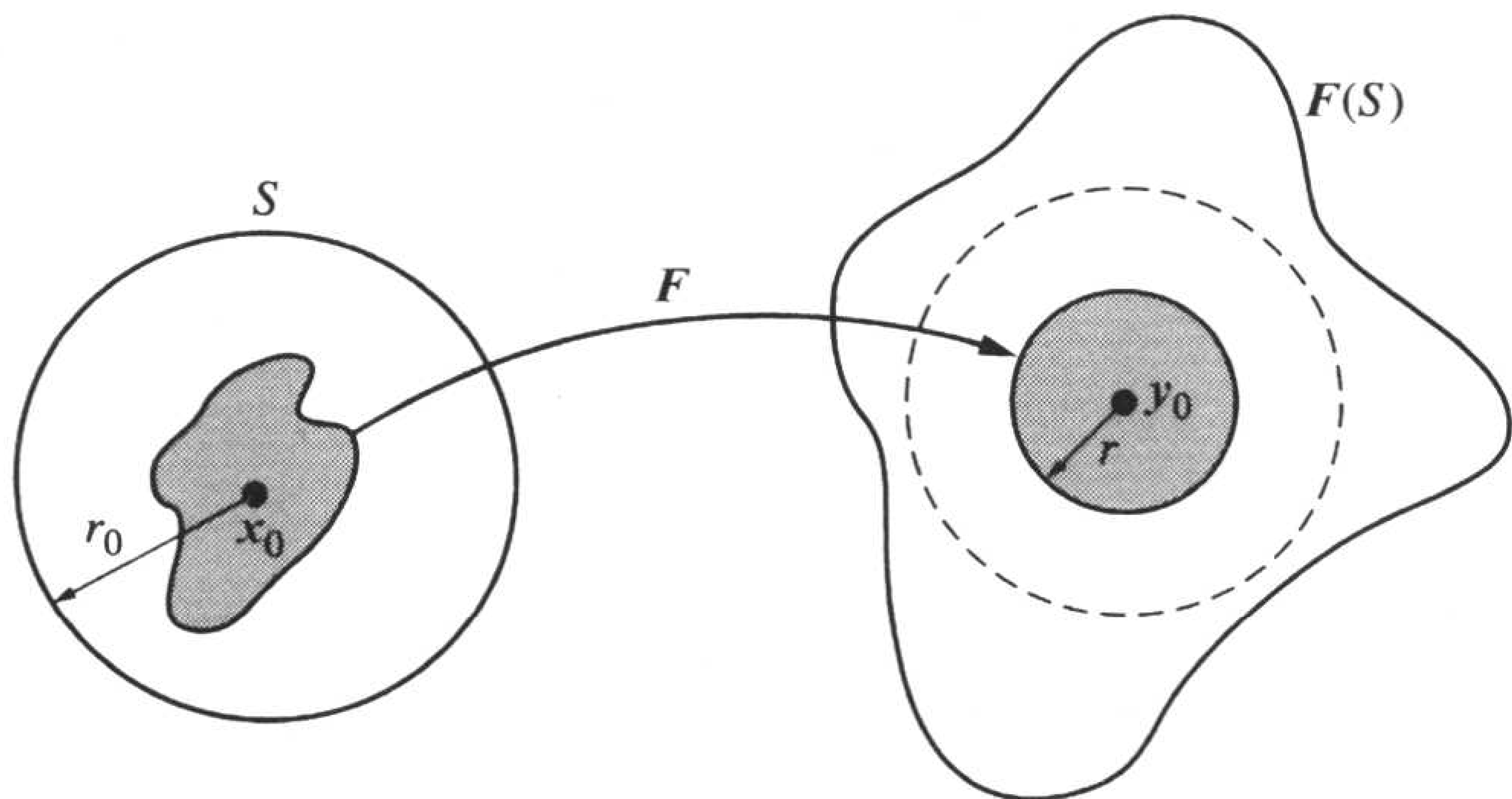


图 16.3　在象内构造一个开球

定义辅助函数 $E:\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)\to\mathbb{R}$ 为

$$E(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\|^2, \quad x\in\mathcal{CB}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0).$$

由估计式(16.19)及三角不等式得，当 $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=r$ 时，

$$\begin{aligned} cr_0 &\leqslant \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}_0\| \leqslant \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\| \\ &< \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\| + cr_0/2, \end{aligned}$$

因此

$$cr_0/2 < \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\|.$$

从而当 $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=r$ 时，

$$E(\boldsymbol{x}_0) < E(\boldsymbol{x}).$$

从引理的论证我们得结论：E 在开球$\mathcal{B}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)$达到极小值. 由极小化原理推知，$y$ 在象$\boldsymbol{F}(\mathcal{B}_{r_0}(\boldsymbol{x}_0))$内. 这样，圆心为 $\boldsymbol{y}$ 半径为 r 的开球包含在 $\boldsymbol{F}(U)$内. ■

定理 16.12(反函数原理)　设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，并假设映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的. 令 $\boldsymbol{x}_*$ 是$\mathcal{O}$中一点，此点处导数矩阵

$$\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}_*)\text{ 是可逆的.} \tag{16.20}$$

435

则存在点 $\boldsymbol{x}_*$ 的一个邻域 U 和它的象 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_*)$的一个邻域 V，使得映射

$$\boldsymbol{F}:U\to V\text{ 是一对一且映上的.} \tag{16.21}$$

而且，逆映射 $\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$ 也是连续可微的，且对 V 中的一点 $\boldsymbol{y}$，如果在 U 中的一点 $\boldsymbol{x}$ 处有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{DF}^{-1}(\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})]^{-1}. \tag{16.22}$$

证明　由非线性稳定性定理，我们可以选取 $\boldsymbol{x}_*$ 的一个邻域 U 及一个正数 c，使得对 U 中所有的点 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，有

$$\| F(u) - F(v) \| \geq c \| u - v \|, \tag{16.23}$$

且对 U 中所有的点 $\boldsymbol{x}$,

$$DF(x) \text{ 是可逆的}. \tag{16.24}$$

我们可以借助开象引理得到 $F(U)$ 是开的，并记为 V. 这样，U 是 x_* 的邻域，V 是象 $F(x_*)=y_*$ 的一个邻域(如图 16.4 所示)，映射 $F:U\to V$ 是一对一且映上的，并且对 U 中所有的点 x，$DF(x)$ 是可逆的. 下面只需证明这个逆映射 $F^{-1}:V\to U$ 也是连续可微的及公式(16.22)成立.

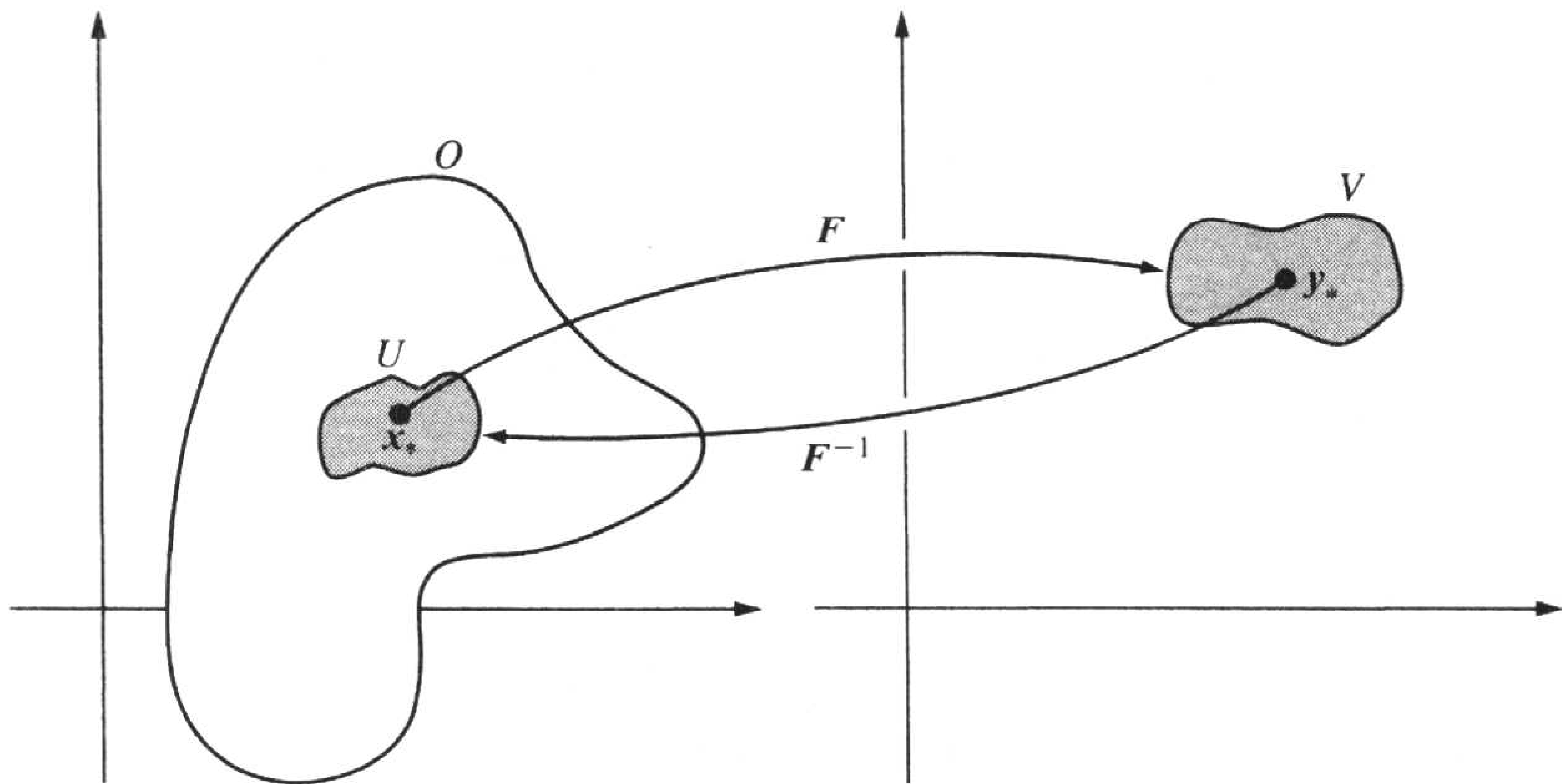


图 16.4 F 把一个邻域映成一个邻域

首先，我们证明逆映射是连续的，然后建立公式(16.22). 一旦这样做了，逆映射的连续可微性可由一个公式得到，这个公式将 $n\times n$ 矩阵的逆矩阵的元素由这个矩阵的元素表示出(见习题 10.)

436

令 y 是 V 中的点，而 x 是 U 中的点，使得 $F(x)=y$. 对 V 中的点 $y+k$，定义 $h=F^{-1}(y+k)-F^{-1}(y)$. 这样,

$$F(x) = y, \quad F(x+h) = y+k. \tag{16.25}$$

从稳定性估计式(16.23)，我们获得下述估计:

$$\| k \| = \| F(x+h) - F(x) \| \geq c \| h \|. \tag{16.26}$$

因为 $h=F^{-1}(y+k)-F^{-1}(y)$，上面估计式可改写成

$$\| F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) \| \leq \frac{1}{c} \| k \|,$$

由此得 $F^{-1}:V\to U$ 在点 y 处的连续性.

现在来建立公式(16.22)，为此定义

$$B = (DF(x))^{-1}.$$

根据定理 15.32，为证(16.22)，只需证明

$$\lim_{k\to 0} \frac{\| F^{-1}(y+k) - [F^{-1}(y) + Bk] \|}{\| k \|} = 0. \tag{16.27}$$

注意，(16.26)为(16.27)的分母提供了一个有用的下界. 为了对分子寻找有用的上界，观察到

$$F^{-1}(y+k)-[F^{-1}(y)+Bk]=h-Bk=B[B^{-1}h-k]$$
$$=B[DF(x)h-F(x+h)+F(x)].$$

因此，运用广义的柯西-施瓦茨不等式得

$$\|F^{-1}(y+k)-[F^{-1}(y)+Bk]\|\leqslant\|B\|\cdot\|F(x+h)-[F(x)+DF(x)h]\|. \tag{16.28}$$

从估计式(16.26)及(16.28)，我们对(16.27)的左边部分的商得到下述估计：

$$\frac{\|F^{-1}(y+k)-[F^{-1}(y)+Bk]\|}{\|k\|}\leqslant\frac{\|B\|}{c}\left\{\frac{\|F(x+h)-[F(x)+DF(x)h]\|}{\|h\|}\right\}. \tag{16.29}$$

估计式(16.26)蕴涵着当 $k\to 0$ 时，$h\to 0$. 所以由一阶逼近定理知，当 $k\to 0$ 时，估计式(16.29)的右边收敛于0，因此(16.29)的左边也如此. 这就证明了(16.27). ■

习题

1. 对下列映射 F: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，在$\mathbb{R}^3$ 中确定点(x_0, y_0, z_0)，使得反函数定理在这点上可应用：

a. $F(x, y, z)=(e^x\cos y, e^x\sin y, z^2)$，$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$.

b. $F(x, y, z)=(yz, xz, xy)$，$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$.

437

2. 对$\mathbb{R}^3$ 中的点(ρ, θ, ϕ)，定义 $F(\rho, \theta, \phi)=(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$. 在$\mathbb{R}^3$ 中哪些点$(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$处，反函数定理可应用于映射 F: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$?

3. 假设函数 ψ: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，$\varphi$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，对$\mathbb{R}^3$ 中的点(x, y, z)，定义

$$F(x,y,z)=(\psi(x,y,z),\varphi(x,y,z),(\psi(x,y,z))^2+(\varphi(x,y,z))^2).$$

a. 用解析方式说明为什么对映射 F: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 在$\mathbb{R}^3$ 中不存在点(x_0, y_0, z_0)，使得反函数定理的假设成立.

b. 用几何方式说明为什么对映射 F: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 在$\mathbb{R}^3$ 中不存在点(x_0, y_0, z_0)，使得反函数定理的结论成立.

4. 对 $n=3$ 的情况，借助映射和它的逆的分量函数的一阶偏导数，用显示方式表示矩阵公式(16.22)的内涵.

5. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，c 和 x_* 是$\mathbb{R}^n$ 中的点. 定义仿射映射 $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为

$$G(x)=c+A(x-x_*),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

证明：映射 $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一对一且映上的，当且仅当矩阵 A 是可逆的.

6. 对$\mathbb{R}$ 中的 x，定义 $f(x)=x^2$.

a. 证明：若$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$ 的任意一个不包含 0 数开子集，则$f(\mathcal{O})$是开的.

b. 证明：若$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$ 的一个含 0 的开子集，则$f(\mathcal{O})$不是开的.

7. 给出一个连续可微映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 具有如下性质的例子：不存在$\mathbb{R}^n$ 的开子集 U，使得 $F(U)$在$\mathbb{R}^n$ 中是开的.

8. 设 I 是实数的一个开区间，并假设函数$f:I\to\mathbb{R}$ 是连续的. 设 c 是一个实数，固定区间 I 中的一数 x_0，定义辅助函数 $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$H(x)=cx-\int_{x_0}^{x}f(s)\,ds,\quad x\in I.$$

对 I 中的一点 x，证明：如果 $H'(x)=0$，则 $f(x)=c$. 如果函数 $H:I\to\mathbb{R}$ 有局部极值点，则 c 是 $f:I\to\mathbb{R}$

的象.

9. 给定理16.1一个证明，以极小化原理代替介值定理用来证明J是包含在$f(I)$中.

438 **10.** 运用克莱姆法则及逆映射$\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$的连续性证明：公式(16.22)蕴涵逆映射$\boldsymbol{F}^{-1}:V\to U$是连续可微的.

11. (整体反函数定理)假设映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是连续可微且稳定的. 通过验证下面部分的每一个证明映射$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是可逆的.

a. 对$\mathbb{R}^n$中的每一点$\boldsymbol{x}$，导数矩阵$\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$是可逆的.

b. $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}^n)$的象是$\mathbb{R}^n$的开子集(提示：应用反函数定理).

c. $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}^n)$的象是$\mathbb{R}^n$的闭子集(提示：运用稳定性及闭性的定义).

439 **d.** 证明$\boldsymbol{F}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$(提示：集$\boldsymbol{F}(\mathbb{R}^n)$在$\mathbb{R}^n$中是既开又闭的，且$\mathbb{R}^n$是连通的).

第17章　隐函数定理及其应用

17.1　两个未知元的标量方程的解：迪尼定理

对平面$\mathbb{R}^2$的开子集$\mathcal{O}$及一个连续可微函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$，方程

$$f(x,y)=0,\quad (x,y)\in\mathcal{O} \tag{17.1}$$

的解集合通常是平面的一个非常复杂的子集．在特殊情况下，这个解集可以不是一个函数规定的y作为x的函数的图形．然而，若点(x_0, y_0)是这个方程的解且$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\neq 0$，则存在点$(x_0, y_0)$的一个具有如下性质的邻域：在这个邻域内的这个方程的解组成一个连续可微函数$g:I\to\mathbb{R}$的图形，这里I是含x_0的一个开区间．而且，用隐含方式定义的函数$g:I\to\mathbb{R}$的导数可以借助函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$的偏导数计算，这个断言称为迪尼定理．它有一个称为一般隐函数定理的扩充，给出

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{u}\in\mathcal{O}$$

这种形式的方程的解集合的一个类似的局部描述，其中$\mathcal{O}$是欧几里得空间$\mathbb{R}^{n+k}$的一个开子集，映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$是连续可微的．

本节将给出迪尼定理的一个证明及一些例子．在17.2节我们将证明一般隐函数定理．最后两节将介绍隐函数定理的应用，首先考虑$\mathbb{R}^3$中的路径及曲面的几何，然后考虑约束极值问题．

440

例17.1　考虑方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{17.2}$$

这个方程的解是以原点为中心的椭圆上的点．首先考虑$(x_0, y_0)=(0, 4)$，这是椭圆的上顶点．对于介于0与3之间的数r，定义I是开区间$(-r, r)$且对I中的x，定义函数$g:I\to\mathbb{R}$为$g(x)=4\sqrt{1-x^2/9}$．这时存在解$(0, 4)$的一个邻域，它具有如下性质：方程(17.2)在这个邻域内的解集由形如$(x, g(x))$ $(x\in I)$的点组成（如图17.1所示）．现在考虑解$(0, 4)$的第二个分

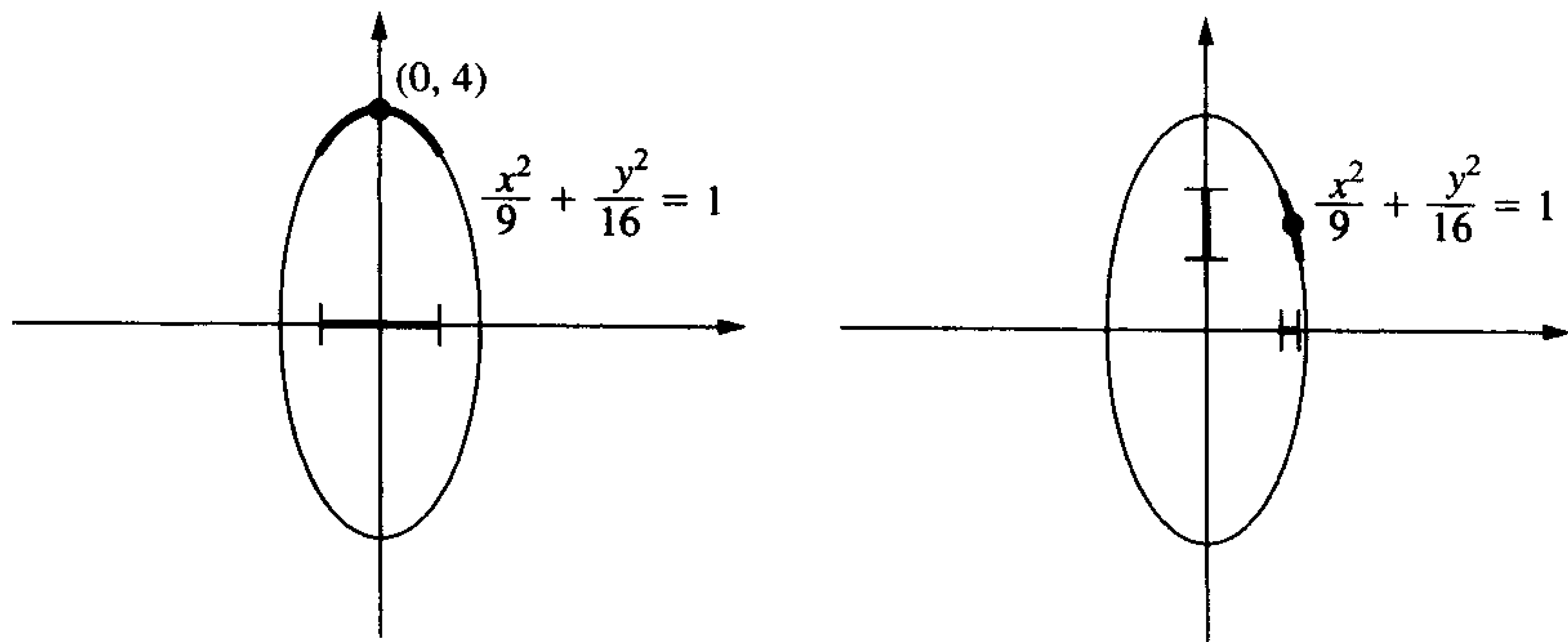


图17.1　方程$f(x, y)=0$在解(x_0, y_0)附近的解

量，注意，不可能找到数 4 的一个邻域 J 和一个函数 $h:J\to\mathbb{R}$ 以及解(0, 4)的一个邻域，在这个邻域中方程(17.2)的解集由形如$(h(y),\ y)\ (y\in J)$的点组成. 在椭圆的其他每个顶点处，都可以找到这个顶点的一个邻域，在这个邻域内对方程(17.2)的解有类似的描述. 另一方面，方程(17.2)的一个解$(x_0,\ y_0)$不是椭圆的顶点，在$(x_0,\ y_0)$的邻域中，方程(17.2)的解既可以是 x 为 y 的函数，也可以是 y 为 x 的函数. 我们把这个特定函数的计算留作习题. ■

例 17.2 方程

$$y^2 - x^2 = 0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{17.3}$$

的解集合包含平面内位于直线 $y=x$ 或直线 $y=-x$ 上的点. 在方程(17.3)的每个不等于(0, 0)的解$(x_0,\ y_0)$处，存在$(x_0,\ y_0)$的邻域，其中方程(17.3)的解集合既可以确定 x 是 y 的函数，也可确定 y 是 x 的函数. 原点(0, 0)是方程(17.3)的一个解，但不存在(0, 0)的邻域，使得解集合与一个函数的图形是一致的，这个函数把点$(x,\ y)$的一个分量表示为另一个分量的函数. ■

441

上面的两个例子中的方程是如此简单，使得我们可以显式确定这两个非线性方程的全部解. 一般来说，这肯定是不可能的. 由此，下面定理是重要的.

定理 17.3(迪尼定理) *设$\mathcal{O}$是平面$\mathbb{R}^2$的开子集，假设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的. 令$(x_0,\ y_0)$是$\mathcal{O}$中一点，有$f(x_0,\ y_0)=0$及*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0. \tag{17.4}$$

那么存在一个正数 r 和一个连续可微函数 $g:I\to\mathbb{R}$，其中 I 是开区间$(x_0-r,\ x_0+r)$，使得对 I 中所有 x，

$$f(x,g(x)) = 0. \tag{i}$$

且当 $|x-x_0|<r$，$|y-y_0|<r$ 及 $f(x,\ y)=0$ 时，

$$y = g(x). \tag{ii}$$

此外，对 I 中所有的 x，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))g'(x) = 0. \tag{iii}$$

证明 我们可设$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)>0$. 因为$\mathcal{O}$是开集及函数$\frac{\partial f}{\partial y}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的，且在$(x_0,\ y_0)$为正，所以我们可选正数 a 和 c，使得闭的正方形 $R=[x_0-a,\ x_0+a]\times[y_0-a,\ y_0+a]$包含在$\mathcal{O}$中且对 R 内所有的点$(x,\ y)$，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\geqslant c. \tag{17.5}$$

由一元实变量的标量函数的中值定理知，当 $|x-x_0|\leqslant a$ 及 $y_0-a\leqslant y_1<y_2\leqslant y_0+a$ 时，

$$f(x,y_1) < f(x,y_2). \tag{17.6}$$

特别地，因为$f(x_0,\ y_0)=0$，所以得出$f(x_0,\ y_0-a)<0<f(x_0,\ y_0+a)$，如图 17.2 所示. 此外，函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的，因为它是连续可微的. 这样，我们可选取一小于 a 的正数 r，若令 $I=(x_0-r,\ x_0+r)$，则对 I 中所有的 x 有

442

$$f(x,y_0-a) < 0 < f(x,y_0+a),$$

设 x 是 I 中一点，$f(x,\ y)$的符号的改变如图 17.3 所示，因为$f(x,\ y_0-a)<0$及$f(x,\ y_0+a)>0$，

根据介值定理，存在介于y_0-a与y_0+a之间的某一点y，使得$f(x,y)=0$，并由(17.6)知，仅有唯一个这样的点．定义$g(x)$是这一点．这显然定义了一个函数$g:I\to\mathbb{R}$，它具有性质(i)及(ii)．

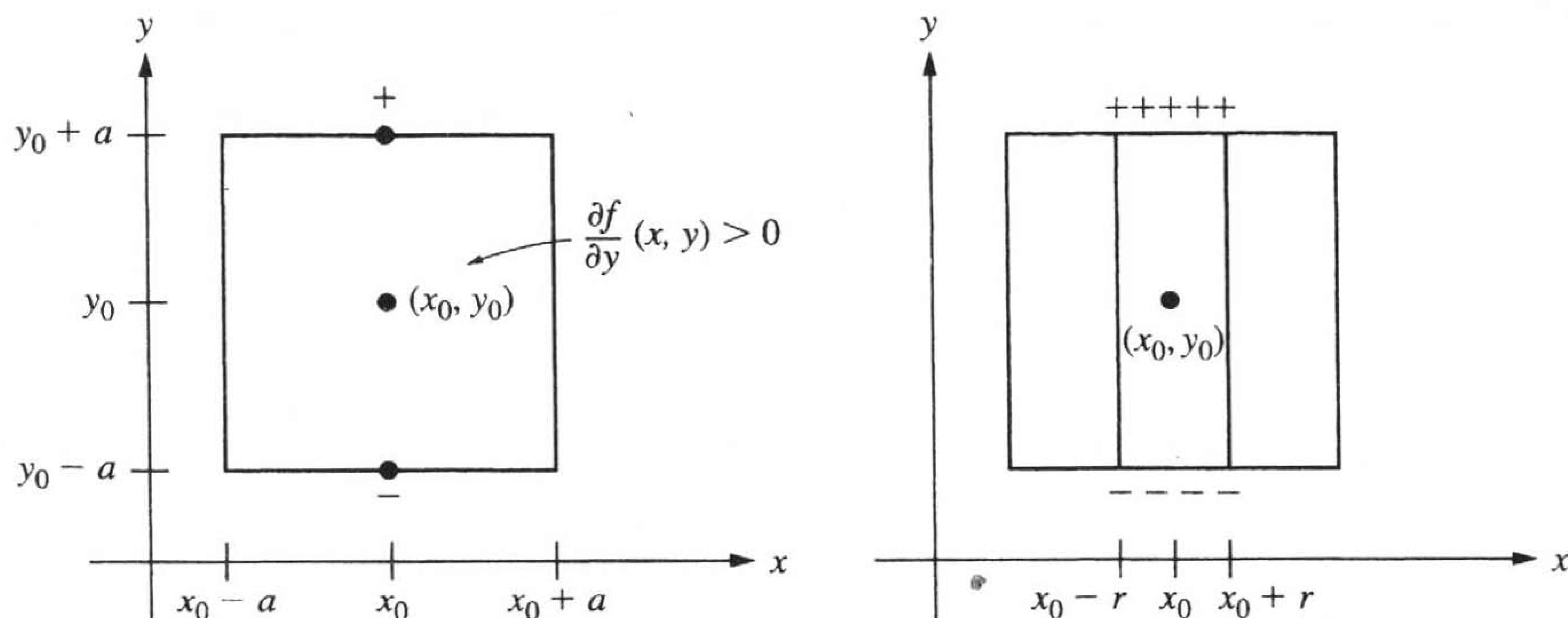


图 17.2　对I中所有的x，$f(x,y_0-a)<0<f(x,y_0+a)$

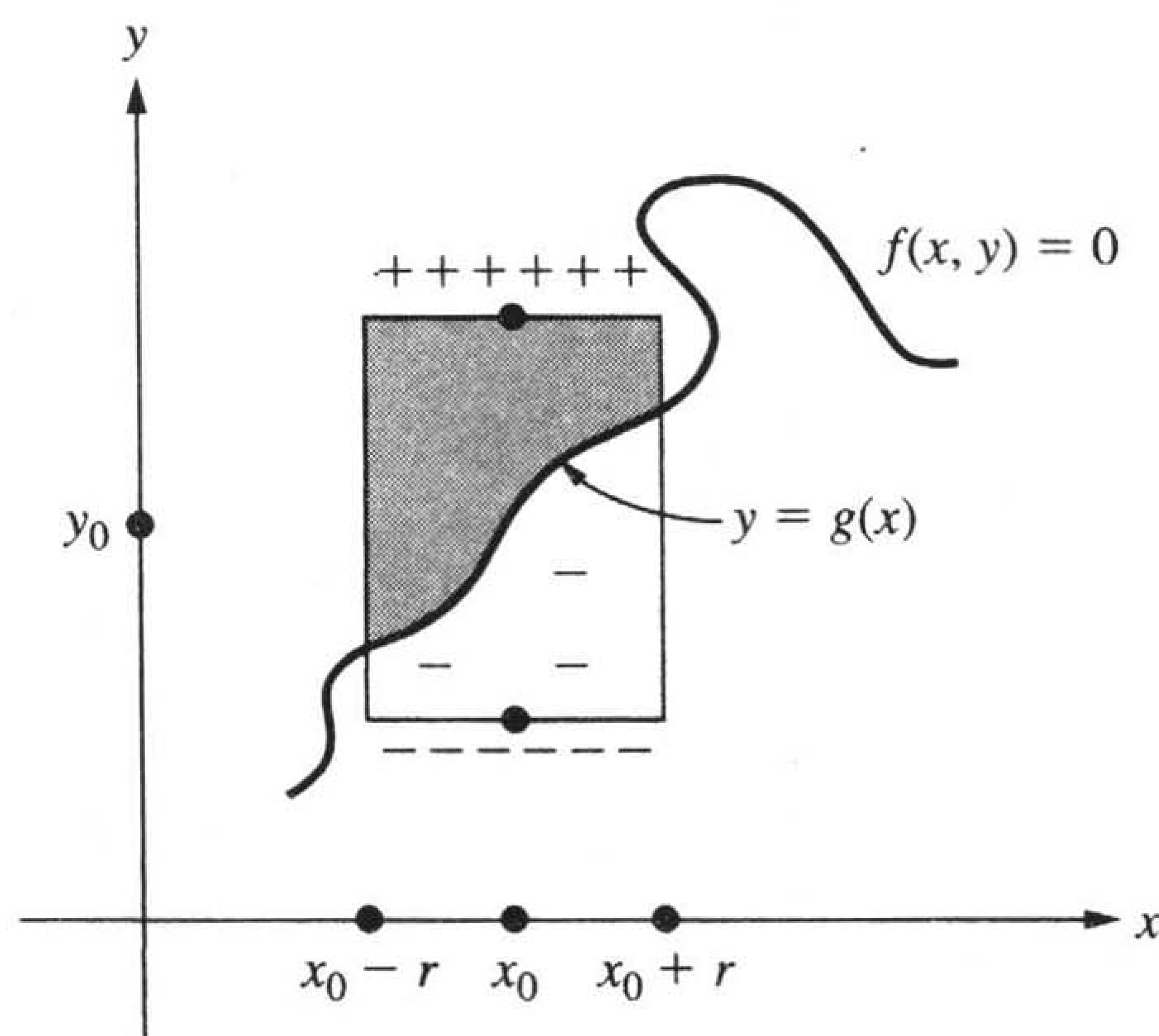


图 17.3　$f(x,y)$的符号的改变

我们现在来证明$g:I\to\mathbb{R}$是连续可微的及在点x_0处导数公式(iii)成立．事实上，令x_0+h是I中一点，则由定义知，$f(x_0+h,g(x_0+h))=0$且$f(x_0,g(x_0))=0$，特别地，

$$0=f(x_0+h,g(x_0+h))-f(x_0,g(x_0)).$$

根据对于二元实变量标量函数的中值定理，在连接点$(x_0,g(x_0))$与$(x_0+h,g(x_0+h))$的线段上存在某一点，记为$\boldsymbol{p}(h)$，在此点处有

$$f(x_0+h,g(x_0+h))-f(x_0,g(x_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}(h))h+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}(h))[g(x_0+h)-g(x_0)].$$

443

上式左端是0，因此有

$$g(x_0+h)-g(x_0)=-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}(h))\Big/\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}(h))\right]h. \tag{17.7}$$

由于函数$\partial f/\partial x:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续的且闭的正方形$R$是平面的一个列紧子集，由极值定理，我们可选取一正数M，使得对R中所有的点(x,y)，

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant M.$$

运用这个不等式及不等式(17.5)，由公式(17.7)得出如果 x_0+h 在 I 内，则

$$\left|g(x_0+h)-g(x_0)\right| \leqslant \frac{M}{c}\left|h\right|.$$

因此函数 $g:I\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处连续. 由于点 $\boldsymbol{p}(h)$ 在连接点 $(x_0, g(x_0))$ 和 $(x_0+h, g(x_0+h))$ 之间的线段上，于是得出

$$\lim_{h\to 0}\boldsymbol{p}(h)=(x_0,y_0).$$

如果我们在(17.7)两边除以 h 及运用 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的一阶偏导数在点 (x_0, y_0) 处的连续性，由(17.7)得出

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Big/\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

这意味着 g 在 x_0 处可微且公式(iii)在 x_0 处成立. 但是对区间 I 中任意其他点 x，它满足与 x_0 相同的假设，因而(iii)对 I 中所有的点成立. ■

例 17.4 考虑方程

$$\cos(x+y)+e^{y+x^2}+3x-2-x^3y^3=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{17.8}$$

对 $\mathbb{R}^2$ 中的 (x, y)，定义 $f(x, y)=\cos(x+y)+e^{y+x^2}+3x-2-x^3y^3$，则 (x, y) 是(17.8)的解当且仅当 $f(x, y)=0$. 注意 $(0, 0)$ 是(17.8)的一个解，且

444

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1.$$

由迪尼定理可推出存在正数 r 及一个连续可微函数 $g:I\to\mathbb{R}$，使得对 I 中所有的 x，

$$\cos(x+g(x))+e^{g(x)+x^2}+3x-2-x^3(g(x))^3=0.$$

这里 I 是开区间 $(-r, r)$. 此外，如果 (x, y) 是方程(17.8)的一解且有 $|x|<r$ 及 $|y|<r$，则 $y=g(x)$. 最后，$g'(0)$ 可由公式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)g'(0)=0$$

确定，所以 $g'(0)=-3$. ■

在迪尼定理中，假设 $\partial f/\partial y(x_0, y_0)\neq 0$ 可以由假设 $\partial f/\partial x(x_0, y_0)\neq 0$ 替换，且结论中除 x，y 的角色互换外其余部分相同. 这样，如果 $\mathcal{O}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的开子集，如果函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，以及在有 $f(x_0, y_0)=0$ 且 $\mathcal{O}$ 中的点 (x_0, y_0) 处

$$\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0),$$

则存在 (x_0, y_0) 的一个邻域，在这个邻域中方程(17.1)的解形成连续可微函数的图形，这个函数把解 (x, y) 中的一个分量描述为另一个分量的函数.

例 17.5 考虑方程

$$e^{x-2+(y-1)^2}-1=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{17.9}$$

对 $\mathbb{R}^2$ 中的 (x, y)，定义 $f(x, y)=e^{x-2+(y-1)^2}-1$. 则点 (x, y) 是方程(17.9)的解当且仅当 $f(x, y)=0$. 观察到点 $(2, 1)$ 是方程(17.9)的一个解，且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=0.$$

由迪尼定理并把变量 x 与 y 的角色交换可推得，存在一正数 r 及一个连续可微函数 $h:J\to\mathbb{R}$，使得对 J 中所有的 y，

$$e^{h(y)-2+(y-1)^2}-1=0,$$

这里 J 是开区间$(1-r,\ 1+r)$. 更进一步，如果$(x,\ y)$是方程(17.9)的解，且 $|x-2|<r$ 及 $|y-1|<r$，则 $x=h(y)$. 最后，$h'(1)$可由公式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)h'(1)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=0$$

确定，所以 $h'(1)=0$. ■ 445

当然，迪尼定理可用来分析如下形式的方程

$$\phi(x,y)=\eta(x,y),\quad (x,y)\in\mathcal{O}.\tag{17.10}$$

对$\mathcal{O}$中的$(x,\ y)$，简单地定义 $f(x,\ y)=\phi(x,\ y)-\eta(x,\ y)$. 所以方程(17.10)的解恰好是方程(17.1)的解. 特别地，对一个实数 c，我们可以分析方程

$$f(x,y)=c,\quad (x,y)\in\mathcal{O}\tag{17.11}$$

的解. 对一给定的数 c，方程(17.11)的解集通常称为函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的水平曲线(level curve). 为证明使用术语曲线(curve)是正确的，因为迪尼定理，看来有理由假设对$\mathcal{O}$中使 $f(x,\ y)=c$ 的每一点，

$$\nabla f(x,y)\neq\mathbf{0},$$

所以方程(17.11)的解集的确是曲线的并集.

我们用一个关于隐式微分法及高阶导数的说明来结束本节. 在迪尼定理的最后的断言中，关于隐函数的可微性，一旦知道了函数 $g:I\to\mathbb{R}$ 是可微的，及对 I 中所有的 x，

$$f(x,g(x))=0,\tag{17.12}$$

对于导数 $g':I\to\mathbb{R}$ 的公式(iii)是通过对(17.12)两边求导得到的，这个方法称为**隐式微分法**(implicit differentiation). 进一步，我们也可以求出函数 $g:I\to\mathbb{R}$ 的高阶导数. 例如，如果迪尼定理陈述中的函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有连续二阶偏导数，则对于隐式定义的函数 $g:I\to\mathbb{R}$ 从公式(iii)中可得出 $g':I\to\mathbb{R}$ 本身是可微的. 我们把对公式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))g'(x)=0,\quad x\in I$$

的每一端求导得到隐函数的二阶导数的公式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,g(x))+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,g(x))g'(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,g(x))[g'(x)]^2+\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))g''(x)=0.\tag{17.13}$$

留作习题.

习题

1. 考虑方程

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

446

a. 画出解集的图形并证明迪尼定理适用于点(2, 3).

b. 显式定义具有如下性质的函数 $g:I\to\mathbb{R}$：在解(2, 3)的一个邻域中，所有的解都具有$(x, g(x))$的形式，$x\in I$. 并检验公式(iii)对 $g':I\to\mathbb{R}$ 是成立的.

c. 显式定义具有如下性质的函数 $h:J\to\mathbb{R}$：在解(2, 3)的一个邻域中，所有的解都具有$(h(y), y)$的形式，$y\in J$.

2. 考虑方程

$$f(x,y)=(x^2+y^2-2)(x^2-y^2)=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

a. 通过计算偏导数证明$\nabla f(x, y)=\mathbf{0}$，并且因此在下述每一个解中，迪尼定理的假设都不成立：(0, 0)，(1, 1)，(1, −1)，(−1, −1)及(−1, 1).

b. 用这个方程的解的图形，说明迪尼定理的结论在(a)中所列的每一个解处都不成立.

3. 考虑方程

$$x^2+y^2=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

a. 说明迪尼定理的假设在解(0, 0)处不成立.

b. 通过画出这个方程的解集的图形说明为什么迪尼定理的结论在解(0, 0)处不成立.

4. 考虑方程

$$e^{2x-y}+\cos(x^2+xy)-2-2y=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

这个方程的解集合在解(0, 0)处是否有一个邻域，使得隐式定义点(x, y)中一个分量为另一个分量的函数. 如果是这样的话，计算这个函数(这些函数?)在点 0 处的导数.

5. 点(0, 0)是方程

$$\ln(x^2+y^2+1)=x,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

的解. 求这个方程在(0, 0)的一个邻域里的解所定义的一元函数在点 0 处的导数.

6. 在例 17.5 中曾考虑过的方程

$$e^{x-2+(y-1)2}-1=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

求出它的所有解的显式公式.

7. 设$\mathcal{O}$是平面上的一个开子集，假设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的. 在$\mathcal{O}$中的点$(x_0, y_0)$处，假设$f(x_0, y_0)=0$及$\nabla f(x_0, y_0)\neq(0, 0)$. 证明：向量$\nabla f(x_0, y_0)$正交于这个隐函数在$(x_0, y_0)$的切线.

447

8. 设$\mathcal{O}$是平面的一个开子集，假设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，且在$\mathcal{O}$中的点$(x_0, y_0)$处，假设$f(x_0, y_0)=0$及

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

证明：这两个由迪尼定理隐式定义的函数，适当地选取它们的定义域后，一个是另一个的反函数.

9. 假设连续可微函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$可以分解为

$$f(x,y)=(x^2+y^2)h(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

其中函数$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$也是连续可微的. 证明：迪尼定理是不能直接用于分析在解(0, 0)邻域中$f(x, y)=0$的解. 如果$h(0, 0)=0$及$\nabla h(0, 0)\neq(0, 0)$，运用迪尼定理分析$f(x, y)=0$的解.

10. 假设函数ϕ：$\mathbb{R}\to R$是连续可微的，且在$\mathbb{R}$中点x_0处，$\phi'(x_0)\neq 0$，令$y_0=\phi(x_0)$，对$\mathbb{R}^2$中的(x, y)，函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义为$f(x,y)=y-\phi(x)$. 在点$(x_0, y_0)$处运用迪尼定理于函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$并与在点$x_0$处把反函数定理应用于$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$所得的结果进行比较.

11. 假设函数h：$\mathbb{R}\to R$是可微的且存在一正数c，使对$\mathbb{R}$中所有t，有$h'(t)\geq c$. 证明：恰有一个数t使$h(t)=0$.

12. (全局隐函数定理)假设函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是连续可微的且存在一个正数$c$，使得对$\mathbb{R}^2$中每一点$(x, y)$，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geqslant c.$$

证明：存在一个连续可微函数 g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，对$\mathbb{R}$中每个 x 有

$$f(x,g(x)) = 0,$$

及如果 $f(x, y)=0$，则 $y=g(x)$.（提示：运用习题 11.）

13. 假设函数 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，且在$\mathbb{R}^3$中的点 (x_0, y_0, z_0) 处有 $f(x_0, y_0, z_0)=0$ 及 $\partial f/\partial z(x_0, y_0, z_0)>0$. 仿照迪尼定理的证明来证明：存在一个正数 r 及一个函数 $g:\mathcal{B}_r(x_0,y_0) \to \mathbb{R}$，使得对 $\mathcal{B}_r(x_0, y_0)$ 中所有的 (x, y)，

$$f(x,y,g(x,y)) = 0.$$

14. 作为迪尼定理的假设的补充，假设函数 $f:\mathcal{O}\to \mathbb{R}$ 有连续二阶偏导数.
   a. 验证公式(17.13).
   b. 此外，假设

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0.$$

   证明：$g:I\to \mathbb{R}$ 的图形是位于直线 $y=y_0$ 之下，如果 I 选择得充分小.（提示：运用公式(17.13)确定 $g''(x_0)$ 的符号.）

448

17.2 一般隐函数定理

令 k 与 n 是正整数，设$\mathcal{O}$是欧几里得空间$\mathbb{R}^{n+k}$的一个开子集，并设映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to \mathbb{R}^k$ 是连续可微的. 考虑方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{O}. \tag{17.14}$$

当 $n=1$ 及 $k=1$ 时，我们已在 17.1 节中讨论过了. 那里我们证明了迪尼定理. 本节的目的是证明一般的隐函数定理，它把迪尼定理推广到更一般的形如(17.14)的方程. 为了强调这一般情况与 $n=1$ 及 $k=1$ 这一情况之间的相似，我们引入下列记号，对$\mathbb{R}^{n+k}$中的一点 $\boldsymbol{u}$，把它前 n 个分量与后 k 个分量标记为：

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k).$$

然后，方程(17.14)可改写成

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{O}. \tag{17.15}$$

如果映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to \mathbb{R}^k$ 写成分量函数形式，$\boldsymbol{F}=(F_1, \cdots, F_k)$，这个方程可写成有 $n+k$ 个标量未知元的 k 个非线性标量方程组成的如下方程组：对$\mathcal{O}$中的 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k)$，

$$\begin{gathered} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k) = 0 \\ \vdots \\ F_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k) = 0 \\ \vdots \\ F_k(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k) = 0 \end{gathered} \tag{17.16}$$

这个方程组称为不定的是指方程的个数小于变量的个数. 我们极不可能对如此复杂的非线性方程组显式地求出它的所有解. 这样，我们要探索由对于具有两个未知元的一个标量方程的迪尼定理所提供的信息类型.

正如我们已定义过的函数的偏导数，我们现在定义映射的偏导数矩阵（partial derivative

matrices)，对$\mathcal{O}$中的点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，固定$\boldsymbol{x}$，考虑映射$\boldsymbol{y}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，它是把$\mathbb{R}^k$的开子集到$\mathbb{R}^k$的映射，我们把这个映射的$k\times k$导数矩阵记为$\boldsymbol{D_yF}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. 类似地，如果固定$\boldsymbol{y}$，考虑映射$\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，它是把$\mathbb{R}^n$的开子集映到$\mathbb{R}^k$的映射，我们把这个映射的$k\times n$导数矩阵记为$\boldsymbol{D_xF}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

449 用它们的元来表示，这些矩阵分别是

$$\boldsymbol{D_yF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial y_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_1/\partial y_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_1/\partial y_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial F_i/\partial y_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_i/\partial y_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_i/\partial y_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial F_k/\partial y_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_k/\partial y_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_k/\partial y_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D_xF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_1/\partial x_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_1/\partial x_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial F_i/\partial x_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_i/\partial x_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_i/\partial x_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial F_k/\partial x_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_k/\partial x_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \partial F_k/\partial x_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{bmatrix}.$$

下面的定理描述了方程(17.14)的解，它是迪尼定理的一个直接推广.

定理 17.6(一般隐函数定理) *设n和k是正整数，设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^{n+k}$的一个开子集，并假设映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$是连续可微的. 在$\mathcal{O}$中的点$(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)$处假设$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$及$k\times k$偏导数矩阵*

$$\boldsymbol{D_yF}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\text{ 是可逆的.} \tag{17.17}$$

则存在一正数r及一连续可微映射$\boldsymbol{G}:\mathcal{B}\to\mathbb{R}^k$ (其中$\mathcal{B}=\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x}_0)$)，使得对$B$中所有的点$\boldsymbol{x}$，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}, \tag{i}$$

且当$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<r$，$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<r$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$时，

$$y = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}). \tag{ii}$$

更进一步，对$\boldsymbol{B}$中所有的点$\boldsymbol{x}$，

$$\boldsymbol{D_xF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{D_yF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{DG}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}. \tag{iii}$$

证明 定义一个辅助映射$\boldsymbol{H}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n+k}$为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),\quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{O}.$$

观察到

450

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0},\quad \text{当且仅当 } \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}). \tag{17.18}$$

现在映射$\boldsymbol{H}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n+k}$是连续可微且介于相同维数的欧几里得空间之间的映射，所以可以应用反函数定理来分析它的象，因为相应于(17.18)，也就是分析在什么样点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$处，有$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$.

导数矩阵$\boldsymbol{DH}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)$可分解成

$$\boldsymbol{DH}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D_xF}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \boldsymbol{D_yF}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \end{bmatrix}, \tag{17.19}$$

其中$\boldsymbol{I}_n$是$n\times n$的单位矩阵，右上方的$n\times k$矩阵$\boldsymbol{0}$是所有元素都是0的矩阵. 由假设$\boldsymbol{D_yF}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)$

是 $k\times k$ 的可逆矩阵推出，$\boldsymbol{DH}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)$是$(n+k)\times(n+k)$可逆矩阵(见习题7)．因此可以对映射 $\boldsymbol{H}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n+k}$ 在点$(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)$处应用反函数定理．得出存在$(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)$的一个邻域 U 及其象 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{0})$的一个邻域 V，使得 $\boldsymbol{H}:U\to V$ 是一对一且映上的，$\boldsymbol{H}^{-1}:V\to U$ 也是连续可微的．如图 17.4 所示．

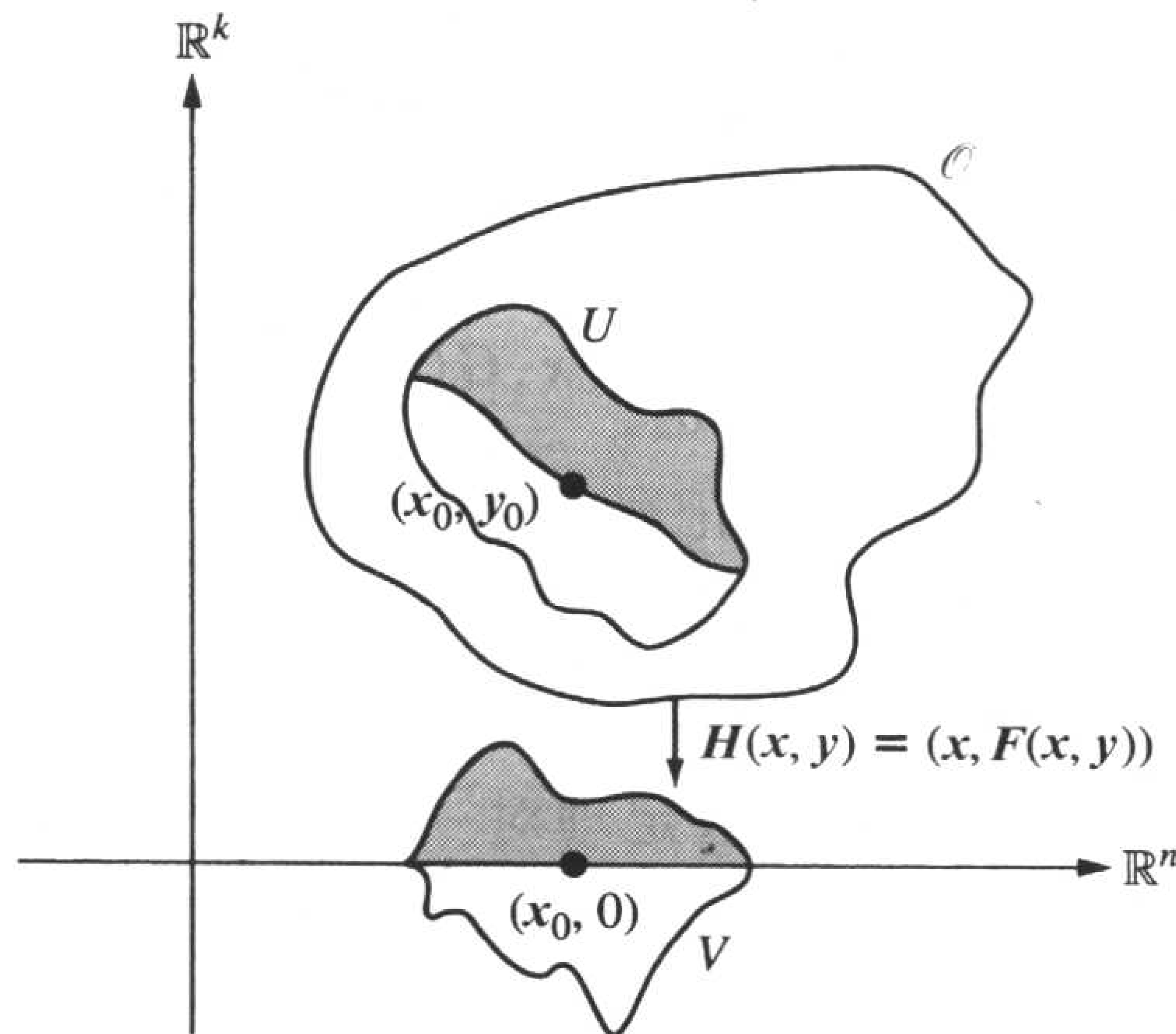


图 17.4　把 $U\subseteq\mathbb{R}^{n+k}$投影到$\mathbb{R}^n$ 上

把逆映射写为

$$\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in V.$$

根据逆映射的定义和 $\boldsymbol{H}$ 的定义得，对 V 中所有的点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，下述恒等式成立：

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{H}\circ\boldsymbol{H}^{-1})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))).\tag{17.20}$$

由这个等式中的第一个分量对应相等知，对 V 中所有的点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，有

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x},$$

451

再由这个等式中的第二分量相等知，对 V 中所有的点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}.\tag{17.21}$$

因为点$(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)\in V$，$V$ 是$\mathbb{R}^{n+k}$的一个开子集，所以可以选择一正数 r，若$\mathbb{R}^n$ 中的 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}=\mathcal{B}_r(\boldsymbol{x}_0)$，则$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{0})\in V$，其中$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}^n$ 中 $\boldsymbol{x}_0$ 为心 r 为半径的开球．

定义映射 $\boldsymbol{G}:\mathcal{B}\to\mathbb{R}^k$ 为

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}),\quad 对\mathcal{B}中所有的\ \boldsymbol{x}.$$

则映射 $\boldsymbol{G}:\mathcal{B}\to\mathbb{R}^k$ 是连续可微的，且从(17.22)得出

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0},\quad 对\mathcal{B}中所有的\ \boldsymbol{x}.\tag{17.22}$$

这样，性质(i)成立．

为证明性质(ii)．我们利用 $\boldsymbol{H}:U\to V$ 是一对一的．事实上，若点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$属于 U 且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$，则由于$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{0}))=\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{0})$也是属于 U 及

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})),$$

于是得出

$$y = N(x, 0).$$

这样，性质(ii)成立.

最后，我们来证明关于导数矩阵的公式(iii). 事实上，如果用分量函数把映射 $\boldsymbol{F}$ 表示为 $\boldsymbol{F}=(F_1, \cdots, F_k)$，然后等式(17.22)可写成分量形式为

$$F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \text{对}\mathcal{B}\text{中所有的点 } \boldsymbol{x} \text{ 及所有下标 } i(1 \leqslant i \leqslant k).$$

运用链式法则对上述方程组关于变量 x_j 求导，我们得到对$\mathcal{B}$中所有的点 $\boldsymbol{x}$ 及下标 $i(1\leqslant i\leqslant k)$ 与 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial y_\ell}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) \frac{\partial G_\ell}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{17.23}$$

然而矩阵等式(iii)正是上面(17.23)用矩阵记号的重写. ■

在隐函数定理的陈述中，我们对$\mathcal{O}$中的点 $\boldsymbol{u}$ 选出它的前 n 个分量及后 k 个分量. 但是，事实上，这种分量的分离是相当任意的. 一个 $k\times(n+k)$ 矩阵称为有极大秩(maximal rank)，如果它有一个 $k\times k$ 的子矩阵是可逆的. 隐函数定理对一个连续可微的映射 $\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$ 成立，这里$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^{n+k}$的一个开子集，在$\mathcal{O}$中的点 $\boldsymbol{u}_0$ 处，有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_0)=\boldsymbol{0}$，如果导数矩阵 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{u}_0)$有极大秩. 当是这样的话，我们选取 $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{u}_0)$中的一个可逆的 $k\times k$ 子矩阵，且它具有列下标 $j_1, \cdots, j_k$，则对应的分量 $u_{j_1}, \cdots, u_{j_k}$是作为方程 [452]

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{O}$$

的解 $\boldsymbol{u}$，在 $\boldsymbol{u}_0$ 的一个邻域里它能表示为余下的 n 个分量的连续可微的函数.

例 17.7 考虑方程组

$$\begin{cases} \ln(1+x^2+t^2)+st+e^{s+z}-1=0 \\ s^3 e^{\cos(x^2+z^2)}+s+2z+(x+s+z)^4=0, \quad (s,x,t,z)\in\mathbb{R}^4. \end{cases} \tag{17.24}$$

观察到点(0, 0, 0, 0)是这个方程组的一个解. 对$\mathbb{R}^4$中的点(s, x, t, z)，定义

$$\boldsymbol{F}(s,x,t,z) = (\ln(1+x^2+t^2)+st+e^{s+z}-1, s^3 e^{\cos(x^2+z^2)} + s+2z+(x+s+z)^4).$$

则容易验证映射 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ 是连续可微的，且在点 $\boldsymbol{0}=(0, 0, 0, 0)$处的导数矩阵是

$$\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

这样，2×2 矩阵

$$\begin{bmatrix} \partial F_1/\partial s(0,0,0,0) & \partial F_1/\partial z(0,0,0,0) \\ \partial F_2/\partial s(0,0,0,0) & \partial F_2/\partial z(0,0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

是可逆的. 我们用隐函数定理来选取一正数 r 及连续可微函数 $g:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ 及 $h:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$，这里$\mathcal{B}=\mathcal{B}_r(0, 0)$，使得若 $x^2+t^2<r^2$，则$(g(x, t), x, t, h(x, t))$是方程组(17.24)的一个解. 而且，如果$\mathbb{R}^4$中的点(s, x, t, z)是方程组(17.24)的解，且如果 $s^2+z^2<r^2$ 及 $x^2+t^2<r^2$，则有 $s=g(x, t)$，$z=h(x, t)$. ■

我们将在17.3节进一步考虑隐函数定理的例子.

习题

对习题 1 ~ 6，运用隐函数定理分析给定方程组在解 $\mathbf{0}$ 附近的解.

1. $\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)^3-x+z=0\\ \cos(x^2+y^4)+e^z-2=0, \quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$

2. $\begin{cases}a^3+a^2b+\sin(a+b+c)=0\\ \ln(1+a^2)+2a+(bc)^4=0, \quad (a, b, c)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$

453

3. $\begin{cases}(uv)^4+(u+s)^3+t=0\\ \sin(uv)+e^{v+t^2}-1=0, \quad (u, v, s, t)\in\mathbb{R}^4.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+2y+x^2+(yz)^2+t^3=0\\ -x+z+\sin(y^2+z^2+t^3)=0, \quad (x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4.\end{cases}$

5. $e^{z^2}+y^2+z-4xy^3-1=0, \quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3.$

6. $e^{xy}+x^2+2y-1=0, \quad (x, y)\in\mathbb{R}^2.$

7. 在隐函数定理的证明中，曾断言：$k\times k$ 矩阵 $\mathbf{D}_y\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 可逆蕴涵着 $(n+k)\times(n+k)$ 矩阵 $\mathbf{DH}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 可逆. 证明这个断言.

8. 考虑线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

定义 η 是向量 (a_{11}, a_{12}, a_{13}) 及 β 是向量 (a_{21}, a_{22}, a_{23}).

a. 证明：如果 $\eta\times\beta\neq\mathbf{0}$，则上述方程组定义了两个变量是剩下一个变量的函数.

b. 用 $\mathbb{R}^3$ 中的直线和平面的几何观点解释(a).

9. 画出方程

$$y^3-x^2=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

的解的图形. 隐函数定理能在点 $(0, 0)$ 处使用吗？这个方程对某一解 (x, y) 能否确定其中一个分量是另一个分量的函数？

17.3 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面方程和路径

本节，在一个有三个标量未知元的标量方程和两个有三个标量未知元的标量方程的情形中，关于由这个方程组的解隐函定义的映射的图形，我们将得到一些更详尽的几何信息.

命题 17.8 *设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个开子集，假设函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 假设 (x_0, y_0, z_0) 是 $\mathcal{O}$ 中一点，有*

$$f(x_0,y_0,z_0)=0 \quad 及 \quad \nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}. \tag{17.25}$$

则在点 (x_0, y_0, z_0) 处，向量 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面的法向量，该曲面是由方程

$$f(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in\mathcal{O}$$

454

在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域内的解所组成的. 如图 17.5 所示.

证明 假设 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ 的第三个分量是非零的. 由隐函数定理推得，存在一正数 r 及连续可微函数 $g:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$，其中 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_r(x_0, y_0)$，使得对 $\mathcal{B}$ 中所有的 (x, y)，

$$f(x,y,g(x,y))=0. \tag{17.26}$$

此外，在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域内，所有的解都在 $g:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ 的图形上.

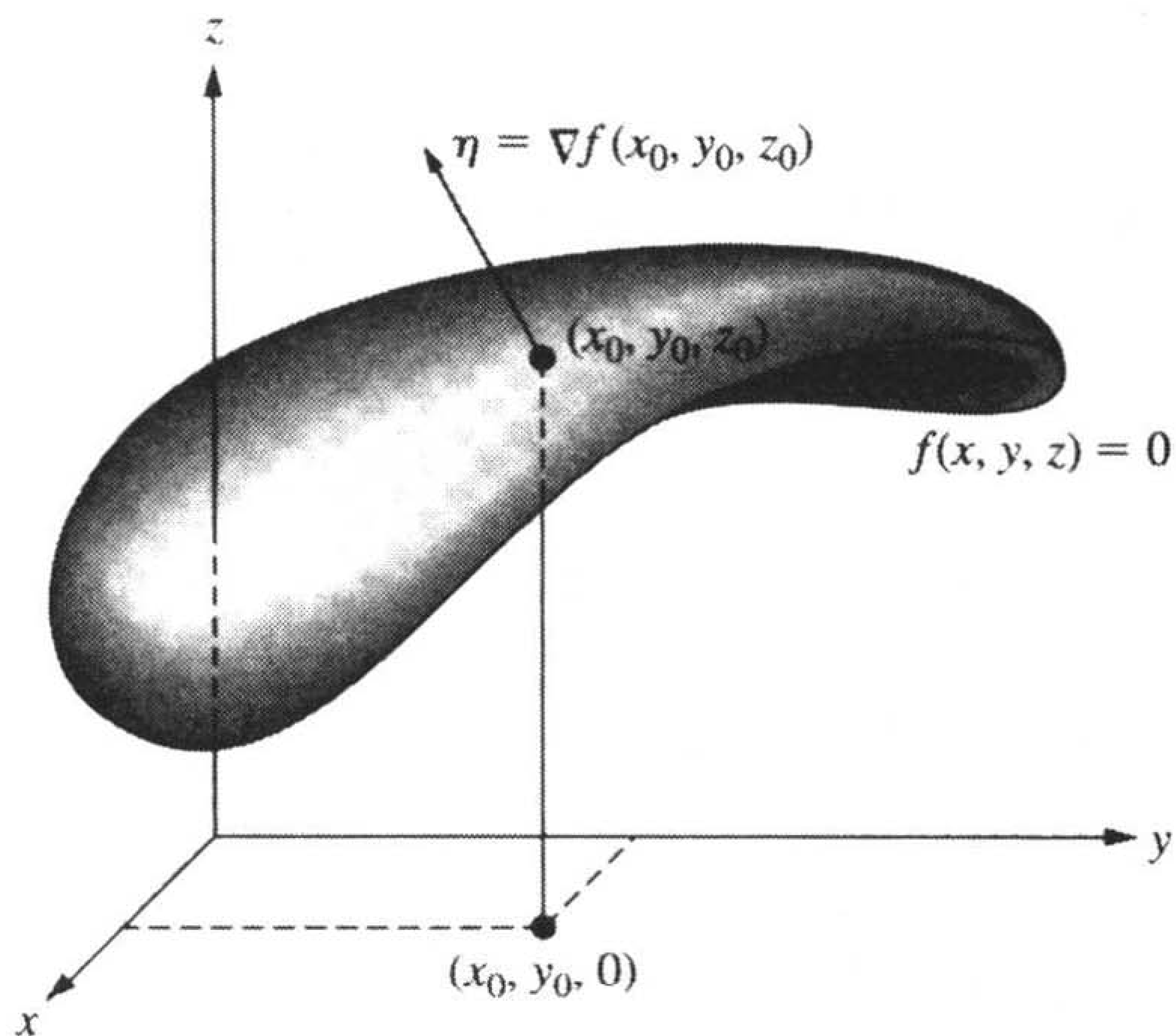


图 17.5 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$是曲面 S 在点(x_0, y_0, z_0)的法向量

在 14.1 节我们已证明在点(x_0, y_0, z_0)处，向量

$$\eta = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)$$

是由函数 $g:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ 的图形所定义的曲面的法向量. 另一方面，如果对(17.26)求导(先对 x，后再 y 求导)，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,g(x_0,y_0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,g(x_0,y_0))\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$$

及

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,g(x_0,y_0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,g(x_0,y_0))\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$$

再加上恒等式

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,g(x_0,y_0)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,g(x_0,y_0))(-1) = 0.$$

这最后的三个方程可以写成如下向量形式：

455

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \alpha\eta,$$

其中 $\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. 因为 $\alpha\neq 0$，所以在点(x_0, y_0, z_0)处，向量$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$是曲面的法向量，这个曲面是由方程 $f(x, y, z)=0$ 在点(x_0, y_0, z_0)的邻域内的解组成的.

例 17.9 方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

的解集是以原点为中心半径为 1 的球面. 定义 $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$，对$\mathbb{R}^3$ 中的(x, y, z)，注意到对球面上的点(x_0, y_0, z_0)，

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0).$$

命题 17.8 蕴涵着向量$(2x_0, 2y_0, 2z_0)$是球面在点(x_0, y_0, z_0)处的法向量. 如图 17.6 所示.

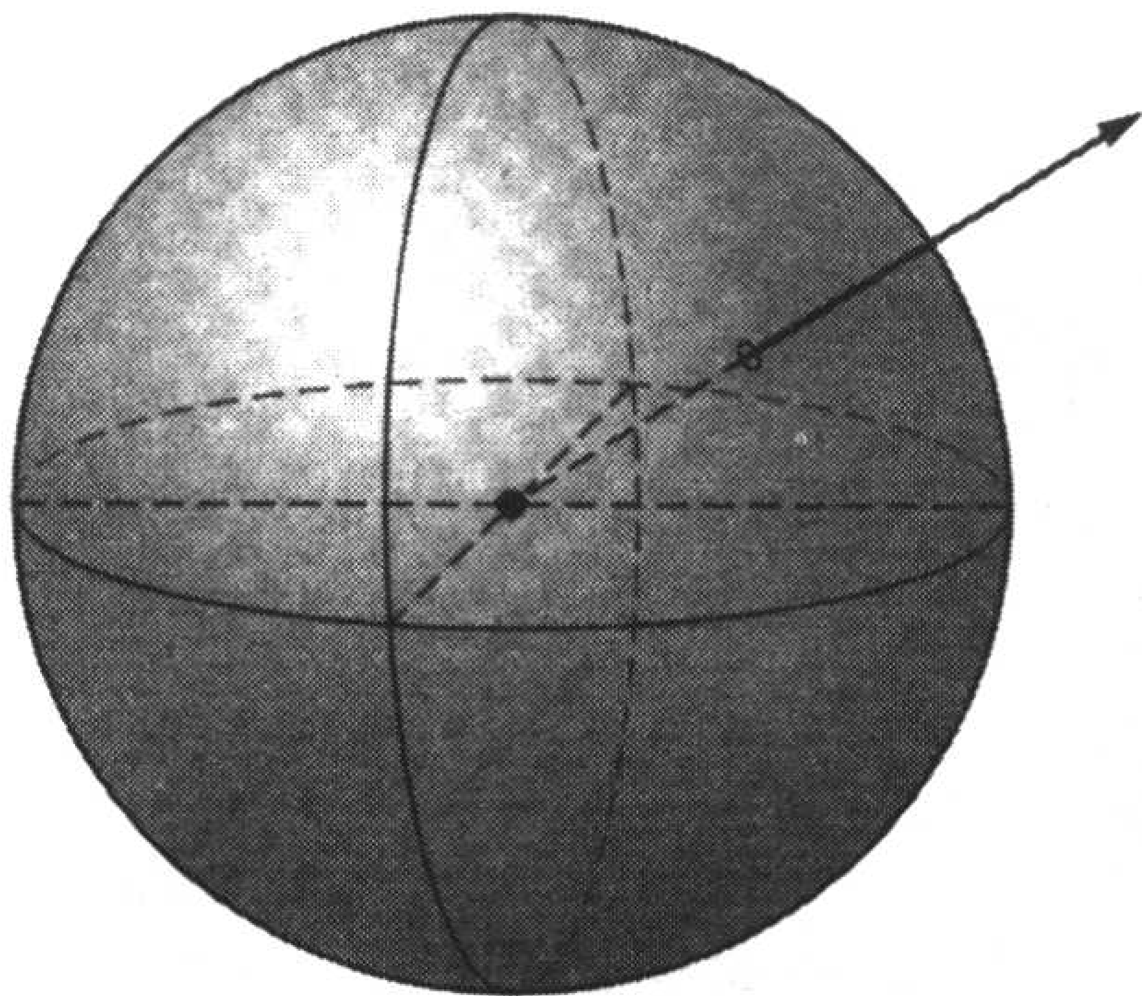


图 17.6 单位球面上一点的法向量

现在来检验由两个有三个未知元的方程构成的方程组的解集．假设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^3$的开子集，并设函数$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$与$h:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的．考虑方程组

$$\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{17.27}$$

假设点(x_0, y_0, z_0)是方程组(17.27)的一个解，并且假设

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0} \quad 及 \quad \nabla h(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}.$$

定义

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$$

及

$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid h(x,y,z)=0\}.$$

456

所以方程组(17.27)的解集是由集S_1与S_2的交集组成的．由命题 17.8 知，在点(x_0, y_0, z_0)的邻域中，S_1是在(x_0, y_0, z_0)处以$\nabla g(x_0, y_0, z_0)$为法向量的曲面；S_2是在点(x_0, y_0, z_0)处以$\nabla h(x_0, y_0, z_0)$为法向量的曲面．如果这两个法向量不平行，则这两个曲面应该相交于一条过点(x_0, y_0, z_0)的路径，且这条路径以$\nabla g(x_0, y_0, z_0)\times\nabla h(x_0, y_0, z_0)$为切向量．这两个法向量不平行恰好为

$$\nabla h(x_0,y_0,z_0)\times\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}.$$

下述命题证实了上面的几何论证：

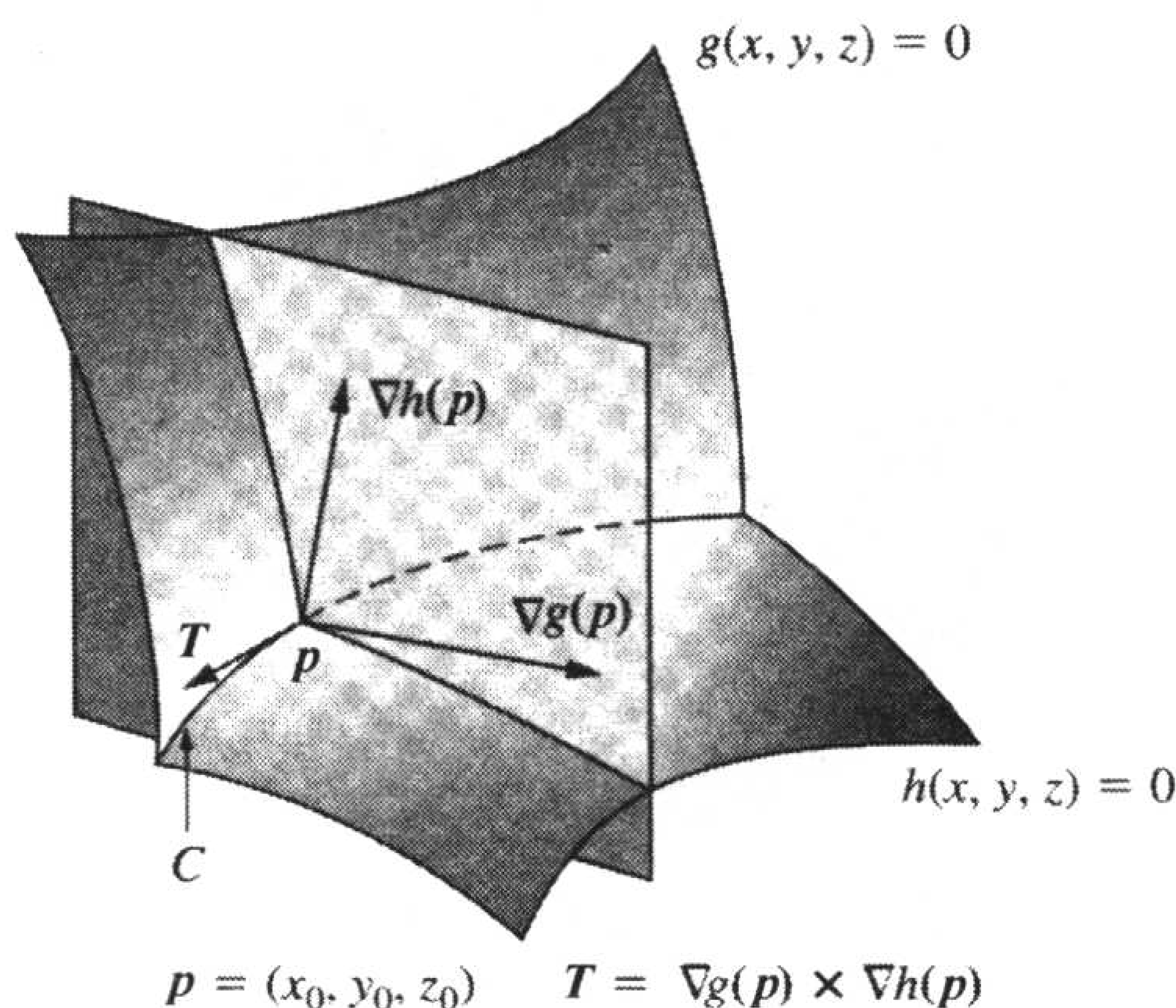
命题 17.10 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^3$的一个开子集，假设函数$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$与$h:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的．设$(x_0, y_0, z_0)$是$\mathcal{O}$中一点且

$$g(x_0,y_0,z_0)=h(x_0,y_0,z_0)=0,$$
$$\nabla g(x_0,y_0,z_0)\times\nabla h(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}. \tag{17.28}$$

则存在点(x_0, y_0, z_0)的一个邻域，在这个邻域中方程组

$$\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in\mathcal{O}, \end{cases} \tag{17.29}$$

的解集由过点(x_0, y_0, z_0)的一条路径组成，这条路径在点(x_0, y_0, z_0)处以向量$\nabla g(x_0, y_0, z_0)\times\nabla h(x_0, y_0, z_0)$为切向量．如图 17.7 所示．



457

图 17.7 **T** 是曲线的切向量

证明 因为向量$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \times \nabla h(x_0, y_0, z_0)$是非零的，所以至少有一个分量是非零的，假设它的第一分量是非零的，即

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial h}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)-\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\neq 0. \tag{17.30}$$

注意到(17.30)意味着2×2矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}$$

可逆. 从而点(x_0, y_0, z_0)处可以应用隐函数定理于连续可微映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$，其中

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(g(x,y,z),h(x,y,z)),\quad (x,y,z)\in\mathcal{O}.$$

这就得出存在一个包含点x_0的开区间I及两个连续可微函数：

$$\alpha:I\to\mathbb{R} \quad 及 \quad \beta:I\to\mathbb{R},$$

使得对I中所有的x，

$$\boldsymbol{F}(x,\alpha(x),\beta(x))=\mathbf{0},$$

而且在点(x_0, y_0, z_0)的一个邻域里，这个方程组的所有解都是形如$(x, \alpha(x), \beta(x))$ $(x\in I)$的，因此在(x_0, y_0, z_0)附近，方程组(17.29)的解集与参数化路径$\gamma:I\to\mathbb{R}^3$的象一致. 这里γ定义为

$$\gamma(t)=(t,\alpha(t),\beta(t)),\quad t\in I.$$

这条路径在$t=x_0$处的切向量是

$$\boldsymbol{T}=\gamma'(x_0)=(1,\alpha'(x_0),\beta'(x_0)).$$

因为$g(t, \alpha(t), \beta(t))=0$及$h(t, \alpha(t), \beta(t))=0$，其中$t\in I$. 对它们中每一个求导，可得

$$\langle\nabla g(x_0,y_0,z_0),\boldsymbol{T}\rangle=0,$$
$$\langle\nabla h(x_0,y_0,z_0),\boldsymbol{T}\rangle=0.$$

因此 $\boldsymbol{T}$ 同时正交于$\nabla g(x_0, y_0, z_0)$及$\nabla h(x_0, y_0, z_0)$，所以对某个数 $\alpha\neq 0$，有

$$\boldsymbol{T} = \alpha(\nabla g(x_0,y_0,z_0) \times \nabla h(x_0,y_0,z_0)).$$

从而$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \times \nabla h(x_0, y_0, z_0)$与(17.29)在点$(x_0, y_0, z_0)$处的解的路径相切. ■ 458

例 17.11 方程组

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解集是由一个球面与一个平面的交集组成. 点(1, 1, 0)是方程组的一个解. 由前面的命题及偏导数的简短计算得出，向量(0, 0, 4)与这个方程组的解路径在(1, 1, 0)处相切. ■

习题

1. 考虑方程组

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 5 = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

   a. 在点(0, 0, 0)处应用命题 17.10 求这个方程组在(0, 0, 0)附近的解定义的路径的切线.

   b. 求这个方程组在(0, 0, 0)附近的解，并核对解的路径的切线.

2. 显式地求出例 17.11 中的方程组的解集(它是一个圆)，直接求出这个圆在点(1, 1, 0)处的切线.

3. 考虑方程组

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{1}{16} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

   a. 证明：命题 17.10 中的假设(17.28)在点(0, 0, 0)处是不满足的.

   b. 通过画这个方程组的单个方程所定义的每个曲面图形，来解释为什么这个方程组恰有一个解.

4. 构造例子来证明：当 $1\leqslant i\leqslant 3$ 且向量$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \times \nabla h(x_0, y_0, z_0)$的第 i 个分量是 0 时，(17.29)的过(x_0, y_0, z_0)的解的路径不能被第 i 个分量参数化.

5. 假设函数$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 及 $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，且设(x_0, y_0, z_0)是$\mathbb{R}^3$ 中的一点，使得

$$f(x_0,y_0,z_0) = g(x_0,y_0,z_0) = h(x_0,y_0,z_0) = 0,$$
$$\langle \nabla f(x_0,y_0,z_0), \nabla g(x_0,y_0,z_0) \times \nabla h(x_0,y_0,z_0)\rangle \neq 0.$$

   通过考虑这个方程组的解集是由曲面与路径的交集组成的，来解释为什么在点(x_0, y_0, z_0)的邻域中，方程组 459

$$f(x,y,z) = 0$$
$$g(x,y,z) = 0$$
$$h(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

   恰有一解. 通过运用反函数定理也可解释这一点.

17.4 约束极值问题和拉格朗日乘子

实值函数的定义域内的一点称为极值(extremum)或极值点(extreme point)，对函数而言，如果函数在该点达到一个极大值或极小值. 如果$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集且函数$f:\mathcal{O}\to \mathbb{R}$ 有一阶偏导数，则对$\mathcal{O}$中的点 $\boldsymbol{x}$，它是函数$f:\mathcal{O}\to \mathbb{R}$ 的极值点，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{17.31}$$

是必要的.

在 14.3 节中建立的二阶导数规则，描述了一个点 $\mathbf{x}$ 是函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的极值点的充分条件. 关于定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集上的实值函数的极值存在性(existence)没有任何断言. 但是，在 11.2 节中，我们证明了定义在 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集上的连续函数达到极大值与极小值.

现在假设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 有一阶偏导数，K 是 $\mathcal{O}$ 的子集. 设 $\mathbf{x}$ 是 K 中的点，且是限制函数 $f:K\to\mathbb{R}$ 的一个极值点，这样的极值点 $\mathbf{x}$ 称为函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的约束极值(constrained extremum)，因为函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的值 $f(\mathbf{x})$ 是限制在 K 上的点的函数值相比较下的极值，集 K 称为约束集(constraint set). 注意到，如果 K 是有界闭的，则约束极值事实上是存在的.

在函数的约束极值点上，所有的偏导数为 0 是不正确的，而集合 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，约束集合 K 不需是 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 在约束极值上由偏导数的必要条件依赖于约束集的性质. 本节我们将描述这些条件. 让我们从两个例子开始.

例 17.12 对 $\mathbb{R}^3$ 中的所有的 (x, y, z)，定义函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为 $f(x,y,z)=z$，选取约束集是球面 $K=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$. 显然，点 $(0, 0, 1)$ 是 $f:K\to\mathbb{R}$ 的极大值点. 但是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)=1, \tag{17.32}$$

460 所以(17.31)在这个约束极值点处是不满足的，因为 $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)\neq 0$. ■

例 17.13 对 $\mathbb{R}^3$ 中的 (x, y, z)，定义函数 $f(x, y, z)=(x-4y+3z)+z^2$. 选取约束集是直线 $K=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\mid x=y=z\}$，则点 $(0, 0, 0)$ 是函数 $f:K\to\mathbb{R}$ 的极小值点. 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=-4,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=3, \tag{17.33}$$

所以(17.31)在这个约束极值点处是不满足的，因为 $\nabla f(0, 0, 0)$ 中没有一个分量是 0. ■

在第一个例子中，约束集是 $\mathbb{R}^3$ 中的球面；在第二个例子中，约束集是 $\mathbb{R}^3$ 中的路径. 我们现在来描述在约束极值点上函数的偏导数必须满足的条件. 首先考虑约束集 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面的情形. 然后再考虑约束集 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中的路径的情形. 当这两种情况都理解了，我们便可以看到约束极值的一般定理的重要性.

定理 17.14 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的开子集，假设函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 定义

$$S=\{(x,y,z)\in\mathcal{O}\,|\,g(x,y,z)=0\}.$$

假设 S 中的点 (x_0, y_0, z_0) 是函数

$$f:S\to\mathbb{R}$$

的一个极值点，且

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}. \tag{17.34}$$

则存在一数 λ，使得

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\nabla g(x_0,y_0,z_0). \tag{17.35}$$

证明 假设(17.34)意味着导数向量 $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ 至少有一个分量是非零的. 不妨假设是它的第三个分量，即

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

根据隐函数定理，存在$\mathbb{R}^2$ 中的点(x_0, y_0)的一个邻域$\mathcal{N}$及一个连续可微的函数 $\phi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$，使得 $\phi(x_0, y_0)=z_0$ 及对$\mathcal{N}$中所有的(x, y)，

$$g(x,y,\phi(x,y)) = 0. \tag{17.36}$$

这样，函数 $\phi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 的图形位于约束集 S 内.

定义一个辅助函数 $\psi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 为

$$\psi(x,y) = f(x,y,\phi(x,y)),\quad (x,y)\in\mathcal{N}. \tag{17.37}$$

461

因为函数 $\phi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 的图形位于约束集 S 内，所以得出点(x_0, y_0)是函数 $\psi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 的极值点. 因为$\mathcal{N}$是$\mathbb{R}^2$ 的一个开子集，点(x_0, y_0)是二元函数 $\psi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 的无约束极值点(unconstrained extremum)，所以

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0,y_0) = 0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x_0,y_0) = 0. \tag{17.38}$$

运用链式法则，并借助函数 $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 的偏导数表示 $\psi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 的偏导数我们重写方程组(17.38)为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,y_0) &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0,y_0) &= 0.\end{aligned} \tag{17.39}$$

另一方面，对恒等式(17.36)求导(先对 x，再对 y)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,y_0) &= 0\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0,y_0) &= 0.\end{aligned} \tag{17.40}$$

现在定义

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\bigg/\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0). \tag{17.41}$$

从(17.39)及(17.40)中的第一个方程分别得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \tag{17.42}$$

同样，从(17.39)及(17.40)中的第二个方程分别得到

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0). \tag{17.43}$$

最后，把方程(17.41)、(17.42)及(17.43)写成向量形式为

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0).$$ ■

回到例 17.11 的极值问题，如果对$\mathbb{R}^3$ 中的点(x, y, z)，定义

$$f(x,y,z) = z \quad 及 \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

在约束极值点$(0, 0, 1)$处，有

462

$$\nabla g(0,0,1) = (0,0,2) \quad 及 \quad \nabla f(0,0,1) = (0,0,1),$$

所以有 $\lambda = 1/2$,

$$\nabla f(0,0,1) = \lambda \nabla g(0,0,1).$$

例 17.15 假设我们希望求得 $x+y+2z$ 在集

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$$

的极小值.

定义

$$f(x,y,z) = x+y+2z, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

我们观察到，因为 K 是列紧的，对函数 $f:K \to \mathbb{R}$ 有极小值点 (x_0, y_0, z_0). 这个极小值点不能在 K 的内部，因为如果在 K 的内部，我们应有

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0).$$

但 $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$. 这样，点 (x_0, y_0, z_0) 在 K 的边界上，即 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$. 如果定义 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1=0\}$. 点 (x_0, y_0, z_0) 是函数 $f:S \to \mathbb{R}$ 的极小值点，我们可以应用定理 17.14 于如下断言：存在一个数 λ，使得

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0),$$

即 $(1, 1, 2) = \lambda(2x_0, 2y_0, 2z_0)$. 从而 $2x_0 = 2y_0 = z_0$，因为 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$，所以极小值点出现在 $-(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, \sqrt{2}/\sqrt{3})$. ■

定理 17.14 给出了一点是三元函数的约束极值点的必要条件，此处约束是一个曲面(surface). 下面的定理给出当约束集合是路径时的充分条件.

定理 17.16 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个开子集，假设 $f:\mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $g:\mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 及 $h:\mathcal{O} \to \mathbb{R}$ 是连续可微的. 定义

$$C = \{(x,y,z) \in \mathcal{O} \mid g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}.$$

假设 C 中点 (x_0, y_0, z_0) 是函数 $f:C \to \mathbb{R}$ 的一个极值点，及

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0) \times \nabla h(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}. \tag{17.44}$$

则存在数 λ 和 μ，使得

463

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0) + \mu \nabla h(x_0,y_0,z_0). \tag{17.45}$$

证明 因为向量 $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \times \nabla h(x_0, y_0, z_0)$ 是非零的，所以它的分量中至少有一个是非零的. 不妨假设是它的第一个分量，即

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial h}{\partial z}(x_0,y_0) - \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0)\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0.$$

由隐函数定理，如同在命题 17.10 的证明，断言：存在 $\mathbb{R}$ 中的点 x_0 的一个邻域 I 及连续可微函数 α: $I \to \mathbb{R}$ 及 β: $I \to \mathbb{R}$，使得 $\alpha(x_0) = y_0$, $\beta(x_0) = z_0$，对 I 中所有的 x，有

$$\begin{cases} g(x,\alpha(x),\beta(x)) = 0 \\ h(x,\alpha(x),\beta(x)) = 0. \end{cases} \tag{17.46}$$

这意味着如果定义参数化路径 γ: $I \to \mathbb{R}$ 为

$$\gamma(t) = (t,\alpha(t),\beta(t)), \quad t \in I.$$

则这个参数化路径的象在约束集 C 中. 因此, 如果我们定义辅助函数 $\psi: I\to\mathbb{R}$ 为

$$\psi(t) = (f\circ\gamma)(t) = f(t,\alpha(t),\beta(t)),\quad t\in I,$$

则这个函数 $\psi: I\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 处达到一个极值. 但因为 I 是$\mathbb{R}$ 的一个开子集, 所以 x_0 是一元函数 $\psi: I\to\mathbb{R}$ 的一个无约束极值点, 因此

$$\psi'(x_0) = 0,$$

由于链式法则, 于是这意味着

$$\psi'(x_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0,z_0),\gamma'(x_0)\rangle = 0. \tag{17.47}$$

根据命题 17.10, 向量$\nabla g(x_0, y_0, z_0)\times\nabla h(x_0, y_0, z_0)$是切向量 $\gamma'(x_0)$的某个非零的倍数. 因此(17.47)蕴涵着

$$\langle \nabla f(x_0,y_0,z_0),\nabla g(x_0,y_0,z_0)\times\nabla h(x_0,y_0,z_0)\rangle = 0, \tag{17.48}$$

即向量$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$是垂直于向量叉积$\nabla g(x_0, y_0, z_0)\times\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. 但垂直于非零叉积的向量仅是那些由向量$\nabla g(x_0, y_0, z_0)$与$\nabla h(x_0, y_0, z_0)$的线性组合构成的向量. 这意味着(17.45)成立. ■

观察到在例 17.13 中的约束极值问题可以由上述定理描述. 事实上, 对$\mathbb{R}^3$ 中的点(x, y, z), 定义

$$f(x,y,z) = x-4y+3z+z^2,g(x,y,z) = x-y \text{ 及 } h(x,y,z) = y-z.$$

则约束集合为

$$K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}.$$

464

点(0, 0, 0)是$f:K\to\mathbb{R}$ 的极小值点, 我们有

$$\nabla f(0,0,0) = (1,-4,3),\nabla g(0,0,0) = (1,-1,0) \text{ 及 } \nabla h(0,0,0) = (0,1,-1),$$

所以令 $\lambda=1$ 及 $\mu=-3$, 我们有

$$\nabla f(0,0,0) = \lambda\nabla g(0,0,0)+\mu\nabla h(0,0,0).$$

借助$\mathbb{R}^3$ 中的曲面与路径的几何解释建立起来的定理 17.14 与定理 17.16, 现在我们已经形式化了这两个定理. 下面是一般约束极值的结果, 它包含了那两个特殊情况的结果.

定理 17.17(一般拉格朗日乘子定理) *设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, 假设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的. 令 k 是小于 n 的一个正整数, 假设映射 $\mathbf{G}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^k$ 也是连续可微的. 定义*

$$S = \{\mathbf{x}\in\mathcal{O}\mid \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

假设 S 中的点 $\mathbf{u}$ 是函数

$$f:S\to\mathbb{R}$$

的一个极值点, 且 $k\times n$ 矩阵

$$\mathbf{DG}(\mathbf{u}) \text{ 有极大秩}. \tag{17.49}$$

则存在 k 个数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 使得

$$\nabla f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla \mathbf{G}_i(\mathbf{u}). \tag{17.50}$$

证明 令 $n=m+k$ 以及把$\mathbb{R}^n$ 中点写成$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^k$. 因为由假设 $k\times n$ 矩阵 $\mathbf{DG}(\mathbf{u})$有秩 k, 如有必要, 我们可重标分量, 使得在点 $\mathbf{u}=(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$处 $k\times k$ 矩阵

$$D_yG(x_0,y_0) \text{ 是可逆的}. \tag{17.51}$$

根据隐函数定理，存在$\mathbb{R}^m$中的点x_0的一个邻域$\mathcal{N}$及一映射$\psi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}^k$，使得$y_0=\psi(x_0)$且

$$G(x,\psi(x)) = 0, \quad x\in\mathcal{N}. \tag{17.52}$$

这样，映射$\psi:\mathcal{N}\to\mathbb{R}^k$的图形位于约束集$S$内.

定义一个辅助函数$\eta:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$为

$$\eta(x) = f(x,\psi(x)), \quad x\in\mathcal{N}.$$

因为$\mathcal{N}$是$\mathcal{R}^m$的一个开子集，x_0是函数$\eta:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$的一个无约束极值点，所以

465

$$\nabla\eta(x_0) = 0. \tag{17.53}$$

因此，从函数$\eta:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$的定义及链式法则，我们有

$$\nabla_x f(x_0,y_0) + \nabla_y f(x_0,y_0)D\psi(x_0) = 0. \tag{17.54}$$

另一方面，对恒等式(17.52)求导得

$$D_xG(x_0,y_0) + D_yG(x_0,y_0)D\psi(x_0) = 0. \tag{17.55}$$

但$k\times k$矩阵$D_yG(x_0, y_0)$是可逆的，所以由(17.55)得

$$-[D_yG(x_0,y_0)]^{-1}D_xG(x_0,y_0) = D\psi(x_0),$$

把此式代入(17.54)得

$$\nabla_x f(x_0,y_0) = \nabla_y f(x_0,y_0)[D_yG(x_0,y_0)]^{-1}D_xG(x_0,y_0). \tag{17.56}$$

为了验证(17.50)，首先观察到对$1\times k$行矩阵$[\lambda_1, \cdots, \lambda_k]$，(17.50)等价于矩阵等式

$$\nabla f(x_0,y_0) = [\lambda_1,\cdots,\lambda_k]DG(x_0,y_0),$$

写成分量形式为

$$\begin{aligned}\nabla_x f(x_0,y_0) &= [\lambda_1,\cdots,\lambda_k]D_xG(x_0,y_0),\\ \nabla_y f(x_0,y_0) &= [\lambda_1,\cdots,\lambda_k]D_yG(x_0,y_0).\end{aligned} \tag{17.57}$$

定义

$$[\lambda_1,\cdots,\lambda_k] = \nabla_y f(x_0,y_0)[D_yG(x_0,y_0)]^{-1}. \tag{17.58}$$

这个定义确保了(17.57)中的第二个方程是可满足的，另一方面，方程(17.56)断言选出的$[\lambda_1, \cdots, \lambda_k]$同样满足方程组(17.57)中的第一个方程. ■

公式(17.50)中的λ_i通常称为拉格朗日乘子(Lagrange multiplier).

下面给出一个一般拉格朗日乘子定理的直接的推论.

推论 17.18 *设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的开子集，假设函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$及$g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$是连续可微的，定义*

$$S = \{x\in\mathcal{O} \mid g(x) = 0\}.$$

假设S中的点u是$f:S\to\mathbb{R}$的极值点且

$$\nabla g(u) \neq 0,$$

则存在一数λ，使得

466

$$\nabla f(u) = \lambda\nabla g(u). \tag{17.59}$$

上面推论可应用于关于矩阵特征值的存在性的问题. 一个$n\times n$的实数矩阵A，实数λ称为A的特征值(eigenvalue)，如果存在某个非零点x，使得

$$Ax = \lambda x.$$

一般来说，可能没有这样的实特征值(见习题11)．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称的(symmetric)，如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．对于对称矩阵，我们有下述结果．

命题 17.19 每个对称矩阵有一个实特征值.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 对称矩阵．分别定义 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为

$$g(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle-1 \quad 和 \quad f(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,$$

以及定义

$$S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x})=0\}.$$

S 是由 $\mathbb{R}^n$ 中模为1的所有点组成，所以它是有界闭的．此外，因为 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，由极值定理知，$f:S\to\mathbb{R}$ 在 S 中的点 $\boldsymbol{x}$ 处达到极小值．从上面的推论知，存在有 λ，使得

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\lambda\nabla g(\boldsymbol{x}). \tag{17.60}$$

然而，我们可以明确地计算出 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 及 $\nabla g(\boldsymbol{x})$．事实上，对 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})&=\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i),\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i\rangle-\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{t\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle+t\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{x}\rangle+t^2\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i\rangle}{t}\\&=\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle+\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i\rangle\\&=\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle+\langle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，所以

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=2\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle.$$

这就得出

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

[467]

当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$ 时，上述公式变成

$$\nabla g(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}.$$

把上述结果代入公式(17.60)，我们有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \quad 及 \quad \|\boldsymbol{x}\|=1.$$

■

习题

1. 求 $\{x+y \mid x^2+y^2=1\}$ 的极小值．
2. 用直接检查和拉格朗日乘子法求 $\{x^2+y^2 \mid y^2+x^2+z^2=6\}$ 的极大值.
3. 用直接检验法求 $\{x+y+z \mid |x|+|y|+|z|\leqslant1\}$ 的极大值.
4. 求 $\{x^2+y^2+z^2 \mid 2x^2+y^2+3z^2\leqslant1\}$ 的极大值.
5. 验证：在一般拉格朗日乘子定理的证明中链式法则的应用细节.
6. a，b，c 为实数，求 $\{ax+by+cz \mid x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$ 的极小值．把 $ax+by+cz$ 视作 (x,y,z) 与 (a,b,c) 的内积，给出这个答案的几何解释.

7. 在平面 $ax+by+cz+d=0$ 上求一点，此点离点(0，0，0)最接近.

8. a，b，c 为正数，在椭球面

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$$

上求一点，它离点(0，0，0)最接近.

9. 给出一个例子来说明，如果去掉 $\nabla g(\boldsymbol{u})$ 是非零的这一条件，则推论 17.18 是错的.

10. 运用迪尼定理给出推论 17.18 在 $n=2$ 情况下的一个证明.

11. 证明：矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

无实特征值.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 对称矩阵，定义 λ 是

$$\{\langle \boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}\rangle \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=1\}$$

468 的极大值，仿照命题 17.19 的证明来证明：λ 是矩阵的特征值.

13. 设 p，q 为数且 $p>1$ 及 $q>1$.

a. 证明：对 $\mathbb{R}^2$ 中的 $(x，y)$，$x>0$，$y>0$ 及 $xy=1$，有

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

b. 运用(a)证明如下不等式：若 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，$p>1$，$q>1$ 及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

14. a. 对 $\mathbb{R}^3$ 中的 $(x，y，z)$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 及 $xyz=1$，证明：

$$x+y+z\geqslant3.$$

b. 运用(a)证明下述几何平均/算术平均不等式：如果 a_1，a_2，a_3 是正数，则

$$(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3}{3}.$$

469 c. 把上述 $n=3$ 的不等式推广到一般的正整数 n.

第18章　多元函数的积分

在第6、7章我们考察了定义在实数的有界闭区间上的函数$f: I \to \mathbb{R}$的积分. 我们将在本章及随后的两章研究多元函数的积分法. 在18.1节，我们将考虑定义在$\mathbb{R}^n$中的广义矩形$\boldsymbol{I}$上的有界函数$f: \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$的积分法. 第6章中的许多结果，只要稍作改变都可移植于此. 事实上，这里我们省略了一些证明，因为它们同在一元函数中得到的对应结果完全相似. 在18.2节，我们将考虑连续函数的积分法. 将证明定义在广义矩形上的连续函数是可积的. 还将引入一个称之为若尔当容度为0的集合的概念，并证明一个定义在广义矩形上并且除去一个若尔当容度为0的集合外是连续的有界函数是可积的. 这个结果是全新的，即使对一元函数情况也是如此. 在18.3节我们将引进$\mathbb{R}^n$中的若尔当域的概念，并考虑定义在若尔当域上的某些函数的积分，其中包括连续函数.

18.1　广义矩形上函数的积分

前面介绍过，如果$I=[a, b]$是实数的一个有界闭区间，m是正整数及$P=\{x_0, \cdots, x_m\}$是$m+1$个实数，满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_m = b,$$

则P称为是$[a, b]$的划分(partition). 对介于1和m之间的每个下标i，区间$[x_{i-1}, x_i]$称为划分P的区间. 我们定义区间$I=[a, b]$[⊖]的长度是$b-a$.

设n是正整数，对介于1和n之间的每个下标i，令$I_i=[a_i, b_i]$是实数的有界闭区间，这些区间的笛卡儿乘积

$$\boldsymbol{I} = I_1 \times \cdots \times I_i \times \cdots \times I_n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in I_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

称为广义矩形(generalized rectangle). 为方便起见，我们指定区间I_i是$\boldsymbol{I}$的第i个边(edge). 定义$\boldsymbol{I}$的体积(volume，记为vol $\boldsymbol{I}$)是它的n个边的长度的乘积，即

$$\text{vol}\, \boldsymbol{I} \equiv \prod_{i=1}^{n} [b_i - a_i].$$

当$n=1$时，体积仅是长度，当$n=2$时，这个体积称为面积(area).

定义　给定一个广义矩形$\boldsymbol{I}=I_1 \times \cdots \times I_i \times \cdots \times I_n$，对介于1与$n$之间的每个下标$i$，令$P_i$是第$i$个边$I_i$的一个划分. 所有形如

$$\boldsymbol{J} = J_1 \times \cdots \times J_i \times \cdots \times J_n$$

这样的广义矩形(其中J_i是划分P_i中的一个区间)的集合称为$\boldsymbol{I}$的一个划分，并记为

$$\boldsymbol{P} \equiv (P_1, \cdots, P_n).$$

考虑平面$\mathbb{R}^2$中的矩形$[a, b] \times [c, d]$，令$P_1=\{x_0, \cdots, x_m\}$和$P_2=\{y_0, \cdots, y_\ell\}$分别是$[a, b]$和$[c, d]$的划分，定义$\boldsymbol{P}=(P_1, P_2)$. 那么

⊖　除非有明确的说明，否则我们总是假定区间$I=[a, b]$是非退化的，即$a<b$.

$$\sum_{J\in P}\text{vol }J = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{m}[x_i - x_{i-1}][y_j - y_{j-1}]$$
$$= \sum_{j=1}^{\ell}\left\{\sum_{i=1}^{m}[x_i - x_{i-1}]\right\}[y_j - y_{j-1}]$$
$$= \sum_{j=1}^{\ell}\{[b-a]\}[y_j - y_{j-1}]$$
$$= [b-a]\sum_{j=1}^{\ell}[y_j - y_{j-1}]$$
$$= [b-a][d-c] = \text{vol }I.$$

用归纳法可证明上面公式对一般的情况也成立：对每个自然数 n，如果 P 是$\mathbb{R}^n$ 中广义矩形 I 的划分，则

471

$$\text{vol }I = \sum_{J\in P}\text{vol }J. \tag{18.1}$$

上达布和与下达布和

现在假设$f{:}I\to\mathbb{R}$是有界函数，它的定义域 I 是广义矩形，P 是 I 的一个划分. 对划分 P 中的广义矩形 J，定义

$$m(f,J)\equiv\inf\{f(x)\mid x\in J\}\quad 及\quad M(f,J)\equiv\sup\{f(x)\mid x\in J\}.$$

然后定义函数$f{:}I\to\mathbb{R}$ 关于划分 P 的下达布和（记为 $L(f,\ P)$）为

$$L(f,P)\equiv\sum_{J\in P}m(f,J)\text{ vol }J,$$

及定义函数$f{:}I\to\mathbb{R}$ 关于划分 P 的上达布和（记为 $U(f,\ P)$）为

$$U(f,P)\equiv\sum_{J\in P}M(f,J)\text{ vol }J.$$

引理 18.1 令$f{:}I\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 I 上的有界函数. 假设两个数 m 和 M 具有如下性质：对 I 中所有的 x，

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

那么对 I 的任一划分 P，

$$m\text{ vol }I\leqslant L(f,P)\leqslant U(f,P)\leqslant M\text{ vol }I. \tag{18.2}$$

证明 令 P 是 I 的一个划分，对 I 内任一广义矩形 J，显然有

$$m\leqslant\inf\{f(x)\mid x\in J\} = m(f,J)\leqslant M(f,J) = \sup\{f(x)\mid x\in J\}\leqslant M,$$

所以

$$m\text{ vol }J\leqslant m(f,J)\text{ vol }J\leqslant M(f,J)\text{ vol }J\leqslant M\text{ vol }J.$$

对划分 P 中所有的广义矩形 J 求和，并用体积和公式(18.1)推断出，不等式(18.2)成立. ■

给定广义矩形 I 的一个划分 $P=(P_1,\ \cdots,\ P_n)$，及另一个划分 $P^*=(P_1^*,\ \cdots,\ P_n^*)$，$P^*$ 称为 P 的一个加细，如果对介于 1 和 n 之间的每个下标 i，P_i^* 是 P_i 的一个加细. 注意，如果 P^*是 P 的一个加细，则(i)P^* 的每一个广义矩形 J 恰好包含在 P 的某个广义矩形内，(ii)给定 P 的一个广义矩形 J，则 P^* 中那些包含在 J 的全体广义矩形导出 J 的一个划分，记为 $P^*(J)$.

由上面这两个性质可得到如下关于下达布和与上达布和的分配公式：

$$L(f,P^*) = \sum_{J\in P} L(f,P^*(J)) \quad 及 \quad U(f,P^*) = \sum_{J\in P} U(f,P^*(J)). \tag{18.3}$$

[472]

引理 18.2(加细引理) *假设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 I 上的有界函数. 设 P 是 I 的一个划分, P^* 是 P 的加细, 则*

$$L(f,P) \leqslant L(f,P^*) \leqslant U(f,P^*) \leqslant U(f,P). \tag{18.4}$$

证明 设 J 是 P 的广义矩形，$P^*(J)$是 P^* 在 J 内导出的划分. 把 J 当作 I，从引理 18.1 推出

$$m(f,J)\operatorname{vol} J \leqslant L(f,P^*(J)) \leqslant U(f,P^*(J)) \leqslant M(f,J)\operatorname{vol} J.$$

如果对 P 中所有广义矩形 J 上的这些不等式求和并运用分配公式(18.3)，我们便得到不等式(18.4). ■

对实数有界闭区间 I 的两个划分 P 与 P'，通过取由至少在这两个划分之一内的所有的划分点组成的一个划分，我们得到一个划分. 这个划分称为两个给定划分的*公共加细*，意即它是 P 与 P' 的加细. 类似地，假设 P 与 P'是$\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 I 的两个划分，分别记为$P=(P_1, \cdots, P_n)$及 $P'=(P_1', \cdots, P_n')$. 对介于 1 和 n 之间的每个下标 i，选取 P_i''是 P_i 及 P_i'的公共加细，并定义 $P''=(P_1'', \cdots, P_n'')$，则 P''是 I 的一个划分，它是划分 P 与 P'的公共加细. 公共加细的存在对建立下面的命题是必要的.

命题 18.3 *假设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 I 上的有界函数. 对 I 的任意两个划分 P_1 与 P_2,*

$$L(f,P_1) \leqslant U(f,P_2).$$

证明 选取 P 是两个划分 P_1 与 P_2 的公共加细. 由加细引理得

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P) \leqslant U(f,P) \leqslant U(f,P_2).$$ ■

上积分和下积分

定义 *设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 I 上的有界函数. 定义 f 在 I 上的下积分(记为 $\underline{\int_I} f$) 为*

$$\underline{\int_I} f \equiv \sup\{L(f,P) \mid P 是广义矩形 I 的一个划分\}. \tag{18.5}$$

[473]

定义 f 在 I 上的上积分(记为 ($\overline{\int_I} f$) 为

$$\overline{\int_I} f \equiv \inf\{U(f,P) \mid P 是广义矩形 I 的一个划分\}. \tag{18.6}$$

引理 18.4 *设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是定义在广义矩形 I 上有界函数，则*

$$\underline{\int_I} f \leqslant \overline{\int_I} f. \tag{18.7}$$

证明 设 P 是 I 的一个划分. 由引理 18.3 知，$U(f, P)$是 f 的下达布和集合的一个上界. 因此，由上确界的定义知

$$\underline{\int_I} f \leqslant U(f,P).$$

由此不等式知，$\underline{\int}_I f$ 是 f 的上达布和的一个下界．从而由下确界定义知

$$\underline{\int}_I f \leqslant \overline{\int}_I f. \qquad \blacksquare$$

例 18.5 设 $\boldsymbol{I}$ 是一个广义矩形，c 是一个实数，定义 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是常值函数，假定它在 $\boldsymbol{I}$ 的各点的值是常数 c．那么 f：$\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的且

$$\underline{\int}_I f = c \text{ vol } \boldsymbol{I}.$$

这可直接由定义推出．事实上，如果 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的任意一个划分，则对 $\boldsymbol{P}$ 的一个广义矩形 $\boldsymbol{J}$，我们有 $m(f,\ \boldsymbol{J})=c=M(f,\ \boldsymbol{J})$，所以由体积公式(18.1)得

$$L(f,\boldsymbol{P}) = \sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}} c \text{ vol } \boldsymbol{J} = c \text{ vol } \boldsymbol{I} = \sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}} c \text{ vol } \boldsymbol{J} = U(f,\boldsymbol{P}).$$

这样，下达布和的集合仅为一个数 c vol $\boldsymbol{I}$，同上达布和一样．由上积分和下积分的定义知，

[474]

$$\underline{\int}_I f = c \text{ vol } \boldsymbol{I} \quad 及 \quad \overline{\int}_I f = c \text{ vol } \boldsymbol{I}. \qquad \blacksquare$$

例 18.6(狄利克雷函数) 对广义矩形 $\boldsymbol{I}$，定义 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & 若\ \boldsymbol{x}\ 有一个有理分量 \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

注意到每一个广义矩形包含具有有理分量的点没有有理分量的点，因为 $\mathbb{R}$ 中有理数与无理数是稠密的．因此，如果 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分，则由体积公式(18.1)知，

$$L(f,\boldsymbol{P}) = 0 \quad 及 \quad U(f,\boldsymbol{P}) = \text{vol } \boldsymbol{I}.$$

所以下达布和集合仅由一个数 0 组成，由上确界的定义得，

$$\underline{\int}_I f = 0.$$

另一方面，上达布和集合仅由一个数 vol $\boldsymbol{I}$ 组成，由下确界的定义得

$$\overline{\int}_I f = \text{vol } \boldsymbol{I}. \qquad \blacksquare$$

定义 设 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的有界函数，我们称 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是**可积的**，或 f 在 $\boldsymbol{I}$ 上是可积的，如果

$$\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

当上式满足时，函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的积分(记为 $\int_I f$) 定义为

$$\int_I f \equiv \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

在例 18.5 我们已经看到函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是常值 c 时是可积的，且它的积分等于 c vol $\boldsymbol{I}$．在例 18.6 中，我们也看到狄利克雷函数是不可积的．

阿基米德-黎曼定理

上面关于可积性的定义和积分的定义是6.1节中对一元函数定义的概念的直接推广. 同样阿基米德-黎曼定理也可以推广到多元函数上.

475

定义 设 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是广义矩形上的有界函数. 对每一个自然数 k, 设 $\boldsymbol{P}_k$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分, 划分序列 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 称为是函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的**划分的阿基米德序列**, 如果满足

$$\lim_{k\to\infty}[U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k)]=0.$$

第6章中用来证明引理6.7及阿基米德-黎曼定理的论据都可以直接推广到定义在广义矩形上的有界函数上, 我们把这留作练习. 读者可以仿照第6章中的证明给出下面定理的证明.

定理18.7(阿基米德-黎曼定理) 设 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的有界函数. 那么 f 在 $\boldsymbol{I}$ 上是可积的当且仅当对 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 存在一个划分的阿基米德序列. 而且, 对任一划分的阿基米德序列 $\{\boldsymbol{P}_k\}$,

$$\lim_{k\to\infty}L(f,\boldsymbol{P}_k)=\int_I f \quad 及 \quad \lim_{k\to\infty}U(f,\boldsymbol{P}_k)=\int_I f. \tag{18.8}$$

例18.8 对 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形 $\boldsymbol{I}=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$, 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 若(x,y)\in\boldsymbol{I},y>x,\\ 0 & 若(x,y)\in\boldsymbol{I},y\leq x.\end{cases}$$

我们运用阿基米德-黎曼定理来证明函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的. 对一个自然数 k, 设 P_k 是把区间 $[0,\ 1]$ 划分成 k 个长为 $1/k$ 的区间的划分, 并定义 $\boldsymbol{I}$ 的划分 $\boldsymbol{P}_k$ 为 $\boldsymbol{P}_k=(P_k,\ P_k)$. 注意在和 $U(f,\ \boldsymbol{P}_k)-L(f,\ \boldsymbol{P}_k)$ 中唯一可能是非零的项是在 $\boldsymbol{P}_k$ 中的矩形与 $\boldsymbol{I}$ 的对角线相交的那些项(如图18.1所示), 它们中每一个都是 $1/k^2$, 而这些矩形的总数小于 $2k$, 因此

476

$$U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k)<\frac{2}{k}.$$

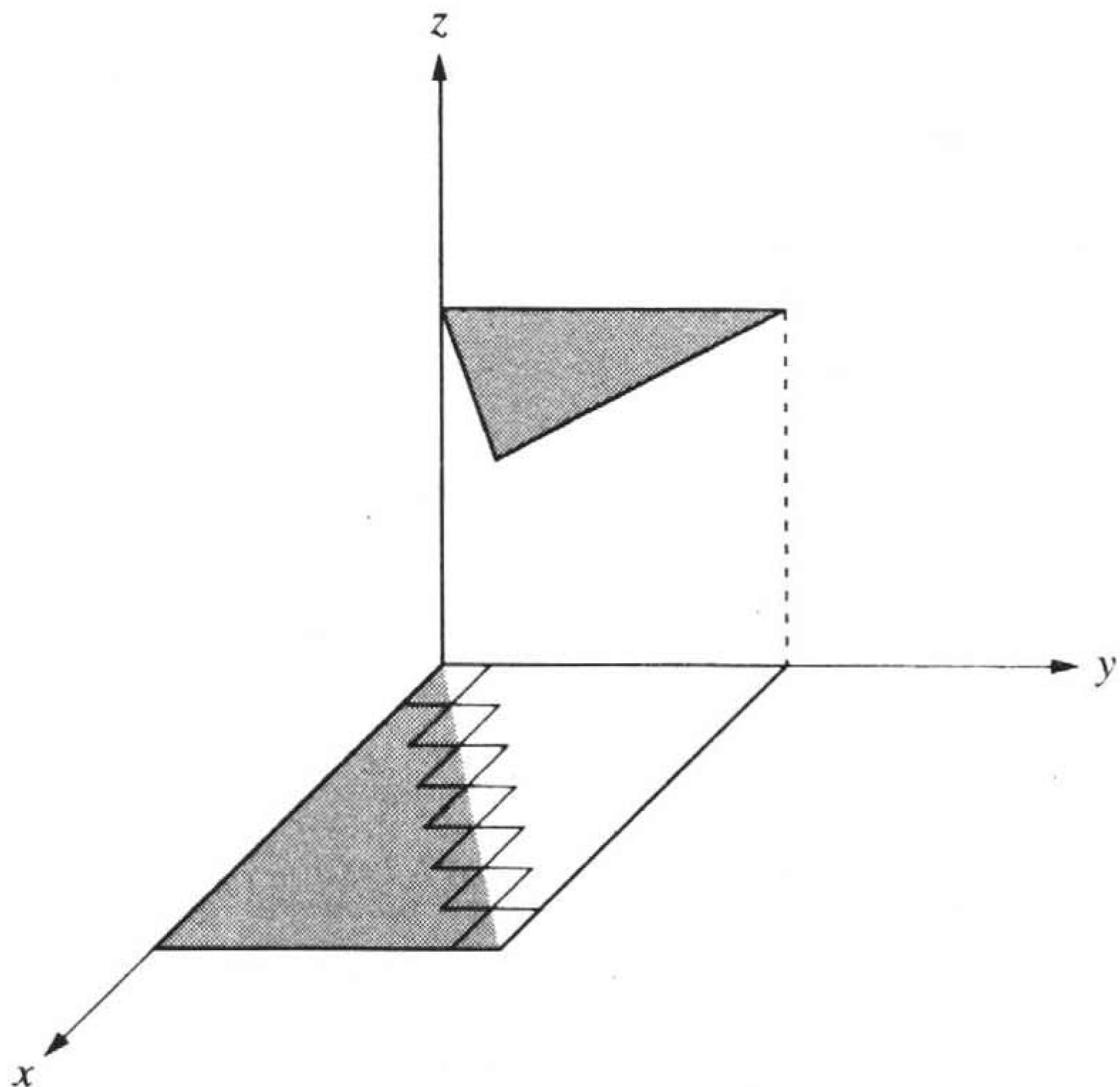


图18.1 构造一个划分的阿基米德序列

从而

$$\lim_{k\to\infty}[U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k)]=0,$$

因此，由阿基米德-黎曼定理得，$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的． ■

例 18.9 对$\mathbb{R}^2$ 中的矩形 $\boldsymbol{I}=[0,1]\times[0,1]$，定义 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x,y)=x^2y^2,(x,y)\in\boldsymbol{I}.$$

我们用阿基米德-黎曼定理证明 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，且 $\int_I f=1/9$．事实上，对自然数 k，设 P_k 是把$[0,1]$划分成 k 个长为 $1/k$ 的相等区间的划分．并定义 $\boldsymbol{P}_k=(P_k,P_k)$．在 $\boldsymbol{P}_k$ 中每个矩形 $\boldsymbol{J}$ 的面积是 $1/k^2$．而且对介于 1 和 k 之间的下标 i 与 j，如果

$$\boldsymbol{J}=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right]\times\left[\frac{j-1}{k},\frac{j}{k}\right],$$

则

$$m(f,\boldsymbol{J})=\frac{(i-1)^2(j-1)^2}{k^4}\quad 及\quad M(f,\boldsymbol{J})=\frac{i^2j^2}{k^4}.$$

从而

$$\begin{aligned}U(f,\boldsymbol{P}_k)&=\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}_k}M(f,\boldsymbol{J})\operatorname{vol}\boldsymbol{J}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant k}\frac{i^2j^2}{k^6}\\&=\frac{1}{k^6}\sum_{i=1}^k i^2\left[\sum_{j=1}^k j^2\right]=\frac{1}{k^6}\sum_{i=1}^k i^2\left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right]\\&=\frac{1}{k^6}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\sum_{i=1}^k i^2\\&=\frac{1}{k^6}\left[\frac{[k(k+1)(2k+1)]}{6}\right]^2.\end{aligned}$$

477

类似地有

$$L(f,\boldsymbol{P}_k)=\frac{1}{k^6}\left[\frac{[(k-1)(k)(2k-1)]}{6}\right]^2.$$

这样，

$$\lim_{k\to\infty}U(f,\boldsymbol{P}_k)=\frac{1}{9}\quad 及\quad \lim_{k\to\infty}L(f,\boldsymbol{P}_k)=\frac{1}{9}.$$

因此，$\{\boldsymbol{P}_k\}$ 是 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的一个阿基米德序列．由阿基米德-黎曼定理知，$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，且

$$\int_I f=\lim_{k\to\infty}U(f,\boldsymbol{P}_k)=\frac{1}{9}.$$

■

下面的定理叙述一个准则：如何对函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 建立阿基米德序列．

定理 18.10 设 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的有界函数，则下述两个断言是等价的：

(i) 对 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$，存在一个划分的阿基米德序列．

(ii) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{I}$ 的划分 $\boldsymbol{P}$，满足

$$U(f,\boldsymbol{P})-L(f,\boldsymbol{P})<\varepsilon.$$

证明 先设(i)成立. 设$\{\boldsymbol{P}_k\}$是对$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$的划分的一个阿基米德序列. 为证实(ii),取$\varepsilon$为任一正数. 由收敛序列的定义知,存在下标$k$,使得$U(f,\ \boldsymbol{P}_k)-L(f,\ \boldsymbol{P}_k)<\varepsilon$. 这样,只要取$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_k$就有$U(f,\ \boldsymbol{P})-L(f,\ \boldsymbol{P})<\varepsilon$,因此(ii)成立.

再设(ii)成立. 设k为自然数,则取$\varepsilon=1/k$,根据(ii)存在划分P,使得$U(f,\ \boldsymbol{P})-L(f,\ \boldsymbol{P})<1/k$. 选这样的划分,并记为$\boldsymbol{P}_k$. 这样就定义了广义矩形$\boldsymbol{I}$的划分序列$\{\boldsymbol{P}_k\}$,它是阿基米德序列,因为

$$0\leqslant\lim_{k\to\infty}[U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k)]\leqslant\lim_{k\to\infty}1/k=0.$$ ■

积分的可加性、单调性和积分的线性性

在第6章我们证明了定理6.12,它断言:如果函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是可积的及c是开区间$(a,\ b)$内一点,则限制f于区间$[a,\ c]$及$[c,\ b]$上也是可积的且

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

我们需要这个结果的下述推广,同时还需要它的逆定理.

478

定理18.11(关于划分的可加性) *设$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是定义在广义矩形$\boldsymbol{I}$上的有界函数. 设$\boldsymbol{P}$是$\boldsymbol{I}$的一个划分,则函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的当且仅当对$\boldsymbol{P}$中每一个广义矩形$\boldsymbol{J}$,$f$在$\boldsymbol{J}$上的限制$f:\boldsymbol{J}\to\mathbb{R}$是可积的,在这种情况下,有*

$$\int_I f=\sum_{J\in P}\int_J f.\tag{18.9}$$

证明 首先假设对$\boldsymbol{P}$中的每一个广义矩形$\boldsymbol{J}$,函数$f:\boldsymbol{J}\to\mathbb{R}$是可积的. 我们运用阿基米德-黎曼定理证明$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的. 假设在划分$\boldsymbol{P}$中有$m$个广义矩形. 设$k$是自然数,运用阿基米德-黎曼定理及定理18.10中的准则(ii)知,对$\boldsymbol{P}$中每个广义矩形$\boldsymbol{J}$,可选取一个划分$\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J})$,使得

$$U(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))-L(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))<\frac{1}{km}.$$

选取$\boldsymbol{P}_k$是$\boldsymbol{I}$的划分,它包含所有那些在$\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J})$中的广义矩形,由分配公式(8.13)及细分引理得,

$$\begin{aligned}U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k)&\leqslant\sum_{J\in P}U(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))-L(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))\\&<m\frac{1}{km}=\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{k\to\infty}[U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k)]=0,$$

因此,由阿基米德-黎曼定理得,函数f在$\boldsymbol{I}$上是可积的.

反之,假设函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的,由阿基米德-黎曼定理知,对$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$,存在一个阿基米德序列$\{\boldsymbol{P}_k\}$. 运用细分引理,我们可以用$\boldsymbol{P}_k$与$\boldsymbol{P}$的细分来代替$\boldsymbol{P}_k$. 对每个自然数$k$,注意到,如果$\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J})$是$\boldsymbol{P}_k$在$\boldsymbol{P}$中的广义矩形$\boldsymbol{J}$导出的划分,则

$$U(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))-L(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))\leqslant U(f,\boldsymbol{P}_k)-L(f,\boldsymbol{P}_k).$$

这样，对 $\boldsymbol{P}$ 中每一个广义矩形 $\boldsymbol{J}$，划分序列 $\{\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J})\}$ 是 $f:\boldsymbol{J}\to\mathbb{R}$ 的阿基米德序列，因此，由阿基米德-黎曼定理知，f 在 $\boldsymbol{J}$ 上是可积的.

现在只剩下证实公式(18.9)．但是我们有如下达布和的分配公式：

479

$$L(f,\boldsymbol{P}_k)=\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}L(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J})).$$

根据阿基米德-黎曼定理，划分的阿基米德序列对应的下达布和收敛于积分值．这样

$$\int_{\boldsymbol{I}}f=\lim_{k\to\infty}L(f,\boldsymbol{P}_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}L(f,\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{J}))=\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}\int_{\boldsymbol{J}}f.$$ ■

在6.3节我们用细分引理及阿基米德-黎曼定理对一元函数的积分证明了积分的单调性及线性性．现在我们把这些留作练习，建议读者重温对一元函数的积分的那些证明(定理6.13及定理6.15)，然后给出下述两个定理的证明.

定理18.12(积分的单调性)　假设函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 及 $g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，这里 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个广义矩形，且假定对 $\boldsymbol{I}$ 中的所有点 $\boldsymbol{x}$，

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant g(\boldsymbol{x}).$$

则

$$\int_{\boldsymbol{I}}f\leqslant\int_{\boldsymbol{I}}g.$$

定理18.13(积分的线性性)　假设函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 及 $g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，这里 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个广义矩形．则对任意两个实数 α，β，函数 $\alpha f+\beta g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 仍是可积的且

$$\int_{\boldsymbol{I}}[\alpha f+\beta g]=\alpha\int_{\boldsymbol{I}}f+\beta\int_{\boldsymbol{I}}g. \tag{18.10}$$

达布和的收敛准则

在第7章我们对 f 的划分引进了间隙这一概念，并证明了对一元可积函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是有界闭区间，$\boldsymbol{I}$ 的一个划分序列 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 是对函数 f: $\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的划分的阿基米德序列，只要满足

$$\lim_{k\to\infty}\text{gap }P_k=0.$$

这一结果可以推广多元函数．为叙述这一推广我们需要一些定义.

定义　对 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集 D，D 的直径(记为 diam D)定义为

480

$$\text{diam }D\equiv\sup\{\text{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mid\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in D\}.$$

注意，对于实数的有界闭区间 $I=[a,b]$，$\boldsymbol{I}$ 的直径就是它的长度．因此，由 $\mathbb{R}^n$ 中两点间的距离的定义直接得出，如果广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 是如下的笛卡儿积：

$$\boldsymbol{I}=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],$$

则

$$\text{diam }\boldsymbol{I}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2},$$

即 $\boldsymbol{I}$ 的直径是点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 与点 $(b_1,\cdots,b_n)$ 之间的距离.

定义　对 $\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}$，我们定义 $\boldsymbol{P}$ 的间隙(记为 gap $\boldsymbol{P}$)为 $\boldsymbol{P}$ 中的所有广义矩形直径中的最大直径.

不难验证，对 $\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 的划分 $\boldsymbol{P}$，如果 $\boldsymbol{P}=(P_1,\cdots P_n)$，则

$$\text{gap}\ \boldsymbol{P} = \sqrt{[\text{gap}\ P_1]^2 + \cdots + [\text{gap}\ P_n]^2}.$$

下面定理的证明与一元函数情形(定理 7.12)的证明完全类似，因此，我们把证明留作练习.

定理 18.14(达布和收敛准则) 设 $\boldsymbol{I}$ 是广义矩形，函数 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的. 设 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分序列. 如果

$$\lim_{k \to \infty} \text{gap}\ \boldsymbol{P}_k = 0,$$

则 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 是 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 的阿基米德序列且

$$\lim_{k \to \infty} L(f, \boldsymbol{P}_k) = \int_I f \quad 及 \quad \lim_{k \to \infty} U(f, \boldsymbol{P}_k) = \int_I f.$$

习题

1. 对$\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 及数 $\delta > 0$，证明：存在 $\boldsymbol{I}$ 的划分 $\boldsymbol{P}$，使得 $\text{gap}\boldsymbol{P} < \delta$.
2. 设 $\boldsymbol{I}$ 是广义矩形及函数 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的. 设 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分的阿基米德序列. 问条件
$$\lim_{k \to \infty} \text{gap}\ \boldsymbol{P}_k = 0$$
是否是必要的?
3. 对例 18.8，求出 $U(f, \boldsymbol{P}_k)$ 与 $L(f, \boldsymbol{P}_k)$ 的精确值.
4. 用阿基米德–黎曼定理计算例 18.8 中函数的积分值.
5. 设 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形，假设函数 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的. 假设当 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{I}$ 中的点且有有理分量时，$f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$. 证明 $\int_I f \geqslant 0$.

481

6. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的任一广义矩形都包含一个有有理分量的点和一个没有有理分量的点.
7. 对平面$\mathbb{R}^2$ 上的广义矩形 $\boldsymbol{I} = [0, 1] \times [0, 1]$，定义
$$f(x,y) = \begin{cases} 5 & 若(x,y) \in \boldsymbol{I}且 x > \dfrac{1}{2} \\ 1 & 若(x,y) \in \boldsymbol{I}且 x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
运用可积准则证明 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的.
8. 对$\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 的划分 $\boldsymbol{P} = (P_1, \cdots, P_n)$，验证公式
$$\text{gap}\ \boldsymbol{P} = \sqrt{[\text{gap}\ P_1]^2 + \cdots + [\text{gap}\ P_n]^2}.$$
9. 设 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的一个广义矩形，假设 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 除在 $\boldsymbol{I}$ 中一点 $\boldsymbol{x}$ 外其值为 0. 证明：$f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的且 $\int_I f = 0$. 同样结果对$\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 成立吗?
10. 设 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的一个广义矩形，假设有界函数 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{I}$ 的内部的值是 0. 证明：$f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的且 $\int_I f = 0$. 同样结果对$\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 成立吗?
11. 对平面$\mathbb{R}^2$ 中的矩形 $\boldsymbol{I} = [0, 1] \times [0, 1]$，定义函数 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 为
$$f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \boldsymbol{I}.$$
运用达布和收敛准则计算 $\int_I f$.
12. 对平面$\mathbb{R}^2$ 中的矩形 $\boldsymbol{I} = [0, 1] \times [-1, 0]$，定义函数 $f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 为
$$f(x,y) = x^2 y, \quad (x,y) \in \boldsymbol{I}.$$
运用达布和收敛准则计算 $\int_I f$.

13. 对平面$\mathbb{R}^2$中的矩形 $\boldsymbol{I}=[0,\ 2]\times[0,\ 1]$，定义函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$为

$$f(x,y) = x + 2y,\quad (x,y)\in \boldsymbol{I}.$$

运用达布和收敛准则计算 $\int_I f$.

14. 设 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^n$中的广义矩形，假设函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的．设数 M 具有如下性质：对 $\boldsymbol{I}$ 中所有的 $\boldsymbol{x}$，$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant M$. 证明：

$$\left|\int_I f\right|\leqslant M\cdot \mathrm{vol}\,\boldsymbol{I}.$$

18.2 连续性与可积性

本节将证明在广义矩形上连续函数是可积的．然后将证明一个更一般的结果：广义矩形上 [482] 的有界函数不一定连续，但仍可积.

我们证明了定理 6.18：有界闭区间上的连续函数是可积的，证明依赖于两个基本结果：一个在有界闭区间上的连续函数(i)取得极大值与极小值及(ii)是一致连续的．但是推论 11.23 及推论 11.26 分别把这些结果推广到$\mathbb{R}^n$中的广义矩形上的连续函数．这样，我们就得到了把引理 6.17 与定理 6.18 推广到定义在广义矩形上的连续函数的一般性结果．

引理 18.15　*设$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是定义在广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的连续函数，$\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的划分．则在划分 $\boldsymbol{P}$ 中存在一个广义矩形，它包含点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，使得如下估计式成立*

$$0\leqslant U(f,\boldsymbol{P})-L(f,\boldsymbol{P})\leqslant[f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v})]\mathrm{vol}\,\boldsymbol{I}. \tag{18.11}$$

证明　设 $\boldsymbol{J}$ 是划分 $\boldsymbol{P}$ 中的一个广义矩形．因为$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是连续的，根据推论 11.23，$f$ 在 $\boldsymbol{J}$ 上有极大值和极小值，即在 $\boldsymbol{J}$ 中存在点 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{J})$ 与 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{J})$，使得

$$f(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{J}))=m(f,\boldsymbol{J})\equiv\inf\{f(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{J}\}$$

及

$$f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{J}))=M(f,\boldsymbol{J})\equiv\sup\{f(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{J}\}.$$

因为在 $\boldsymbol{P}$ 中广义矩形数是有限的，所以我们可选取 $\boldsymbol{P}$ 中的一个广义矩形 $\boldsymbol{J}_*$，使得

$$M(f,\boldsymbol{J}_*)-m(f,\boldsymbol{J}_*)=\max_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{I}}[M(f,\boldsymbol{J})-m(f,\boldsymbol{J})],$$

并且定义

$$\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{J}_*)\quad 及\quad \boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}(\boldsymbol{J}_*).$$

则对 $\boldsymbol{P}$ 中所有的 $\boldsymbol{J}$，

$$M(f,\boldsymbol{J})-m(f,\boldsymbol{J})\leqslant M(f,\boldsymbol{J}_*)-m(f,\boldsymbol{J}_*)=f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v}),$$

因此

$$\begin{aligned}U(f,\boldsymbol{P})-L(f,\boldsymbol{P})&=\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}[M(\boldsymbol{J})-m(\boldsymbol{J})]\mathrm{vol}\,\boldsymbol{J}\leqslant\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{I}}[f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v})]\mathrm{vol}\,\boldsymbol{J}\\&=[f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v})]\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}\mathrm{vol}\,\boldsymbol{J}=[f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v})]\mathrm{vol}\,\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$ [483] ■

根据推论 11.26，广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的连续函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是一致连续的，即对 $\boldsymbol{I}$ 内任意两个序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 与 $\{\boldsymbol{v}_k\}$，如果$\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{dist}(\boldsymbol{u}_k,\ \boldsymbol{v}_k)=0$，则

$$\lim_{k\to\infty}[f(\boldsymbol{u}_k)-f(\boldsymbol{v}_k)]=0.$$

定义在广义矩形上的连续函数具有的这一性质蕴涵着它是可积的.

定理 18.16　*设$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是定义在广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的连续函数，则 f 在 $\boldsymbol{I}$ 上是可积的.*

证明 我们用阿基米德–黎曼定理来证明这个定理. 设$\{\boldsymbol{P}_k\}$是$\boldsymbol{I}$的任一划分序列且满足

$$\lim_{k\to\infty}\text{gap } \boldsymbol{P}_k = 0. \tag{18.12}$$

下面证明序列$\{\boldsymbol{P}_k\}$是f定义于$\boldsymbol{I}$上的阿基米德划分序列. 由上面的引理, 对每个下标k, 我们可在划分$\boldsymbol{P}_k$中选取一个广义矩形, 它包含$\boldsymbol{u}_k$与$\boldsymbol{v}_k$, 使得下面的估计式成立:

$$0 \leqslant U(f,\boldsymbol{P}_k) - L(f,\boldsymbol{P}_k) \leqslant [f(\boldsymbol{u}_k) - f(\boldsymbol{v}_k)]\text{vol } \boldsymbol{I}. \tag{18.13}$$

由于$\boldsymbol{u}_k$与$\boldsymbol{v}_k$属于划分$\boldsymbol{P}_k$的某一个广义矩形, 因此

$$\text{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_k) \leqslant \text{gap } \boldsymbol{P}_k.$$

由这个估计式及(18.12)得, $\{\boldsymbol{u}_k\}$与$\{\boldsymbol{v}_k\}$是广义矩形$\boldsymbol{I}$中的序列, 它们具有如下性质:

$$\lim_{k\to\infty}\text{dist}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_k) = 0.$$

但由推论 11.26 知. 定义在广义矩形上的连续函数是一致连续的. 这样

$$\lim_{k\to\infty}[f(\boldsymbol{u}_k) - f(\boldsymbol{v}_k)] = 0.$$

由这一极限与不等式(18.13)推出

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty}[U(f,\boldsymbol{P}_k) - L(f,\boldsymbol{P}_k)] \leqslant \lim_{k\to\infty}[f(\boldsymbol{u}_k) - f(\boldsymbol{v}_k)]\text{vol } \boldsymbol{I} = 0.$$

这样, 序列$\{\boldsymbol{P}_k\}$是f在$\boldsymbol{I}$上的划分的阿基米德序列. 根据阿基米德–黎曼定理, f在$\boldsymbol{I}$上是可积的. ■

为了把定义在广义矩形上的函数的积分概念到定义在一般集合上的函数, 下述关于上面定理的推广是十分有用的. [484]

命题 18.17 *设$\boldsymbol{I}$是$\mathbb{R}^n$中的广义矩形, 且假设$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是有界的, 且它在$\boldsymbol{I}$的内部的限制是连续的. 则函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的.*

证明 我们再次使用阿基米德–黎曼定理. 设k是自然数, 选取$\boldsymbol{I}_k$是包含于$\boldsymbol{I}$内的一个广义矩形且满足(习题 5).

$$\text{vol } \boldsymbol{I} - \text{vol } \boldsymbol{I}_k < 1/k. \tag{18.14}$$

根据前面的定理, 因为f在$\boldsymbol{I}$的内部连续, 所以限制$f:\boldsymbol{I}_k\to\mathbb{R}$是可积的. 由阿基米德–黎曼定理及定理 18.10 中的准则(ii)知, 存在$\boldsymbol{I}_k$的一个划分$\boldsymbol{P}_k$, 使得

$$U(f,\boldsymbol{P}_k) - L(f,\boldsymbol{P}_k) < 1/k. \tag{18.15}$$

选取$\boldsymbol{I}$的一个划分$\boldsymbol{P}'_k$, 使得$\boldsymbol{P}_k$中的每一个广义矩形都是$\boldsymbol{P}'_k$中的广义矩形(习题 6).

我们断言: $\{\boldsymbol{P}'_k\}$是f在$\boldsymbol{I}$上的划分的阿基米德序列. 一旦证明了这一点, f在$\boldsymbol{I}$上的可积性便由阿基米德–黎曼定理得到. 因为$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是有界的, 所以可选取$M>0$, 使得对$\boldsymbol{I}$中所有的$\boldsymbol{x}$,

$$|f(\boldsymbol{x})| \leqslant M.$$

于是对$\boldsymbol{P}'_k$中所有的广义矩形$\boldsymbol{J}$有

$$M(f,\boldsymbol{J}) - m(f,\boldsymbol{J}) \leqslant 2M \text{ vol } \boldsymbol{J}. \tag{18.16}$$

注意,

$$U(f,\boldsymbol{P}'_k) - L(f,\boldsymbol{P}'_k) = U(f,\boldsymbol{P}_k) - L(f,\boldsymbol{P}_k) + E_k, \tag{18.17}$$

其中E_k是所有项$[M(f, \boldsymbol{J}) - m(f, \boldsymbol{J})]\text{vol } \boldsymbol{J}$的和, 这里$\boldsymbol{J}$是$\boldsymbol{P}'_k$而不是$\boldsymbol{P}_k$中的广义矩形. 由估计式(18.14)与(18.16)得,

$$E_k \leqslant 2M[\text{vol } \boldsymbol{I} - \text{vol } \boldsymbol{I}_k] \leqslant 2M/k.$$

由这一估计式、(18.17)及(18.15)得,

$$0 \leqslant U(f,\boldsymbol{P}'_k) - L(f,\boldsymbol{P}'_k) = U(f,\boldsymbol{P}_k) - L(f,\boldsymbol{P}_k) + E_k < 1/k + 2M/k.$$

从而，

$$\lim_{k\to\infty}[U(f,\boldsymbol{P}'_k) - L(f,\boldsymbol{P}'_k)] = 0,$$

即$\{\boldsymbol{P}'_k\}$是f在$\boldsymbol{I}$上的划分的阿基米德序列. ■

若尔当容度为 0 的集合

下面我们将把定义在广义矩形上的函数的积分这一概念推广到定义在更一般的区域上的多元函数. 为此，首先把定义在广义矩形上的有界函数可能不连续但仍是可积的这一论述进行推广.

485

对$\mathbb{R}^n$的一个子集S，$\mathbb{R}^n$的子集的集合$\mathcal{F}$称为*覆盖*(cover)S，如果$\mathcal{F}$中的集合的并包含集S，即

$$S \subseteq \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F.$$

定义 *$\mathbb{R}^n$的一个有界子集S称为有***若尔当容度***(Jordan content)0，如果对任一$\varepsilon>0$，存在$\mathbb{R}^n$的有限多个广义矩形组成的集合$\mathcal{F}$，它覆盖S，而且它们的体积和小于ε，即如果$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{I}_1, \cdots, \boldsymbol{I}_m\}$，则*

$$S \subseteq \bigcup_{1\leqslant j\leqslant m} \boldsymbol{I}_j \quad 及 \quad \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol} \boldsymbol{I}_j < \varepsilon.$$

显然，若集D的若尔当容度为0，则D的任一子集的若尔当容度也为0. 而且，有限个若尔当容度为0的集的并仍是若尔当容度为0. 为证实这一点，对正整数k，设$\{S_i\}_{1\leqslant i\leqslant k}$是$\mathbb{R}^n$的$k$个子集的集合，使得每个$S_i$的若尔当容度为0. 我们断言：其并$S=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} S_i$的若尔当容度为0. 事实上，设$\varepsilon>0$，对介于1和$k$之间的每个下标$i$，因为$\varepsilon/k$是正数，所以可选择有限广义矩形覆盖$S_i$，而它们的体积和小于$\varepsilon/k$. 取这$k$个有限广义矩形集合的并，我们就得到覆盖$S$的而它们的体积和小于$k[\varepsilon/k]=\varepsilon$.

例 18.18 定义平面$\mathbb{R}^2$中的线段S为

$$S = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, y = x\}.$$

则S有若尔当容度0. 如图18.2所示. 为验证这一点，设$\varepsilon>0$，则对每个自然数k，设$\{\boldsymbol{I}_j\}_{1\leqslant j\leqslant k}$是$k$个定义为

$$\boldsymbol{I}_j = \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right] \times \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right] \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

的广义矩形的集合. 显然，这些广义矩形的集合覆盖了集S. 这些矩形的每一个的面积为$1/k^2$，所以它们的面积和是$1/k$. 如果选取$1/k<\varepsilon$，则S被有限个广义矩形所覆盖，而它们的面积和小于ε. ■

例 18.19 定义$\mathbb{R}^3$中的集合S为

$$S = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, z = 4\},$$

则S的若尔当容度也为0. 为验证这一点，再次设$\varepsilon>0$，则广义矩形

$$\boldsymbol{I} = [0,1] \times [0,1] \times [4-\varepsilon/3, 4+\varepsilon/3]$$

包含S且体积为$2\varepsilon/3<\varepsilon$. ■

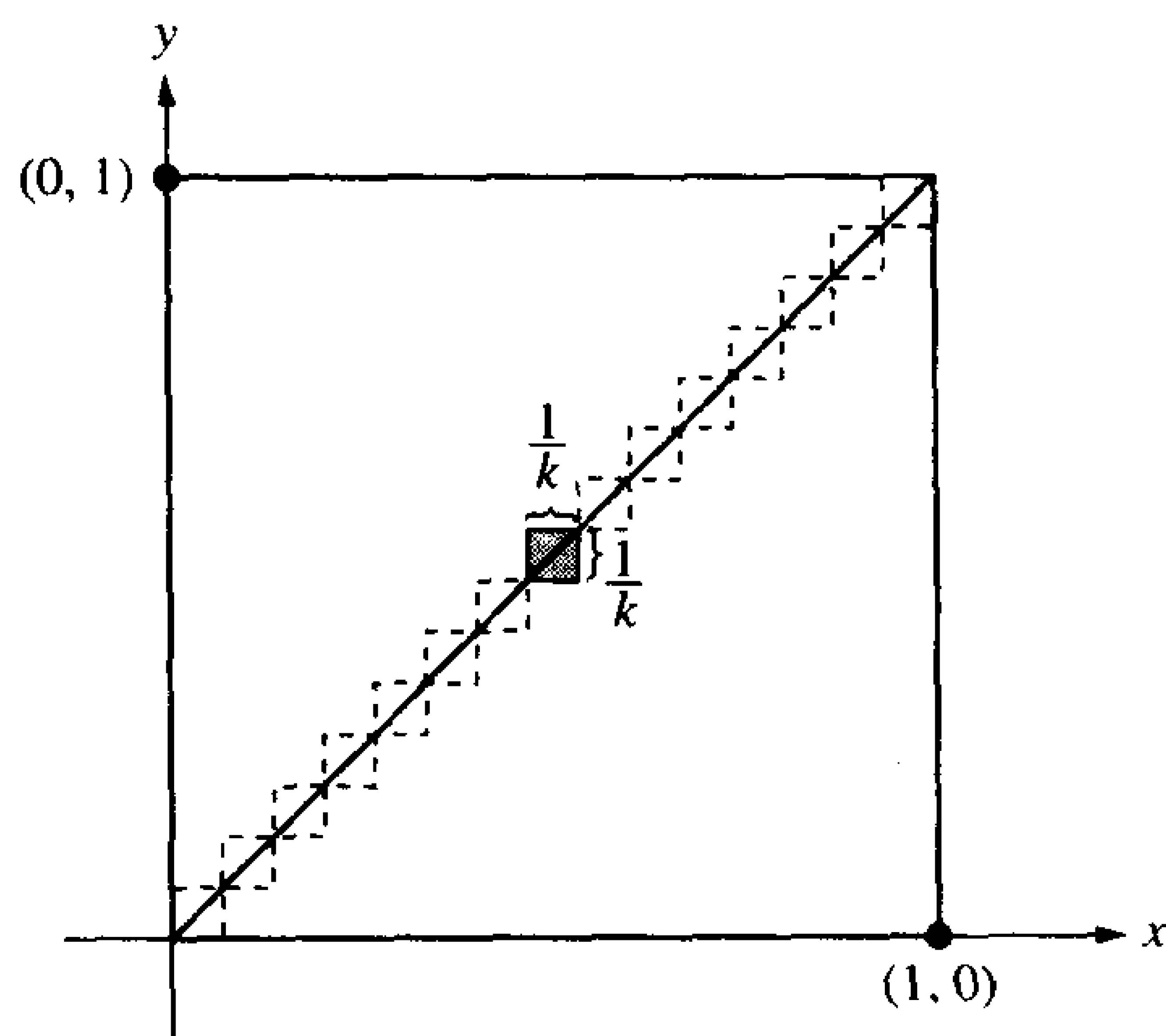


图 18.2 $\mathbb{R}^2$ 中的线段 S 有若尔当容度 0

486

定理 18.20 设 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是定义在广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的有界函数. 如果 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的不连续点集有若尔当容度 0，则 f 在 $\boldsymbol{I}$ 上是可积的.

证明 我们用阿基米德–黎曼定理及定理 18.10 中的准则(ii). 设 $\varepsilon>0$，必须找到 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}$，使得

$$U(f,\boldsymbol{P})-L(f,\boldsymbol{P})<\varepsilon.$$

因为函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是有界的，所以我们可以选择一个数 $M>0$，使得对 $\boldsymbol{I}$ 中所有的 x,

$$|f(x)|\leqslant M.$$

设 D 是 I 中使函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 不连续的点集，因为 $\varepsilon/4M$ 是正数且 D 有若尔当容度 0，所以我们可选择一个由有限个广义矩形组成的集合 $\mathcal{F}$ 覆盖 D，而这些广义矩形的体积和小于 $\varepsilon/4M$. 我们假设 $\mathcal{F}$ 中的每一个广义矩形是 $\boldsymbol{I}$ 的子集.

对介于 1 和 n 之间的下标 i，定义 P_i 是 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 个边的划分，它包含所有 $\mathcal{F}$ 中的广义矩形的第 i 个边的端点. 定义 $\boldsymbol{P}=(P_1,\cdots,P_n)$. 划分 $\boldsymbol{P}$ 有如下性质: $\mathcal{F}$ 中的每个广义矩形是划分 $\boldsymbol{P}$ 的广义矩形的并. 我们把划分 P 中的广义矩形分类，当它包含在 $\mathcal{F}$ 中的广义矩形中时，记为 $\boldsymbol{J}_1',\cdots,\boldsymbol{J}_\ell'$，当不具有上面的性质时，记为 $\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_m$. 因为 $\mathcal{F}$ 中的广义矩形的体积和小于 $\varepsilon/4M$，所以

487

$$\sum_{i=1}^{\ell}\operatorname{vol}\boldsymbol{J}_i'<\frac{\varepsilon}{4M},$$

因此，由 M 的选取得,

$$\sum_{i=1}^{\ell}[M(f,\boldsymbol{J}_i')-m(f,\boldsymbol{J}_i')]\operatorname{vol}\boldsymbol{J}'\leqslant\sum_{i=1}^{\ell}2M\cdot\operatorname{vol}\boldsymbol{J}'<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (18.18)$$

另一方面，对介于 1 和 m 之间的每个下标 i，因为广义矩形 $\{\boldsymbol{J}_1',\cdots,\boldsymbol{J}_\ell'\}$ 覆盖 D，而函数 $f:\boldsymbol{J}_i\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{J}_i$ 的内部是连续的. 这样，由命题 18.17 知，$f:\boldsymbol{J}_i\to\mathbb{R}$ 是可积的，所以由阿基米德–黎曼定理与定理 18.10 中的准则(ii)，我们可选 $\boldsymbol{J}_i$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}_i$，使得

$$U(f,\boldsymbol{P}_i)-L(f,\boldsymbol{P}_i)<\frac{\varepsilon}{2m}. \quad (18.19)$$

选取 $\boldsymbol{P}^*$ 是划分 $\boldsymbol{P}$ 的细分，使得对介于 1 和 m 之间的下标 i，导出 J_i 的一个划分，它是 $\boldsymbol{P}_i$ 的细

分. 则由细分引理得,

$$U(f,P^*) - L(f,P^*) \leqslant \sum_{i=1}^{\ell}[M(f,J_i') - m(f,J_i')]\operatorname{vol} J_i' + \sum_{i=1}^{m}[U(f,P_i) - L(f,P_i)]$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + m\left[\frac{\varepsilon}{2m}\right] = \varepsilon.$$

■

上面的定理是命题 18.17 的一个推广，因为(习题 9)广义矩形的边界有若尔当容度 0.

习题

1. 对正数 a、b，证明：椭圆
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$$
有若尔当容度 0.
2. 证明：实数的集合$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$有若尔当容度 0.
3. 证明：椭球
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, y = z\}$$
有若尔当容度 0.
4. 对$\mathbb{R}^n$ 的子集 S，S 的特征函数(Characteristic function)为χ：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，定义为

488

$$\chi(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{cases} 1 & 若 \boldsymbol{x} \in S \\ 0 & \boldsymbol{x} \notin S. \end{cases}$$
证明：特征函数χ的不连续点集由 S 的边界组成.
5. 设 $\boldsymbol{I}$ 为$\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形及 $\varepsilon > 0$. 证明：存在一个广义矩形 J，它包含在 $\boldsymbol{I}$ 的内部且使得 $\operatorname{vol} \boldsymbol{I} - \operatorname{vol} \boldsymbol{J} < \varepsilon$.
6. 设 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形且 $\boldsymbol{J}$ 包含在 $\boldsymbol{I}$ 的内部. 给定 $\boldsymbol{J}$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}$，证明：存在 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}'$，使得 $\boldsymbol{P}$ 中的每一个广义矩形也是 $\boldsymbol{P}'$中的广义矩形.
7. 设 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$及 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}$. 证明：$A$ 没有若尔当容度 0. 但 B 有若尔当容度 0. 这是否有矛盾？
8. 设$\{\boldsymbol{u}_k\}$是$\mathbb{R}^n$ 中的一个收敛序列. 证明：集$\{\boldsymbol{u}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$有若尔当容度 0.
9. 证明：广义矩形的边界有若尔当容度 0.
10. 设 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形，函数$f:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是连续的. 假设对 $\boldsymbol{I}$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，恒有 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$. 证明：若 $\int_{\boldsymbol{I}} f = 0$，则对 $\boldsymbol{I}$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，$f(\boldsymbol{x}) = 0$. 问这里的连续性是否必要？

18.3 若尔当域上函数的积分

在一元函数积分的研究中，我们只需讨论定义在有界闭区间上的函数. 对于多元函数，广义矩形并不起主导作用：有必要讨论一般的定义域上的多元函数的积分.

函数的零扩张的可积性

定义 对$\mathbb{R}^n$ 的有界子集 D 及一个有界函数$f:D \to \mathbb{R}$，如果 $\boldsymbol{I}$ 是一个包含 D 的广义矩形，我们定义$f:\boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的**零扩张**(zero-extension，记为 $\hat{f}:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$)为

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & 如果 \boldsymbol{x} 在 D 中 \\ 0 & 如果 \boldsymbol{x} 在 \boldsymbol{I} \setminus D 中. \end{cases}$$

f：$D \to \mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 上的零扩张如图 18.3 所示 .

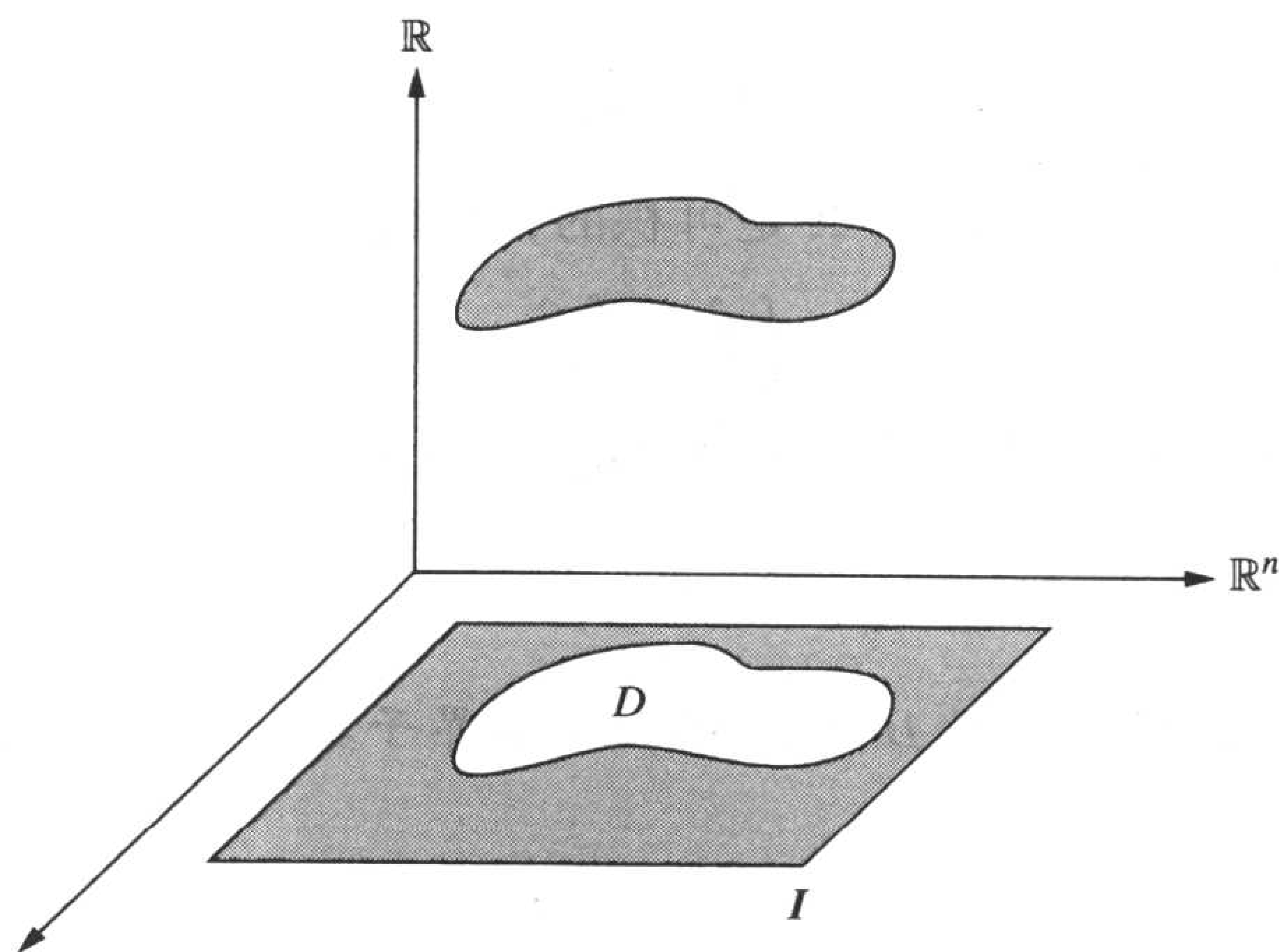


图 18.3　$f{:}D \to \mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 上的零扩张

定义　设 D 是$\mathbb{R}^n$ 的有界子集，并设函数 $f{:}D \to \mathbb{R}$ 是有界的. 函数 $f{:}D \to \mathbb{R}$ 称为**可积的**，如果存在一个包含 D 的广义矩形 $\boldsymbol{I}$，而 f 的零扩张 $\hat{f}{:}\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的. 在这种情况下，我们定义

$$\int_D f \equiv \int_I \hat{f}. \tag{18.20}$$

有必要证明上述定义是无歧义的，即与含 D 的广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 的选择是无关的. 为做到这一点，我们首先确立在 D 是一个广义矩形时，上述定义无歧义.

引理 18.21　设 f：$\boldsymbol{J} \to \mathbb{R}$ 是一个定义在广义矩形 $\boldsymbol{J}$ 上的可积函数，而 $\boldsymbol{I}$ 是一个包含 $\boldsymbol{J}$ 的广义矩形，则 $\hat{f}{:}\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是 f 到 $\boldsymbol{I}$ 的零扩张是可积的且

$$\int_I \hat{f} = \int_J f.$$

证明　对介于 1 和 n 之间的每个下标 i，$\boldsymbol{I}$ 的第 i 个边是$[a_i, b_i]$，而 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 个边是$[a_i', b_i']$ 考虑区间$[a_i, b_i]$的划分 $P_i = \{a_i, a_i', b_i', b_i\}$，$\boldsymbol{P} = (P_1, \cdots, P_n)$是 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分，它具有性质：它包含广义矩形 $\boldsymbol{J}$. 而且，对 $\boldsymbol{P}$ 中非 $\boldsymbol{J}$ 的每一个广义矩形 $\boldsymbol{J}'$，限制$\hat{f}$：$\boldsymbol{J}' \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{J}'$的内部是 0. 由命题 18.17 知，函数 $\hat{f}{:}\boldsymbol{J}' \to \mathbb{R}$ 是可积的，而且不难知 $\int_{J'} \hat{f} = 0$(习题 5). 从积分按划分的可加性(定理 18.11) 知，$\hat{f}$：$\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的当且仅当它的限制 $f{:}\boldsymbol{J} \to \mathbb{R}$ 是可积的且

$$\int_I \hat{f} = \sum_{J' \in P} \int_{J'} \hat{f} = \int_J \hat{f} = \int_J f. \qquad \blacksquare$$

为了证明前面 f 在一般有界集 D 上的积分定义是完全确定的，设 $\boldsymbol{I}_1$ 与 $\boldsymbol{I}_2$ 是两个包含 D 的广义矩形. 定义 $\boldsymbol{I}$ 是 $\boldsymbol{I}_1$ 与 $\boldsymbol{I}_2$ 的交集. 由引理 18.21 知，函数 $\hat{f}{:}\boldsymbol{I}_1 \to \mathbb{R}$ 是可积的当且仅当 $\hat{f}{:}\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的，在此情形下，有

489 ~ 490

$$\int_I \hat{f} = \int_J \hat{f},$$

及函数$\hat{f}$: $I_2 \to \mathbb{R}$ 是可积的当且仅当$\hat{f}:I \to \mathbb{R}$ 是可积的，在此情形下，有

$$\int_I \hat{f} = \int_{I_2} \hat{f}.$$

从而，$\hat{f}:I_1 \to \mathbb{R}$ 是可积当且仅当$\hat{f}:I_2 \to \mathbb{R}$ 是可积的，在此情形下，有

$$\int_{I_1} \hat{f} = \int_{I_2} \hat{f}.$$

这样就得到上面的可积性与积分的定义是无歧义的.

积分的单调性与线性性

定理 18.22(积分的单调性) 设 D 是$\mathbb{R}^n$ 的一个有界子集，假设函数$f:D \to \mathbb{R}$ 和 $g:D \to \mathbb{R}$ 是可积的且对 D 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x}),$$

则

$$\int_D f \leqslant \int_D g.$$

证明 选取 $\boldsymbol{I}$ 是包含 D 的广义矩形. 对 $\boldsymbol{I}$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}) \leqslant \hat{g}(\boldsymbol{x}),$$

利用定义在广义矩形上的函数的积分的单调性(定理 18.12)，

$$\int_D f = \int_I \hat{f} \leqslant \int_I \hat{g} = \int_D g.$$ ■

定理 18.23(积分的线性性) 设 D 是$\mathbb{R}^n$ 的一个有界子集，假设函数$f:D \to \mathbb{R}$ 和 $g:D \to \mathbb{R}$ 是可积的. 则对任意两个数 α 与 β，函数 $\alpha f + \beta g:D \to \mathbb{R}$ 也是可积的，且

$$\int_D [\alpha f + \beta g] = \alpha \int_D f + \beta \int_D g. \tag{18.21}$$

证明 设 $\boldsymbol{I}$ 是包含 D 的广义矩形. 观察到 $\alpha f + \beta g:D \to \mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的零扩张是 $\alpha \hat{f} + \beta \hat{g}:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$. 由定义在广义矩形的函数的积分的线性性(定理 18.13)，

491

$$\int_D [\alpha f + \beta g] = \int_I [\alpha \hat{f} + \beta \hat{g}] = \alpha \int_I \hat{f} + \beta \int_I \hat{g} = \alpha \int_D f + \beta \int_D g.$$ ■

若尔当域

对于定义在$\mathbb{R}^n$ 的有界子集 D 上的连续函数，它的零扩张的不连续点集包含在 D 的边界中(习题 6). 这样，因为根据定理 18.20 知，一个定义在广义矩形上的有界函数是可积的，如果这个不连续点集有若尔当容度 0，所以我们把注意力集中在$\mathbb{R}^n$ 的下类有界子集上.

定义 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集 D 称为**若尔当域**(Jordan domain)，如果它的边界有若尔当容度 0.

定理 18.24 令 D 是$\mathbb{R}^n$ 的一个若尔当域且函数$f:D \to \mathbb{R}$ 是有界的. 如果$f:D \to \mathbb{R}$ 的不连续点集有若尔当容度 0，则 $f:D \to \mathbb{R}$ 是可积的.

证明 选取 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形且包含域 D，必须证明 f 的零扩张$\hat{f}:\boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 是可积的. 根

据定理 18.20，只要证明$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的不连续点集有若尔当容度 0. 但是对 D 的内点 $\boldsymbol{x}$，当 $f:D\to\mathbb{R}$ 是连续的，则零扩张$\hat{f}$在点 $\boldsymbol{x}$ 处仍是连续的，因为存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域，在其上，$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 完全同于 $f:D\to\mathbb{R}$. 另一方面，当 $\boldsymbol{x}$ 是 D 的外点且属于 $\boldsymbol{I}$ 时，存在一个 $\boldsymbol{x}$ 的邻域，$\hat{f}$在此恒为 0，所以 $\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处是连续的. 这样，$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的不连续点集包含在 D 的边界及 $f:D\to\mathbb{R}$ 的在 D 的内部的不连续点集的并集内. 由假设知，这两个的每一个都有若尔当容度 0，因此它们并集也有若尔当容度 0. ■

可积函数的图形

为使上述定理有用，必须提供准则用以判断一个集合是否有若尔当容度 0，下面命题与它的推论就提供了这样的准则.

命题 18.25 设 $\boldsymbol{I}$ 是$\mathbb{R}^{n-1}$中的一个广义矩形，假设函数 $g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，则$\mathbb{R}^n$ 的子集是由 $g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的图形组成，

$$\{(\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x}))\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}\}$$

有若尔当容度 0. [492]

证明 设 $\varepsilon>0$. 根据阿基米德–黎曼定理和定理 18.10 的准则(ii)，存在 $\boldsymbol{I}$ 的划分 $\boldsymbol{P}$，满足 $U(g,\ \boldsymbol{P})-L(g,\ \boldsymbol{P})<\varepsilon$，即

$$\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}[M(g,\boldsymbol{J})-m(g,\boldsymbol{J})]\operatorname{vol}\boldsymbol{J}<\varepsilon, \tag{18.22}$$

这里对 $\boldsymbol{P}$ 内的每个广义矩形 $\boldsymbol{J}$，

$$M(g,\boldsymbol{J})=\sup\{g(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{J}\}\quad\text{及}\quad m(g,\boldsymbol{J})=\inf\{g(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{J}\}.$$

对 $\boldsymbol{P}$ 中的每个广义矩形 $\boldsymbol{J}$，笛卡儿积广义矩形 $\boldsymbol{J}\times[m(g,\ \boldsymbol{J}),\ M(g,\ \boldsymbol{J})]$是$\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形，且由达布和的定义知，当 $\boldsymbol{J}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 内变化时，$g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的图形包含在这个笛卡儿积的并中. 不等式(18.22)精确地说明这些积的体积和小于 ε，因此这个图形有若尔当容度 0. ■

推论 18.26 设 D 是$\mathbb{R}^{n-1}$中的若尔当域，设函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是有界的，且 $f:D\to\mathbb{R}$ 的不连续点集有若尔当容度 0，则$\mathbb{R}^n$ 的子集由 $f:D\to\mathbb{R}$ 的图形组成，

$$\{(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{x}\in D\}$$

有若尔当容度 0.

证明 设 $\boldsymbol{I}$ 是包含 D 的广义矩形. 由于 $f:D\to\mathbb{R}$ 是可积的，$f:D\to\mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的零扩张 $\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 也是可积的. 由命题 18.25 知，$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的图形有若尔当容度 0. 因为 $f:D\to\mathbb{R}$ 的图形是 $\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的图形的子集，所以 $f:D\to\mathbb{R}$ 的图形也有若尔当容度 0. ■

例 18.27 下面的$\mathbb{R}^2$ 的子集是若尔当域：

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},\quad\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

事实上，这两个集的边界是单位圆 $S=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}$. 所以必须证明 S 有若尔当容度 0. 但是 S 是两个定义在$[-1,\ 1]$上的连续函数的图形的并集. 由上面推论知，这些图形中每一个都有若尔当容度 0，因而其并集也有若尔当容度 0。 ■ [493]

例 18.28 对 $c>0$，在$\mathbb{R}^3$ 中定义圆柱体 C 为

$$C=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant c\}$$

我们断言 C 是若尔当域. 事实上，C 的边界是顶部$\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ z=c\}$、底部$\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\}$及侧面$\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2=1\quad 0\leqslant z\leqslant c\}$的并. 因为顶部和底部每一个都是若尔当域上的常值函数的图形，所以顶部与底部有若尔当容度 0. 侧面可写成

$$\{(x,y,z)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant c,y=\pm\sqrt{1-x^2}\}.$$

由于这个集合是两个集合的并，而它们中的每一个是定义在矩形上的连续函数的图形，侧面有若尔当容度 0，因此 C 是若尔当域. ■

上面三个例子描述了检验$\mathbb{R}^n$ 的子集 D 是若尔当域的一般方法：只要证明 D 的边界是有限个 $n-1$ 元可积函数的图形即可. 特别地(习题 1)，$\mathbb{R}^n$ 中的任一广义矩形和任一开球都是若尔当域.

积分的可加性

为了给出域上积分的可加性的一般结果，我们建立下面的引理.

引理 18.29 设 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 上的有界函数且具有如下性质：存在 $\boldsymbol{I}$ 的子集 S，它的若尔当容度是 0，使得对 $\boldsymbol{I}\setminus S$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，

$$f(\boldsymbol{x})=0.$$

则 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的且 $\int_{\boldsymbol{I}}f=0$.

证明 首先容易看到，由于 S 有若尔当容度 0，因此 S 的边界也有若尔当容度 0(习题 12)，这样，S 是若尔当域. 而且，函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是函数f: $S\to\mathbb{R}$ 的零扩张. 由于函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{I}$ 中 S 的外点上是连续的，因此函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 的不连续点集有若尔当容度 0，从定理 18.20 的证明中知，$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，所以仅需证明 $\int_{\boldsymbol{I}}f=0$. 这等价于证明对每一 $\varepsilon>0$，

494

$$-\varepsilon<\int_{\boldsymbol{I}}f<\varepsilon. \tag{18.23}$$

设 $\varepsilon>0$，从定理 18.20 的证明知，不难找到 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}$，使得

$$-\varepsilon<L(f,\boldsymbol{P})\leqslant\int_{\boldsymbol{I}}f\leqslant U(f,\boldsymbol{P})<\varepsilon,$$

因此(18.23)成立. ■

定理 18.30 设 D_1 与 D_2 是$\mathbb{R}^n$ 的两个有界子集. 对 $D=D_1\cup D_2$，假设函数$f:D\to\mathbb{R}$ 有如下性质：$f:D_1\to\mathbb{R}$ 与 $f:D_2\to\mathbb{R}$ 都是可积的. 如果交集 $D_1\cap D_2$ 有若尔当容度 0，则函数$f:D\to\mathbb{R}$ 也是可积的且

$$\int_D f=\int_{D_1}f+\int_{D_2}f. \tag{18.24}$$

证明 选取 $\boldsymbol{I}$ 是包含 D 的广义矩形. 定义$\hat{f}_1:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是$f:D_1\to\mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的零扩张，$\hat{f}_2:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是 $f:D_2\to\mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的零扩张，及$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是$f:D\to\mathbb{R}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的零扩张. 现在必须证明$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的且

$$\int_{\boldsymbol{I}}\hat{f}=\int_{\boldsymbol{I}}\hat{f}_1+\int_{\boldsymbol{I}}\hat{f}_2. \tag{18.25}$$

为此，定义辅助函数 $g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 为

$$g(\boldsymbol{x})=\hat{f}(\boldsymbol{x})-[\hat{f}_1(\boldsymbol{x})+\hat{f}_2(\boldsymbol{x})],\quad \text{对 } \boldsymbol{I} \text{ 中所有的点 } \boldsymbol{x}.$$

观察到 $\boldsymbol{I}$ 中仅仅是在 $D_1\cap D_2$ 中那些 $\boldsymbol{x}$ 有可能使 $g(\boldsymbol{x})\neq 0$. 由假设知，$D_1\cap D_2$ 有若尔当容度 0，所以从引理 18.29 得出，$g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的且 $\int_I g=0$. 再由定义在广义矩形上的函数积分的线性性(定理 18.13)知，因为$\hat{f}=\hat{f}_1+\hat{f}_2+g$，所以函数 $\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的且

$$\int_I\hat{f}=\int_I[\hat{f}_1+\hat{f}_2+g]=\int_I\hat{f}_1+\int_I\hat{f}_2+\int_I g=\int_I\hat{f}_1+\int_I\hat{f}_2,$$

即(18.25)成立． ■

集合的体积

我们定义广义矩形的体积(volume)是它的各边的长度的乘积. 这对定义更一般类型的集合的体积是有用的.

定义 对$\mathbb{R}^n$ 中的有界子集 D，假设$f:D\to\mathbb{R}$ 是恒等于 1 且可积的. 则集 D 称为有体积的且它的体积用 vol D 表示，定义为

$$\text{vol } D=\int_D f.$$

495

因为常值函数肯定是连续的，从定理 18.24 得出，$\mathbb{R}^n$ 中的每一个若尔当域 D 有体积. 而且，通过定义 D 的边界∂D 有若尔当容度 0，由引理 18.29 知，∂D 也是有体积的且 vol $\partial D=0$. 从而由积分的可加性公式(18.24)知，集合 $D\cup\partial D$ 也是有体积的，且

$$\text{vol}(D\cup\partial D)=\text{vol } D+\text{vol }\partial D=\text{vol } D. \tag{18.26}$$

体积可加性这一结果后面还会用到，现将其描述如下.

推论 18.31(体积可加性) 假设不相交的 D_1 与 D_2 是$\mathbb{R}^n$ 的若尔当域，则 $D=D_1\cup D_2$ 也是若尔当域且

$$\text{vol}(D\cup\partial D)=\text{vol } D=\text{vol } D_1+\text{vol } D_2.$$

证明 不难看到$\partial D\subseteq\partial D_1\cup\partial D_2$. 由定义知，$\partial D_1$ 与∂D_2 有若尔当容度 0，因此∂D 也有若尔当容度 0. 从而 D 是若尔当域. 这样由积分可加性公式(18.24)及(18.26)得，

$$\text{vol}(D\cup\partial D)=\text{vol } D=\text{vol } D_1+\text{vol } D_2.$$ ■

并非$\mathbb{R}^n$ 中所有有界子集都有体积. 例如，考虑区间[0，1]中的所有有理数集 S 狄利克雷函数是 S 上恒等于的函数到区间[0，1]的零扩张．因为狄利克雷函数是不可积的(例 18.6)，所以集 S 没有体积.

习题

1. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的任一广义矩形和开球是若尔当域.
2. 设 S 是$\mathbb{R}^n$ 的一个在广义矩形 $\boldsymbol{I}$ 中的子集，定义函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & \boldsymbol{x}\in S\\ 0 & \boldsymbol{x}\notin S.\end{cases}$$

证明：如果 S 有若尔当容度 0，则 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的.

3. 对 $\mathbb{R}^n$ 的两个子集 D_1 与 D_2，证明：

$$\partial(D_1\cup D_2)\subseteq\partial D_1\cup\partial D_2.$$

举例说明何时等式成立，何时不等式成立.

4. 证明：两个若尔当域的并是若尔当域.

5. 假定 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是定义在广义矩形上的有界函数，且在 $\boldsymbol{I}$ 的内部上 f 的值为 0. 证明 $\int_{\boldsymbol{I}}f=0$.

496

6. 对一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集 D 上的连续函数，证明：它的任意零扩张的不连续点集包含在 D 的边界中.

7. 设 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形. 由观察知，存在一个不可积的有界函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$，由引理 18.29 得到结论：$\boldsymbol{I}$ 没有若尔当容度 0.

8. 证明：$\mathbb{R}^n$ 的一个子集 S 若它的若尔当容度是 0，则它有空的内部.（提示：由习题 7，S 不能包含一个广义矩形.）

9. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形 $\boldsymbol{I}$，设 A 是 $\boldsymbol{I}$ 的一个若尔当容度为 0 的子集，并假设可积函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 及 $g:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}\setminus A.$$

证明：

$$\int_{\boldsymbol{I}}f=\int_{\boldsymbol{I}}g.$$

10. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的广义矩形 $\boldsymbol{I}$，定义 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是常值 1 的函数，寻找 $\boldsymbol{I}$ 的子集 D，使得它的限制 $f:D\to\mathbb{R}$ 是不可积的.

11. 设 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形，函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的. 用 D 表示 $\boldsymbol{I}$ 的内部. 证明：$f:D\to\mathbb{R}$ 是可积的，且

$$\int_{\boldsymbol{I}}f=\int_{D}f.$$

12. a. 设 S 与 F 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集且 $S\subseteq F$. 如果 F 是闭的，证明 $\partial S\subseteq F$.

    b. 运用(a)及有限个广义矩形的并是闭集这一事实证明：如果 S 有若尔当容度 0，则 ∂S 也有若尔当容度 0.

497

第19章　累次积分与变量替换

至此，我们还没有一般的方法来实际地计算一个多元可积函数的积分. 本章的第一节将给出富比尼定理，它把多元函数的积分计算归约为一元函数的积分计算问题，后者通常是运用微积分第一基本定理. 第二节将讨论多元函数的变量替换用以计算积分. 这是对一元函数的换元法的推广. 经常使用这种方法把复杂的积分计算归约为更为简单的计算，例如，使用富比尼定理.

19.1　富比尼定理

定理 19.1(平面上的富比尼定理)　假设函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的，其中$\boldsymbol{I}=[a,\ b]\times[c,\ d]$是平面$\mathbb{R}^2$中的一个矩形. 对$[a,\ b]$中的每个点$x$，定义函数$F_x:[c,d]\to\mathbb{R}$为$F_x(y)=f(x,\ y)$，其中$y$在$[c,\ d]$中，假设函数$F_x:[c,d]\to\mathbb{R}$是可积的，且定义

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

那么$A:[a,b]\to\mathbb{R}$是可积的，且

$$\int_I f=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.\tag{19.1}$$

证明　证明的关键在于验证由函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$及$A:[a,b]\to\mathbb{R}$的达布和所满足的如下不等式：对$\boldsymbol{I}$的每个划分$\boldsymbol{P}=(P_1,\ P_2)$，

498

$$L(f,\boldsymbol{P})\leqslant L(A,P_1)\leqslant U(A,P_1)\leqslant U(f,\boldsymbol{P}).\tag{19.2}$$

事实上，一旦它被证实了，由于f在$\boldsymbol{I}$上是可积的，根据阿基米德-黎曼定理，我们可选取f在$\boldsymbol{I}$上的划分序列$\{P_k\}$，对每个下标k，令$\boldsymbol{P}_k=(P_k^1,\ P_k^2)$. 由不等式(19.2)知，$\{P_k^1\}$是函数$A$在$[a,\ b]$上的阿基米德序列. 再次利用阿基米德-黎曼定理，我们得出结论：A在$[a,\ b]$上是可积的. 由于对应于划分的阿基米德序列的达布和收敛于积分值，因此从不等式(19.2)知(19.1)成立.

下面验证公式(19.2). 设$\boldsymbol{P}=(P_1,\ P_2)$是$\boldsymbol{I}$的一个划分，其中$P_1=\{x_0,\ \cdots,\ x_m\}$及$P_2=\{y_0,\ \cdots,\ y_\ell\}$分别是$[a,\ b]$与$[c,\ d]$的划分. 对每一对下标$i(1\leqslant i\leqslant m)$，$j(1\leqslant j\leqslant\ell)$，定义

$$M_{ij}=\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\},$$
$$M_i=\sup\{A(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}.$$

然后，由定义知，

$$U(f,\boldsymbol{P})=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^\ell M_{ij}[x_i-x_{i-1}][y_j-y_{j-1}],$$

$$U(A,P_1)=\sum_{i=1}^m M_i[x_i-x_{i-1}].$$

固定介于1和m之间的下标i及区间$[x_{i-1},\ x_i]$中的一点x，则对每个介于1和ℓ之间的下标j，

对$[y_{j-1}, y_j]$中所有的点 y,

$$f(x,y) \leqslant M_{ij}.$$

由定义在区间$[y_{j-1}, y_j]$上的函数的积分的单调性得，

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant M_{ij}[y_j - y_{j-1}].$$

对这个不等式关于$j=1, 2, \cdots, \ell$求和，并利用积分在区间上的可加性，我们得到

499

$$\int_d^c f(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \sum_{j=1}^{\ell} M_{ij}[y_j - y_{j-1}].$$

由于上面这个不等式对$[x_{i-1}, x_i]$中每个点 x 都成立，于是由 m_i 和 M_i 的定义可知，

$$M_i \leqslant \sum_{j=1}^{\ell} M_{ij}[y_j - y_{j-1}].$$

上式乘以 $x_i - x_{i-1}$，并对 $i=1, 2, \cdots, m$ 求和，得到

$$U(A,P_1) \leqslant U(f,\boldsymbol{P}).$$

类似地，可证明

$$L(f,\boldsymbol{P}) \leqslant L(A,P_1).$$ ■

例 19.2 对$\boldsymbol{I}=[1, 2]\times[0, 1]$中的$(x, y)$，定义$f(x, y)=\mathrm{e}^{xy}x$. 因为函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是连续的，从富比尼定理知，累次积分是允许的. 由微积分第一基本定理得，

$$\int_{\boldsymbol{I}} f = \int_1^2\left[\int_0^1 \mathrm{e}^{xy}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_1^2[\mathrm{e}^x - 1]\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1.$$ ■

定理 19.3 对连续函数 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 及 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$，且有如下性质：$h(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a, b]$对这两个函数，定义

$$D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, h(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}.$$

假设函数$f:D\to\mathbb{R}$是连续有界的，则

$$\int_D f = \int_a^b\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{19.3}$$

证明 集合 D 是若尔当域，因为它的边界由四个图形的并组成，而每个图形都是一个定义在有界区间上的连续函数的图形. 选取区间$[c, d]$，使得矩形$\boldsymbol{I}=[a, b]\times[c, d]$包含 D，并设$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是$f:D\to\mathbb{R}$到$\boldsymbol{I}$的零扩张. 由定理 18.24 推得，$\hat{f}:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的. 在 $n=1$，$I=[c, d]$及$J=[h(x), g(x)]$的情况下，运用引理 18.21，我们得

$$A(x) \equiv \int_c^d \hat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in [a,b].$$

现在从平面上的富比尼定理可得出公式(19.3). ■

例 19.4 对 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$，定义$f:D\to\mathbb{R}$是常值函数，其值是 1. 那么

500

$$D = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\},$$

由定理 19.3 知，

$$\int_D f = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1-x^2}\right]\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$ ■

当函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 不连续时，在验证公式(19.1)时需加小心. 正如下面例子所表明的，有可能公式(19.1)的右边积分是完全确定的，而函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 却是不可积的.

例 19.5 定义函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{I}=[0,1]\times[0,1]$，由

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 为有理数} \\ 2y & \text{若 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

对 $[0,1]$ 中的每个点 x，$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$，所以

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = 1.$$

但是不难看出函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是不可积的(见习题 8). ■

公式(19.1)中变量 x 和 y 有特别的次序. 事实上，有另一个对应的公式，它的求积次序恰是反过来的. 对可积函数 f: $[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$，对 $[c,d]$ 中的每个点 y，定义函数 F_y: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 为 $F_y(x)=f(x,y)$，其中 x 在 $[a,b]$ 中. 假设 F_y: $[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可积的，且定义

$$B(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

那么函数 $B:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是可积的，且

$$\int_I f = \int_c^d B(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{19.4}$$

这个公式的证明与定理 19.1 的证明完全相同，除了要求用

$$\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{m} M_{ij}[x_i - x_{i-1}][y_j - y_{j-1}]$$

代替

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\ell} M_{ij}[y_j - y_{j-1}][x_i - x_{i-1}].$$

501

推论 19.6 假设函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是可积的，其中 $\boldsymbol{I}=[a,b]\times[c,d]$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形，则公式

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{19.5}$$

成立，只要它的每一端的积分是确定的. 特别地，如果这个函数 $f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$ 是连续的，则这个公式成立.

证明 定理 19.1 断言

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_I f,$$

只要左边的积分是确定的. 正如上面所讨论的，另一个对称的论证表明

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_I f,$$

只要左端的积分是确定的. 这样, (19.5)的每一端都等于 $\int_I f$, 只要它们是确定的. ■

累次积分公式(19.1)可以推广到欧几里得空间$\mathbb{R}^m$($m\geqslant 2$)中的广义矩形上的函数积分. 而且, 一旦引进恰当的记号, 这一般结果的证明与$\mathbb{R}^2$中的证明完全一致. 事实上, 记 $m=n+k$, 其中 m 和 k 是自然数. 如同前面所做的, 我们记$\mathbb{R}^{n+k}$中的点 $\boldsymbol{u}$ 为

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \text{ 及 } \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^k.$$

进而, $\mathbb{R}^{n+k}$中的一个广义矩形 $\boldsymbol{I}=I_1\times\cdots\times I_n\times I_{n+1}\times\cdots\times I_{n+k}$可表示为笛卡儿积

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_x\times\boldsymbol{I}_y,$$

其中 $\boldsymbol{I}_x=I_1\times\cdots\times I_n$, $\boldsymbol{I}_y=I_{n+1}\times\cdots\times I_{n+k}$.

502 把平面上的富比尼定理的证明直接推广给出下述定理的证明.

定理 19.7(富比尼定理) 假设函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$是可积的, 其中$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_x\times\boldsymbol{I}_y$是$\mathbb{R}^{n+k}$中的一个广义矩形. 对$\boldsymbol{I}_x$中的每一点$\boldsymbol{x}$, 定义函数$F_x:\boldsymbol{I}_y\to\mathbb{R}$为

$$F_x(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{I}_y,$$

假设函数 F_x: $\boldsymbol{I}_y\to\mathbb{R}$ 是可积的, 且定义

$$A(\boldsymbol{x})=\int_{\boldsymbol{I}_y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

那么函数 A: $\boldsymbol{I}_x\to\mathbb{R}$ 是可积的, 且

$$\int_{\boldsymbol{I}}f=\int_{\boldsymbol{I}_x}A(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\boldsymbol{I}_x}\Big[\int_{\boldsymbol{I}_y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{19.6}$$

下面定理的证明同定理 19.3 的证明完全一样.

定理 19.8 对$\mathbb{R}^n$中的若尔当域K, 设$h:K\to\mathbb{R}$及$g:K\to\mathbb{R}$是有界连续函数且$h(\boldsymbol{x})\leqslant g(\boldsymbol{x})$对$K$中所有的点$\boldsymbol{x}$成立. 定义

$$D=\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \boldsymbol{x}\in K,h(\boldsymbol{x})\leqslant y\leqslant g(\boldsymbol{x})\}.$$

假设函数$f:D\to\mathbb{R}$是连续且有界的, 则

$$\int_D f=\int_K\Big[\int_{h(\boldsymbol{x})}^{g(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x},y)\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{19.7}$$

在求一元函数积分值的计算中, 采用包括莱布尼茨符号的记号通常是有用的. 对于多元函数, 这也是有用的. 对定义在广义矩形$\boldsymbol{I}=[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$上的可积函数$f:\boldsymbol{I}\to\mathbb{R}$, 积分值通常表示为

$$\int_{\boldsymbol{I}}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

或

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1.$$

对 $n=2$ 或 $n=3$, 我们用记号

503

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad \text{及} \quad \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

在$\mathbb{R}^3$这一情形里, $\boldsymbol{I}=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$, 上面的累次积分公式(19.6)变成

$$\int_I f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dxdy\right]dz. \tag{19.8}$$

此外，如果在上面的内层积分中运用二元累次积公式，则得

$$\int_I f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left\{\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right\}dy\right]dz. \tag{19.9}$$

我们要强调的是，要使上面那些公式都是正确的，必须确保两端的积分都是完全确定的.

习题

1. 计算

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \sin^2 x \sin^2 y\,dxdy.$$

2. 对下面的三个函数，计算 $\iint_I f$, 其中 $I=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$.

   a. $f(x,\ y)=\begin{cases}1-x-y & \text{若 } x+y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

   b. $f(x,\ y)=\begin{cases}x^2+y^2 & \text{若 } x^2+y^2\leqslant 1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

   c. $f(x,\ y)=\begin{cases}x+y & \text{若 } x^2\leqslant y\leqslant 2x^2\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

3. 证明：

$$\int_0^3\left[\int_1^{\sqrt{4-y}}(x+y)\,dx\right]dy = \int_1^2\left[\int_0^{4-x^2}(x+y)\,dy\right]dx = \frac{241}{60}.$$

4. 对一个连续函数 f: $[a,\ b]\times[a,\ b]\to\mathbb{R}$，证明：狄利克雷公式

$$\int_a^b\left[\int_a^x f(x,y)\,dy\right]dx = \int_a^b\left[\int_y^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

5. 假设函数 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，证明：对每一个 $x\geqslant 0$,

$$\int_0^x\left[\int_0^t \phi(s)\,ds\right]dt = \int_0^x (x-s)\phi(s)\,ds.$$

6. 假设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，证明：

$$2\int_a^b\left[f(x)\int_x^b f(y)\,dy\right]dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2.$$

7. 仿照定理 19.3 的证明给出定理 19.8 的证明.

8. 证明：例 19.5 中所定义的函数 f: $[0,\ 1]\times[0,\ 1]\to\mathbb{R}$ 是不可积的.

9. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的一个若尔当域 K, 设 $h:K\to\mathbb{R}$ 及 $g:K\to\mathbb{R}$ 是连续有界函数且 $h(\mathbf{x})\leqslant g(\mathbf{x})$ 对 K 中所有的点 $\mathbf{x}$ 成立. 定义

$$D = \{(\mathbf{x},y)\mid \mathbf{x}\in K, h(\mathbf{x})\leqslant y\leqslant g(\mathbf{x})\}.$$

   证明：D 也是若尔当域.

10. 仿照定理 19.1 的证明给出公式(19.4)的证明.

504

19.2 变量替换定理的陈述和例子

对一元函数积分的变量替换定理在 7.2 节已考虑了. 本节将把这个定理推广到多元函数上. 为方便起见，首先叙述一般的变量替换定理. 然后我们将考虑几个重要的特殊情况，其中包括平面 $\mathbb{R}^2$ 中用极坐标描述的区域，以及 $\mathbb{R}^3$ 中由球面坐标描述的区域. 我们把变量替换定理

的证明推迟到下一节.

在 7.2 节，我们证明了用变量替换方法求积分的一个结果，由它推出：假设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$中的开子集，它包含有界闭区间 $I=[a,b]$，并设 $\psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数且对$\mathcal{O}$中所有的 x 有 $\psi'(x)\neq 0$. 那么对任意连续函数 $f:\psi(I)\to\mathbb{R}$，有

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\psi(u))\psi'(u)\,du.$$

当对 I 中所有的 u 有 $\psi'(u)>0$ 时，$\psi(I)=[\psi(a),\psi(b)]$；当对 I 中所有的 u 有$\psi'(u)<0$ 时，$\psi(I)=[\psi(b),\psi(a)]$. 因此上述公式写成如下的等价形式：

$$\int_{\psi(I)} f(x)\,dx = \int_I f(\psi(u))\,|\,\psi'(u)\,|\,du. \tag{19.10}$$

这种形式的替换公式将要推广到多元函数上.

定义 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$中的一个开子集，一个连续可微的映射 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 称为光滑的变量替换，如果下面两个性质成立：

(i) 映射 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是一对一的.

505 (ii) 对$\mathcal{O}$中的每一点 $\mathbf{x}$，导数矩阵 $\mathbf{D}\Psi(\mathbf{x})$ 是可逆的.

定理 19.9（变量替换定理） 假设映射 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$中的开子集$\mathcal{O}$上的光滑的变量替换. 设 D 是开的若尔当域，使得 $K=D\cup\partial D$ 包含在$\mathcal{O}$内. 那么 $\Psi(K)$ 是一个若尔当域且有如下性质：对任意连续函数 $f:\Psi(K)\to\mathbb{R}$，积分变换公式

$$\int_{\Psi(k)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_K f(\Psi(\mathbf{u}))\,|\,\det\mathbf{D}\Psi(\mathbf{u})\,|\,d\mathbf{u} \tag{19.11}$$

成立.

极坐标

对平面$\mathbb{R}^2$中的每一点 $\mathbf{u}=(x,y)\neq(0,0)$，如果定义 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则在区间$[0,2\pi)$中存在唯一一个数 θ，使得

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

数对(r,θ)称为点 $\mathbf{u}$ 的极坐标(polar coordinates)选择，如图 19.1 所示.

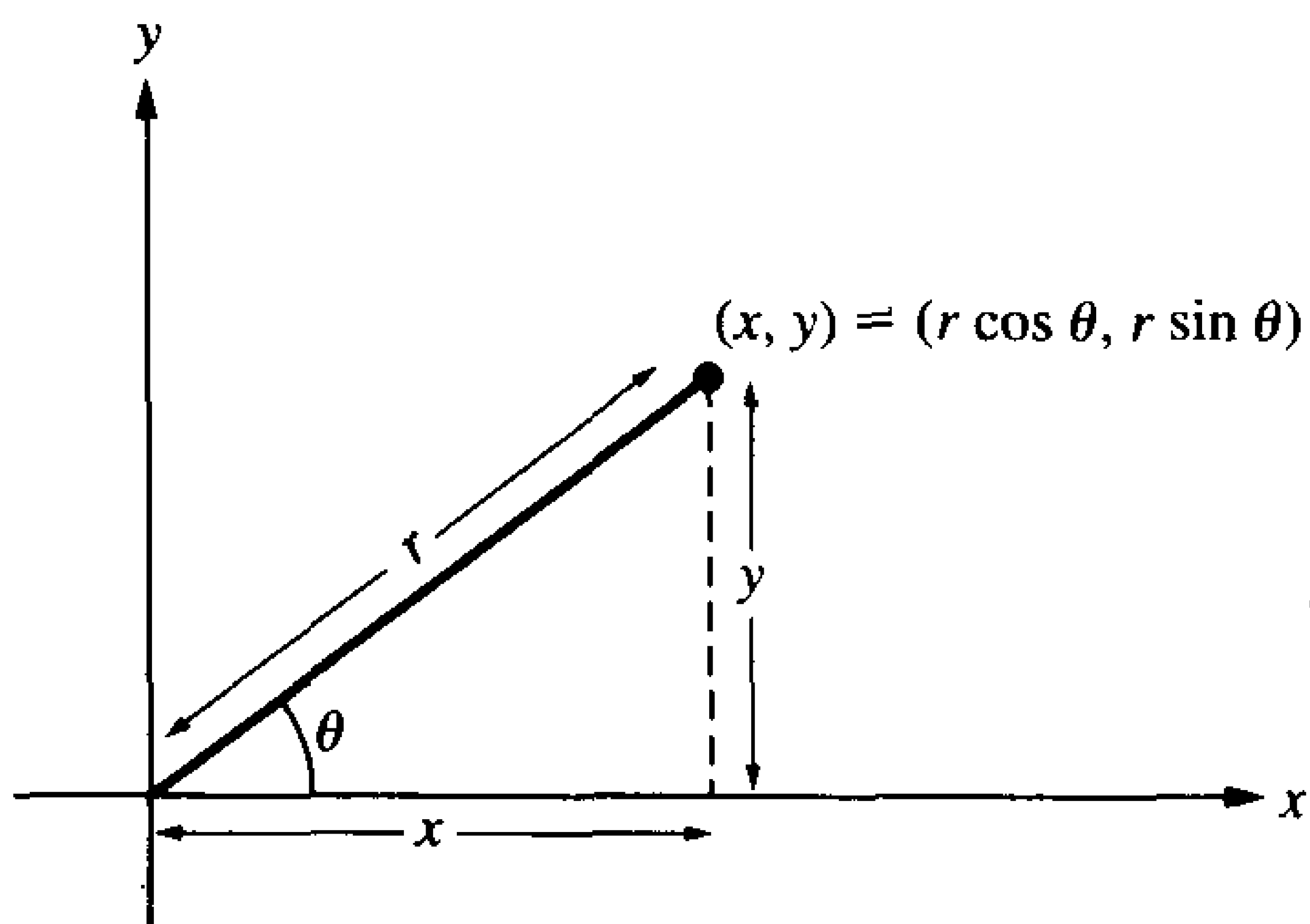


图 19.1 极坐标

定义$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^2$的子集，由满足$r>0$及$0<\theta<2\pi$的(r,θ)所组成，并定义映射$\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$为

$$\Psi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta),\quad (r,\theta)\in\mathcal{O}.$$

显然，映射$\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$是连续可微的且是一对一的．同样，对$\mathcal{O}$中的每一点$(r,\theta)$，

$$\det \boldsymbol{D}\Psi(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r\neq 0,$$

所以导数矩阵$\boldsymbol{D}\Psi(r,\theta)$是可逆的．这样，映射$\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$是光滑的变量替换．对$0<r_1<r_2$，及$0<\theta_1<\theta_2<2\pi$，定义$K=[r_1, r_2]\times[\theta_1,\theta_2]$．假设$f:\Psi(K)\to\mathbb{R}$是连续的．由公式(19.11)及富比尼定理直接可得，

506

$$\begin{aligned}\int_{\Psi(K)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_K[f(r\cos\theta,r\sin\theta)r]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{r_1}^{r_2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{19.12}$$

我们注意到在极坐标系中的原点无邻域存在使之提供光滑的变量替换．然而，运用逼近法论证，可以把极坐标中的变量替换公式(19.12)推广到若尔当域K上，K与$\mathcal{O}$的边界相交．例如，对上述区域K，假设我们允许可能有$r_1=0$，$\theta_1=0$或$\theta_2=2\pi$．对$0<\varepsilon<\min\{r_2,[\theta_2-\theta_1]/2\}$，定义

$$K_\varepsilon=\{(r,\theta)\mid \varepsilon\leqslant r\leqslant r_2,\theta_1+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\theta_2-\varepsilon\}.$$

这样，当公式(19.12)应用于K_ε时是成立的．现在我们选取一个数M，使得$|f(x,y)|\leqslant M$，对$\Psi(K)$中的所有(x,y)成立．然后，由积分对区域的可加性和公式(19.12)对K_ε成立，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Psi(K)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_K[f(r\cos\theta,r\sin\theta)r]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right|\\=&\left|\int_{\Psi(K\setminus K_\varepsilon)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{K\setminus K_\varepsilon}[f(r\cos\theta,r\sin\theta)r]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right|\\\leqslant& M\mathrm{vol}\Psi(K\setminus K_\varepsilon)+Mr_2\mathrm{vol}(K\setminus K_\varepsilon).\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{vol}\Psi(K\setminus K_\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{vol}(K\setminus K_\varepsilon)=0,\tag{19.13}$$

于是，我们看到公式(19.12)在极限情况下也是成立的．

例 19.10 定义$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1,\ x\geqslant0,\ y\geqslant0\}$，用公式(19.12)计算

$$\int_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

事实上，$D=\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，所以由公式(19.12)得，

$$\int_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1\mathrm{e}^{r^2}r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}-1).$$ ■

球面坐标

现在我们来研究三维空间中的一个有用的变量替换公式．对$\mathbb{R}^3$中每个点$\boldsymbol{u}=(x,y,z)$，

且它不位于 z 轴上，定义 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 不难看到在区间 $[0, 2\pi)$ 中有唯一的数 θ，及区间 $(0, \pi)$ 中的数 ϕ，使得

507

$$u = (x,y,z) = (\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi).$$

三重数组 (ρ, ϕ, θ) 称为是点 $\boldsymbol{u}$ 选取的球面坐标(spherical coordinates)，如图 19.2 所示. 定义 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的开子集，它由 $\rho>0$，$0<\phi<\pi$，及 $0<\theta<2\pi$ 的点 (ρ, ϕ, θ) 组成，且定义 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$ 为

$$\Psi(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi),(\rho,\phi,\theta) \in \mathcal{O}.$$

显然，映射 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$ 是连续可微且一对一的. 而且对 $\mathcal{O}$ 中的每一点 (ρ, ϕ, θ)，导数矩阵为

$$\boldsymbol{D\Psi}(\rho,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{bmatrix}.$$

所以有

$$\det\boldsymbol{D\Psi}(\rho,\phi,\theta) = \rho^2\sin\phi \neq 0.$$

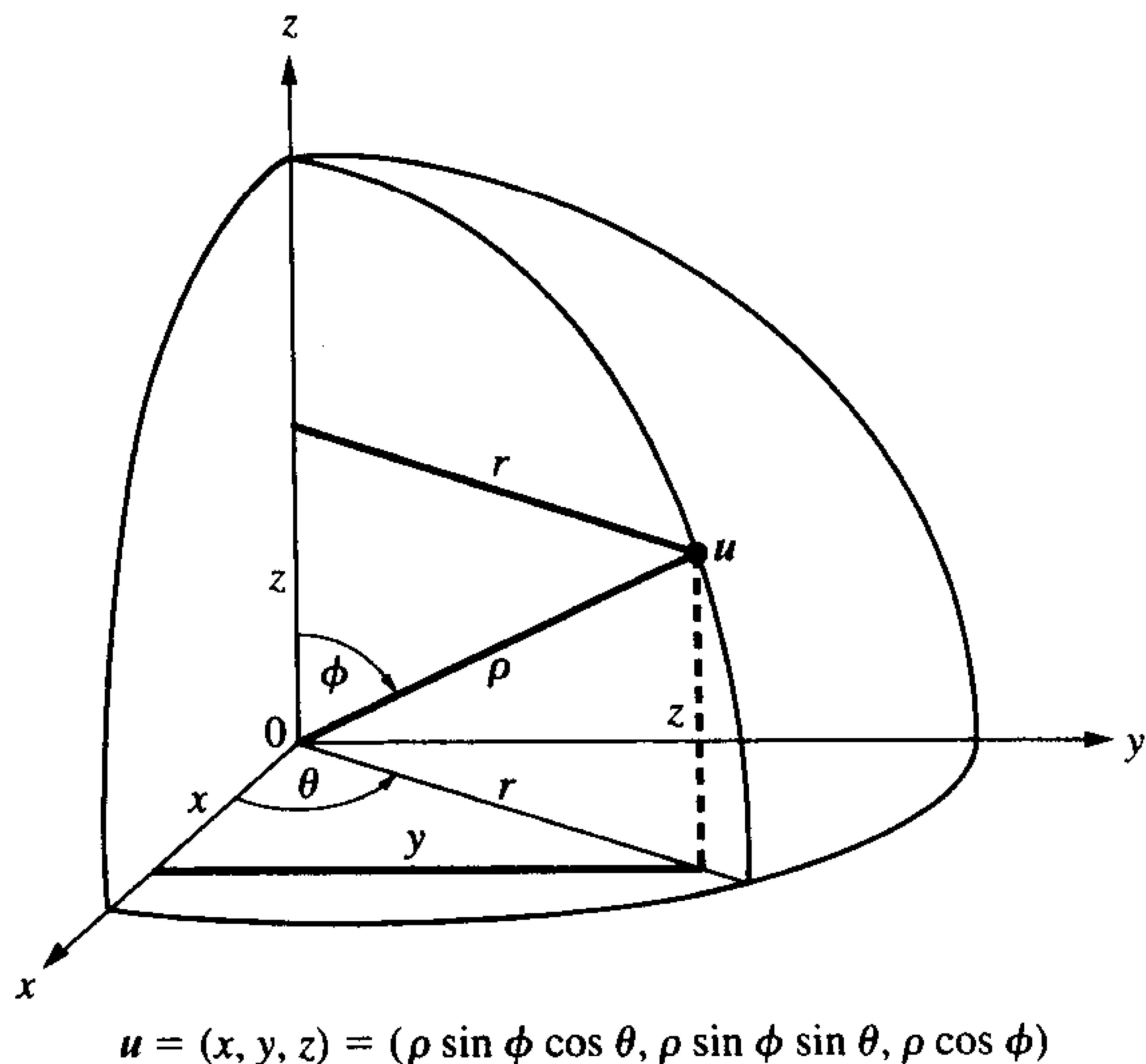
这样，导数矩阵 $\boldsymbol{D\Psi}(\rho, \phi, \theta)$ 是可逆的，因此 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$ 是光滑的变量替换. 对 $0<\rho_1<\rho_2$，$0<\phi_1<\phi_2<\pi$ 及 $0<\theta_1<\theta_2<2\pi$，定义

$$K = [\rho_1,\rho_2] \times [\phi_1,\phi_2] \times [\theta_1,\theta_2].$$

假设函数 $f:\Psi(K)\to\mathbb{R}$ 是连续的，则由积分变换公式(19.11)及富比尼定理得，

$$\int_{\Psi(K)} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_K [f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi]\,d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_{\phi_1}^{\phi_2}\left\{\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\right\}d\phi\right]d\theta. \quad (19.14)$$



$u=(x, y, z)=(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$

图 19.2 球面坐标

对于任意与$\mathcal{O}$的边界相交的域，球面坐标并不一定确定一个光滑的变量替换. 然而类似于用于极坐标的逼近论证，公式(19.14)可以推广到允许域K与$\mathcal{O}$的边界相交.

例 19.11 对$a>0$，求$\mathbb{R}^3$中半径为a的球的体积⊖，

$$B_a=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}.$$

事实上，由公式(19.14)得，

$$\mathrm{vol}B_a=\int_{B_a}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left\{\int_0^a\rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\right\}\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi a^3.$$ ■

例 19.12 对正数a及b，考虑椭圆

$$D=\{(x,y)\mid x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1\}.$$

对$\mathbb{R}^2$中所有的点(u,v)，定义$\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为$\Psi(u,v)=(au,bv)$. 则$\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是可逆的线性映射，所以它是光滑的变量替换. 由$\Psi$的变量替换公式及极坐标公式，可以看到对任意连续函数$f:D\to\mathbb{R}$，有

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\int_{u^2+v^2\leqslant 1}f(au,bv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=ab\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 f(ar\cos\theta,br\sin\theta)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta.$$ ■

508～509

习题

1. 计算

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 计算

$$\iiint_V|xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1\}$.

3. 在$\mathbb{R}^3$中求以xy平面及抛物面$z=2-x^2-y^2$为界的若尔当域的体积.
4. 证明：$\mathbb{R}^3$中的以柱面$x^2+y^2=a^2$及$x^2+z^2=a^2$为界的若尔当域的体积等于$16a^3/3$.
5. 对$r>0$及$h>0$，证明：锥体$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\leqslant r^2,\ 0\leqslant z\leqslant h/r^2(r^2-x^2-y^2)\}$的体积等于$\frac{1}{3}\pi r^2h$.
6. 假设$\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的开子集$\mathcal{O}$上的光滑变量替换. 运用反函数定理证明：逆映射$\Psi^{-1}:\Psi(\mathcal{O})\to\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的开子集$\Psi(\mathcal{O})$上的光滑变量替换.
7. (双曲坐标)定义$\mathcal{U}=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$及对$\mathcal{U}$中的$(x,y)$定义$\Phi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$为$\Phi(x,y)=(x^2-y^2,xy)$. 证明：$\Phi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$是光滑变量替换. 对$\mathcal{U}$中的点$(x,y)$，数对$(x^2-y^2,xy)=\Phi(x,y)$称为$(x,y)$的双曲坐标(hyperbolic coordinates).
8. 定义$D=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0,\ 1\leqslant x^2-y^2\leqslant 9,\ 2\leqslant xy\leqslant 4\}$. 对连续函数$f:D\to\mathbb{R}$，用习题7中的双曲坐标证明：

$$\int_D[x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8.$$

9. 求一个常数C，使得对每一个$\varepsilon>0$，

⊖ 阿基米德发现了球的体积公式，他对此感到骄傲，因而把这一公式铭刻在他的墓碑上.

$$|\operatorname{vol}\Psi(K\setminus K_\varepsilon)+\operatorname{vol}(K\setminus K_\varepsilon)|\leqslant C\varepsilon.$$

并以此证实极限式(19.13).

19.3 变量替换定理的证明

现在我们来讨论变量替换定理的证明. 为证明此定理，必须精确地比较体积 $\Psi(\boldsymbol{J})$ 及 $\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{J})$[⊖]，这里 $\boldsymbol{J}$ 是含有 $\boldsymbol{x}$ 且位于 $\mathcal{O}$ 内的有小的直径的广义矩形. 下面的结果是体积精确比较的结果，它是变量替换定理的证明所依赖的.

510

定理 19.13(体积比较定理)　*假设映射 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 $\mathcal{O}$ 上的光滑的变量替换. 设 K 是 $\mathcal{O}$ 的有界闭子集，ε 是正数. 则存在一个正数 δ，使得如果 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的直径小于 δ 的任意广义矩形，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $K\cap\boldsymbol{J}$ 中的点，则 $\boldsymbol{J}$ 包含在 $\mathcal{O}$ 中且*

$$\operatorname{vol}\Psi(\boldsymbol{J})=|\det\boldsymbol{D}\Psi(x)|\operatorname{vol}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\operatorname{vol}\boldsymbol{J},\tag{19.15}$$

其中 $|\boldsymbol{E}|<\varepsilon$.

这个定理的证明是相当有技巧的，它依赖于行列式的性质，这一性质在本书中不予证明. 这样，我们只描述两个基本思想，它们是这个定理的基础，并给出极坐标与球面坐标的体积比较定理的完全初等的证明.

(i)对一个可逆的线性变换 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，可以表示为 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\mathbb{R}^n$ 中的一个广义矩形 $\boldsymbol{J}$，体积 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{J})$ 是由下式给出：

$$\operatorname{vol}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{J})=|\det\boldsymbol{A}|\operatorname{vol}\boldsymbol{J}.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中的这个公式由附录 B 中的讨论得出. 这个附录是专论线性代数的，讨论体积、行列式以及叉积之间的关系. 这种一般情形的公式可以从行列式的乘积性质以及一个允许把一般线性映射写成非常初等的线性映射的复合的结果得出. 从上面的线性映射的体积变换公式得出，对 $\mathcal{O}$ 中的一点 $\boldsymbol{x}$ 及一个广义矩形 $\boldsymbol{J}$，

$$\operatorname{vol}\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{J})=|\det\boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{x})|\operatorname{vol}\boldsymbol{J}.\tag{19.16}$$

(ii)回忆第 13 章我们证明了一阶逼近定理，得出：若 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是光滑的变量替换，则对 $\mathcal{O}$ 中的每个点 $\boldsymbol{x}$，

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{\|\Psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-[\Psi(\boldsymbol{x})+\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})]\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0.$$

一阶逼近定理给出在 $\mathcal{O}$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域中，映射 Ψ 可由在 $\boldsymbol{x}$ 点处的导数来逼近. 简单地说来，基于映射 Ψ 的连续性，不难看到当 $\operatorname{diam}\boldsymbol{J}$ 很小时，$\operatorname{vol}\Psi(\boldsymbol{J})$ 也很小，所以差

$$\operatorname{vol}\Psi(\boldsymbol{J})-|\det\boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{x})|\operatorname{vol}\boldsymbol{J}$$

511

也很小. 一阶逼近定理及公式(19.16)给出一个更强的结果：即使上述差除以 $\operatorname{vol}\boldsymbol{J}$，结果

$$\frac{\operatorname{vol}\Psi(\boldsymbol{J})}{\operatorname{vol}\boldsymbol{J}}-|\det\boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{x})|\tag{19.17}$$

仍很小，如果含有 $\boldsymbol{x}$ 的广义矩形 $\boldsymbol{J}$ 的直径很小. 体积比较定理正是这一个结果成立的精确

⊖ 回忆 $\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射，它称为 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的导数. 由公式 $\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}$，它是相应于导数矩阵 $\boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{x})$ 的线性映射.

断言.

在极坐标和球面坐标时，通过引进坐标变换，我们可以明确地计算出广义矩形上的图形的体积.

命题 19.14(极坐标下面积的变化) 对 $0\leqslant r_1<r_2$ 及 $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$，设 $\boldsymbol{J}=[r_1, r_2]\times[\theta_1, \theta_2]$，并对 $\boldsymbol{J}$ 中的 (r, θ)，定义 $\Psi(r, \theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，则

$$\text{area}\Psi(\boldsymbol{J}) = \frac{1}{2}[r_2^2-r_1^2][\theta_2-\theta_1] = \frac{[r_1+r_2]}{2}(\text{area}J). \tag{19.18}$$

在极坐标下面积的变化如图 19.3 所示.

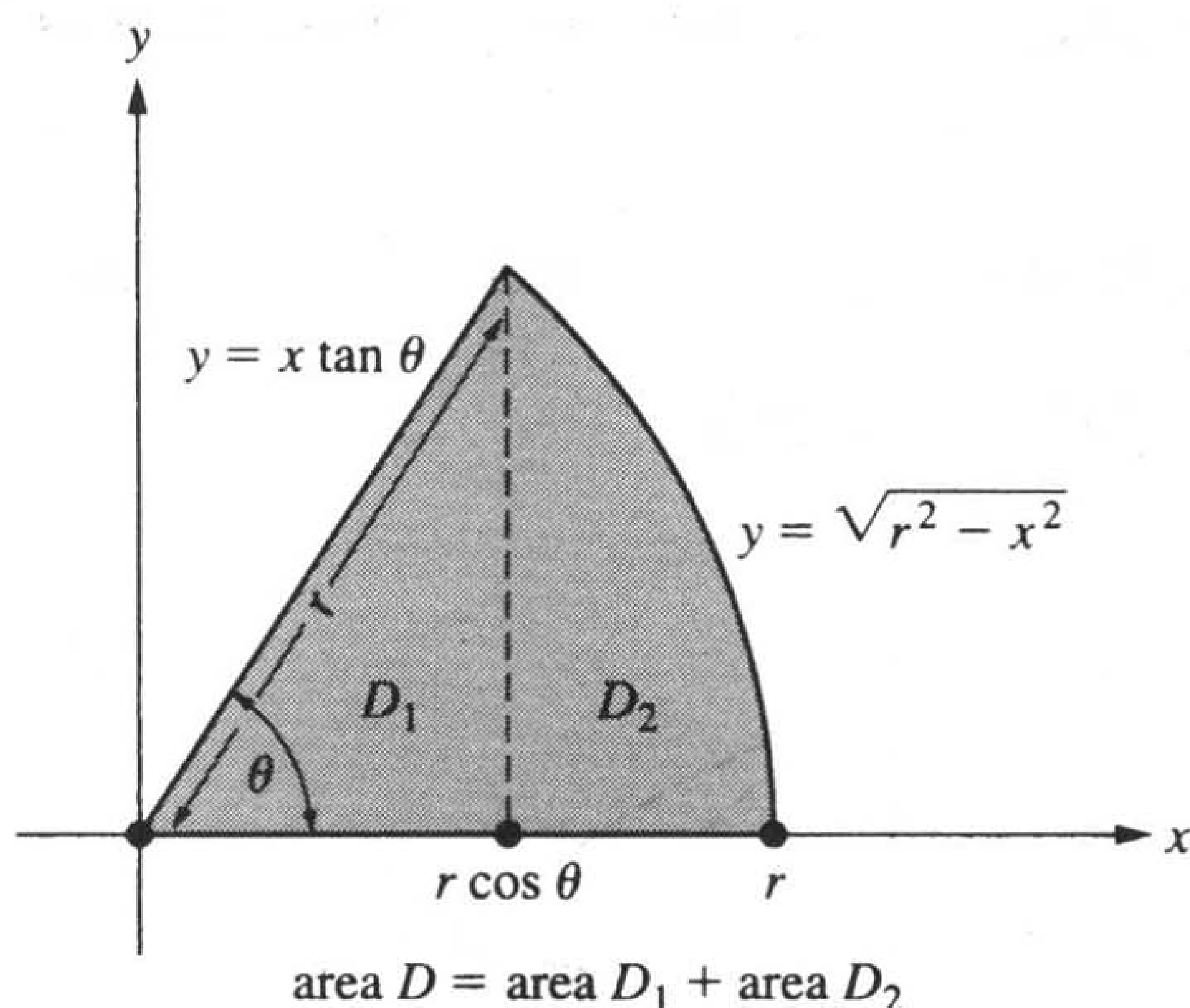


图 19.3 在极坐标下面积的变化

证明 由推论 18.30 中断言的体积的可加性知，只需证明在 $r_1=0$，$\theta_1=0$ 及 $0\leqslant\theta_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 这一情况下公式(19.18)成立. 定义 $r=r_2$，$\theta=\theta_2$，必需证明

$$\text{area}D = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

观察到 D 是两个集合 $D_1=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant r\cos\theta, 0\leqslant y\leqslant x\tan\theta\}$ 和 $D_2=\{(x, y)\mid r\cos\theta\leqslant x\leqslant r, 0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}\}$ 的并. 从而由平面上的富比尼定理(定理 19.3)及面积的可加性，我们有 [512]

$$\begin{aligned}\text{area}D &= \text{area}D_1+\text{area}D_2\\ &= \int_0^{r\cos\theta}\tan\theta\, x\text{d}x+\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\text{d}x\\ &= \frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta+\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\text{d}x.\end{aligned}$$

对后一积分用变量替换，$x=r\cos t$ $(0\leqslant t\leqslant\theta)$，由一元换元公式得

$$\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\text{d}x = r^2\int_0^\theta\sin^2 t\text{d}t = r^2\int_0^\theta\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right]\text{d}t = r^2\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\theta}.$$

这样，

$$\text{area}D = \frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta+r^2\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right] = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

■

由极坐标的面积变换的公式，我们立即得到在极坐标情况下的体积比较定理. 事实上，对 $\boldsymbol{J}$ 及 $\boldsymbol{J}$ 内的任意点$(r,\ \theta)$，从公式(19.18)得

$$\operatorname{area}\Psi(\boldsymbol{J}) = r\operatorname{area}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{E}\operatorname{area}\boldsymbol{J},$$

其中 $\boldsymbol{E}=\dfrac{r_1+r_2}{2}-r$. 显然，$|\boldsymbol{E}|<\operatorname{diam}\boldsymbol{J}$，所以在极坐标的体积比较定理的阵述中，我们可以设 $\delta=\varepsilon$.

命题 19.15(球面坐标下的体积变化) 对 $0\leqslant\rho_1<\rho_2$，$0\leqslant\phi_1<\phi_2\leqslant\pi$，及 $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$. 设 $\boldsymbol{J}=[\rho_1,\ \rho_2]\times[\phi_1,\ \phi_2]\times[\theta_1,\ \theta_2]$，并对 $\boldsymbol{J}$ 中的$(\rho,\ \phi,\ \theta)$，定义

$$\Psi(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi).$$

则

513

$$\operatorname{vol}\Psi(\boldsymbol{J}) = \frac{1}{3}[\rho_2^3-\rho_1^3][\cos\phi_1-\cos\phi_2][\theta_2-\theta_1]. \qquad (19.19)$$

在球面坐标下体积的变化如图 19.4 所示.

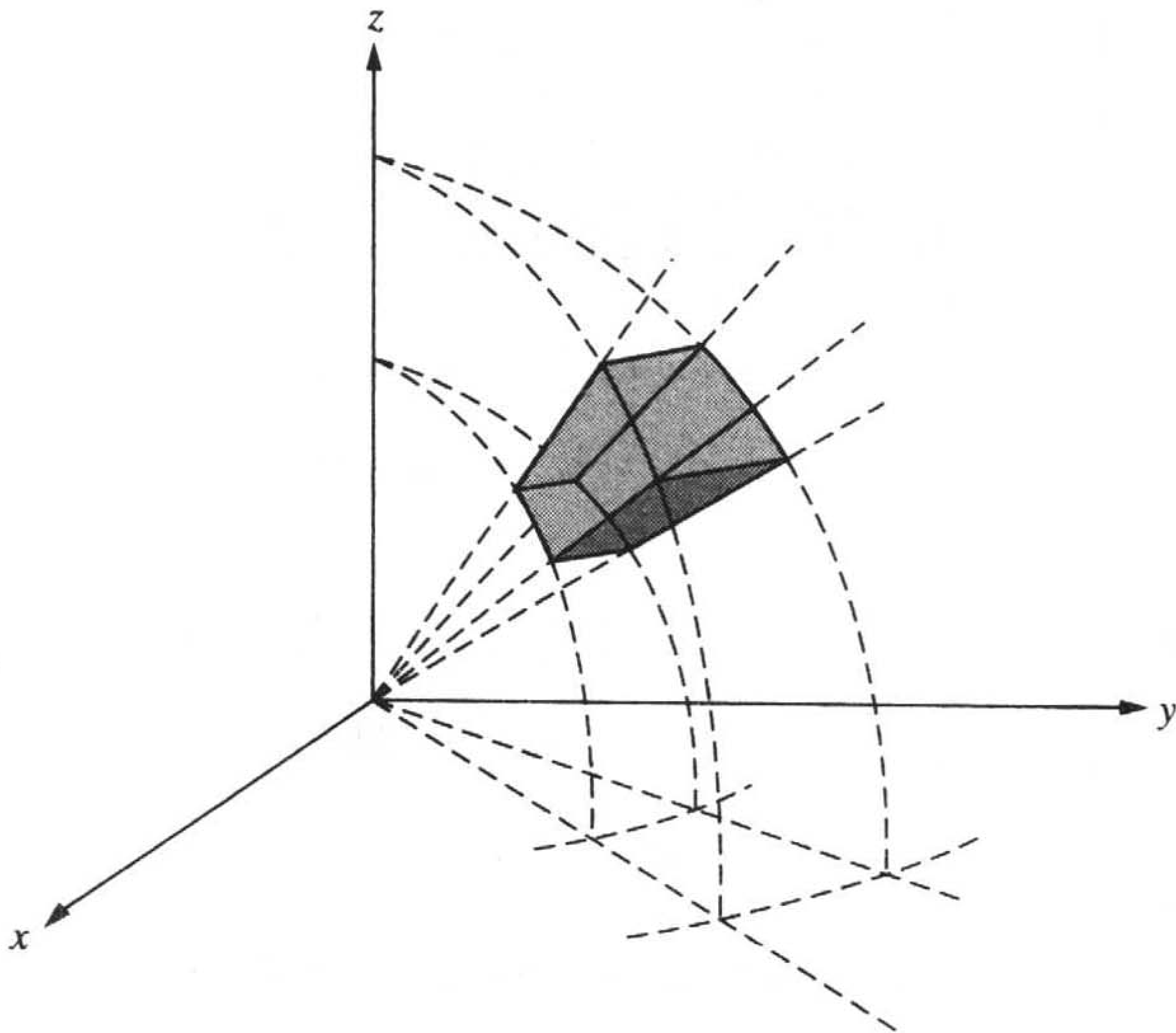


图 19.4 在球面坐标下体积的变化

证明 由推论 18.30 中断言的体积的可加性知，只需在 $\rho_1=0$，$0=\phi_1<\phi_2\leqslant\dfrac{\pi}{2}$及 $\theta_1=0$ 这一情况下证明公式(19.19)成立，即证明

$$\operatorname{vol}\Psi(\boldsymbol{J}) = \frac{1}{3}\rho_2^3[1-\cos\phi_2]\theta_2.$$

但是观察到 $\Psi(\boldsymbol{J})=\{(x,\ y,\ z)\mid(x,\ y)\in D,\ g(x,\ y)\leqslant z\leqslant h(x,\ y)\}$，其中 $D=\{(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\ 0\leqslant r\leqslant\rho_2\sin\phi_2\}$，且对 D 中的$(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，

$$h(x,y) = \sqrt{\rho_2^2-r^2} \text{ 及 } g(x,y) = \frac{r}{\tan\phi_2}.$$

运用累次积分公式(19.7)及平面$\mathbb{R}^2$ 中的(直角坐标到极坐标的)变量替换公式，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\Psi(\boldsymbol{J}) &= \int_D [h(x,y) - g(x,y)]\,dxdy \\ &= \int_0^{\theta_2}\int_0^{\rho_2\sin\phi_2}\left[\sqrt{\rho_2^2 - r^2} - \frac{r}{\tan\phi_2}\right] r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\theta_2}\left\{\int_0^{\rho_2\sin\phi_2}\left[\sqrt{\rho_2^2 - r^2} - \frac{r}{\tan\phi_2}\right] r\,dr\right\}d\theta.\end{aligned}$$

514

然而，由微积分的第一基本定理得，

$$\begin{aligned}\int_0^{\rho_2\sin\phi_2}\left[\sqrt{\rho_2^2 - r^2} - \frac{r}{\tan\phi_2}\right] r\,dr &= \left\{-\frac{1}{3}(\rho_2^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\frac{1}{\tan\phi_2}\right\}\Bigg|_{r=0}^{r=\rho_2\sin\phi_2} \\ &= \frac{\rho_2^3}{3}\left\{-\cos^3\phi_2 - \frac{\sin^3\phi_2}{\tan\phi_2} + 1\right\} \\ &= \frac{\rho_2^3}{3}[1 - \cos\phi_2].\end{aligned}$$

这样，

$$\mathrm{vol}\Psi(\boldsymbol{J}) = \int_0^{\theta_2}\left\{\int_0^{\rho_2\sin\phi_2}\left[\sqrt{\rho_2^2 - r^2} - \frac{r}{\tan\phi_2}\right] r\,dr\right\}d\theta = \frac{\rho_2^3}{3}[1 - \cos\phi_2]\theta_2. \qquad \blacksquare$$

公式(19.19)蕴涵了球面坐标下的体积比较定理. 事实上，运用中值定理两次，我们可在区间(ρ_1, ρ_2)及区间(ϕ_1, ϕ_2)中分别选取ρ'及ϕ'，使得

$$\frac{1}{3}[\rho_2^3 - \rho_1^3][\cos\phi_1 - \cos\phi_2][\theta_2 - \theta_1] = [\rho']^2[\sin\phi'][\rho_2 - \rho_1][\phi_2 - \phi_1][\theta_2 - \theta_1].$$

从而，对$\boldsymbol{J}$中的点(ρ, ϕ, θ)，我们有

$$\mathrm{vol}\Psi(\boldsymbol{J}) = [\rho^2\sin\phi]\mathrm{vol}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{E}\mathrm{vol}\boldsymbol{J},$$

其中$\boldsymbol{E} = \{[\rho']^2\sin\phi' - \rho^2\sin\phi\}$. 因为$\det\boldsymbol{D}\Psi(\rho, \phi, \theta) = \rho^2\sin\phi$，函数$\det\boldsymbol{D}\Psi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$在$\mathbb{R}^3$的有界闭子集$K$上是一致连续的，对$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得若$\mathrm{diam}\boldsymbol{J} < \delta$且$\boldsymbol{J}$包含在$K$内，则$|\boldsymbol{E}| < \varepsilon$.

至此，我们已对极坐标与球面坐标建立了体积比较定理. 我们将不给出一般定理的证明，而在一般定理为成立的假定下，对变量替换定理给予证明.

变量替换定理(定理 19.9)的证明 因为K是有界闭的(见习题4)且函数$\det\boldsymbol{D}\Psi:K \to \mathbb{R}$及$f\circ\Psi:K \to \mathbb{R}$是连续的. 从极值定理(定理 11.22)知，存在一数$M > 0$，使得对K中所有的点$\boldsymbol{x}$有

$$|f(\Psi(\boldsymbol{x}))| \leqslant M \quad 及 \quad |\det\boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{x})| \leqslant M. \tag{19.20}$$

固定$\boldsymbol{I}$是包含K的一个广义矩形. 设$\varepsilon > 0$.

反函数定理蕴涵着$\Psi(D)$是$\mathbb{R}^n$的一个开子集及$\Psi(D)$的边界等于$\Psi(\partial D)$(见习题9). 由假设D是若尔当域知，集∂D有若尔当容度0(见习题6). 运用体积比较定理得，$\Psi(\partial D)$也有若尔当容度0. 从而，$\Psi(K)$是若尔当域. 同样，对$\mathcal{O}$中的任一广义矩形$\boldsymbol{J}$，$\Psi(\boldsymbol{J})$也是若尔当域.

515

根据定理 11.25，在有界闭集上的连续函数是一致连续的. 因此，函数$(f\circ\Psi)\cdot|\det\boldsymbol{D}\Psi|:K \to \mathbb{R}$是一致连续的. 由定理 11.27 中描述的一致连续性的ε-δ准则得，我们可选取$\delta_1 > 0$，使得对K

中任意两点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，若 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|<\delta_1$，则

$$|f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|-f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{v})||<\varepsilon. \tag{19.21}$$

由体积比较定理，我们可选取 $\delta_2>0$，使得如果 $\boldsymbol{J}$ 是任一直径小于 δ_2 的广义矩形且 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{K}\cap\boldsymbol{J}$ 中的点，则 $\boldsymbol{J}$ 包含在 $\mathcal{O}$ 内，且

$$\operatorname{vol}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{J})=|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{x})|\operatorname{vol}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\operatorname{vol}\boldsymbol{J}, \tag{19.22}$$

其中 $|\boldsymbol{E}|<\varepsilon$. 定义 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. 由于 ∂D 有若尔当容度 0，如同定理 18.20 的证明中的论证，我们可选取 $\boldsymbol{I}$ 的一个划分 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\operatorname{gap}\boldsymbol{P}<\delta \quad 及 \quad \sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P},\boldsymbol{J}\cap\partial D\neq\phi}\operatorname{vol}\boldsymbol{J}<\varepsilon. \tag{19.23}$$

由在定理 18.11 及定理 18.30 中建立的积分关于区域的可加性，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{\Psi}(K)}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_K f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\\
&=\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}\int_{\boldsymbol{\Psi}(K\cap \boldsymbol{J})}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}\int_{K\cap\boldsymbol{J}}f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\\
&=\sum_{\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}}\left[\int_{\boldsymbol{\Psi}(K\cap \boldsymbol{J})}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{K\cap\boldsymbol{J}}f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right].
\end{aligned} \tag{19.24}$$

我们对上式右边的和中的广义矩形 $\boldsymbol{J}$ 按其在 D 内或与 ∂D 相交所引起误差贡献分别作估计. 对于 $\boldsymbol{P}$ 中每个直径小于 δ 的广义矩形 $\boldsymbol{J}$，从公式(19.20)及(19.22)知，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\boldsymbol{\Psi}(K\cap \boldsymbol{J})}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{K\cap\boldsymbol{J}}f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|\\
&\leqslant\left|\int_{\boldsymbol{\Psi}(K\cap \boldsymbol{J})}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|+\left|\int_{K\cap\boldsymbol{J}}f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|\\
&\leqslant M\operatorname{vol}\boldsymbol{\Psi}(K\cap\boldsymbol{J})+M^2\operatorname{vol}(K\cap\boldsymbol{J})\\
&\leqslant M\operatorname{vol}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{J})+M^2\operatorname{vol}(\boldsymbol{J})\\
&\leqslant M(M+\varepsilon)\operatorname{vol}\boldsymbol{J}+M^2\operatorname{vol}\boldsymbol{J}\\
&=\{M(M+\varepsilon)+M^2\}\operatorname{vol}\boldsymbol{J}.
\end{aligned}$$

516

因为 $\boldsymbol{P}$ 中的与 ∂D 相交的广义矩形 $\boldsymbol{J}$ 的体积小于 ε，我们得到如下估计：

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\boldsymbol{J}\cap\partial D\neq\phi}\int_{\boldsymbol{\Psi}(K\cap \boldsymbol{J})}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\sum_{\boldsymbol{J}\cap\partial D\neq\phi}\int_{K\cap\boldsymbol{J}}f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|\\
&\qquad\leqslant\{M(M+\varepsilon)+M^2\}\varepsilon.
\end{aligned} \tag{19.25}$$

现在剩下去估计(19.24)右边的形如

$$\int_{\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{J})}f(x)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\boldsymbol{J}}f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}))|\det \boldsymbol{D\Psi}(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

的那些项，其中 $\boldsymbol{J}$ 是包含在 D 内的 $\boldsymbol{P}$ 中的广义矩形. 设 $\boldsymbol{J}$ 是这样的广义矩形，从积分中值性质(见习题 7)知，$\boldsymbol{J}$ 中存在一点 $\boldsymbol{u}_0$，使得

$$\int_{\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{J})}f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}_0))\operatorname{vol}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{J}),$$

因此由(19.22)得，

$$\int_{\Psi(J)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = f(\Psi(\boldsymbol{u}_0)) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}_0) \mid \mathrm{vol}\boldsymbol{J} + f(\Psi(\boldsymbol{u}_0))\boldsymbol{E}\mathrm{vol}\boldsymbol{J},$$

其中 $|\boldsymbol{E}| < \varepsilon$. 再次运用积分中值性质(见习题7)，$\boldsymbol{J}$ 中存在一点 $\boldsymbol{v}_0$，使得

$$\int_J f(\Psi(\boldsymbol{u})) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}) \mid \mathrm{d}\boldsymbol{u} = f(\Psi(\boldsymbol{v}_0)) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{v}_0) \mid \mathrm{vol}\boldsymbol{J}.$$

由于 $\| \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0 \| \leqslant \mathrm{diam}\boldsymbol{J} < \delta$，从一致连续性的断言(19.21)，我们有

$$\big| f(\Psi(\boldsymbol{u}_0)) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}_0) \mid - f(\Psi(\boldsymbol{v}_0)) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{v}_0) \mid \big| < \varepsilon.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Psi(J)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_J f(\Psi(\boldsymbol{u})) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}) \mid \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right| \\
&= \big| f(\Psi(\boldsymbol{u}_0)) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}_0) \mid - f(\Psi(\boldsymbol{v}_0)) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{v}_0) \mid + f(\Psi(\boldsymbol{u}_0))E \big| \mathrm{vol}\boldsymbol{J} \\
&\leqslant \{\varepsilon + M\varepsilon\} \mathrm{vol}\boldsymbol{J}.
\end{aligned}$$

对上式关于 $\boldsymbol{P}$ 中包含在 D 内的广义矩形 $\boldsymbol{J}$ 求和，得到

$$\left| \sum_{J \in P, J \subseteq D} \left\{ \int_{\Psi(J)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_J f(\Psi(\boldsymbol{u})) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}) \mid \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right\} \right| < \{\varepsilon + M\varepsilon\} \mathrm{vol}\boldsymbol{I}.$$

517

把这个估计与(19.25)结合起来，我们看到

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Psi(K)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_K f(\Psi(\boldsymbol{u})) \mid \det \boldsymbol{D}\Psi(\boldsymbol{u}) \mid \mathrm{d}\boldsymbol{u} \right| \\
&< \{M(M + \varepsilon) + M^2\}\varepsilon + \{\varepsilon + M\varepsilon\} \mathrm{vol}\boldsymbol{I} \\
&= \varepsilon\{M(M + \varepsilon) + M^2 + (1 + M)\mathrm{vol}\boldsymbol{I}\}.
\end{aligned}$$

由于数 M 和 $\mathrm{vol}\boldsymbol{I}$ 是固定的，而上述估计对所有正数 ε 都成立，因此我们可得到积分变换公式(19.11)成立.

习题

1. 假设 Ψ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是具有如下特殊形式的光滑的变量替换：对$\mathbb{R}^2$ 中所有的(x, y)，$\Psi(x, y) = (x, g(x, y))$，其中函数 g 对第2个变量是严格递增的. 对 $K = [a, b] \times [0, 1]$，明确地写出 $\Psi(K)$，并对这种特殊情况的变量替换公式提供一个独立证明.
2. 证明：线性体积变换公式(19.16)是公式(19.11)的一种特殊情况.
3. 证明：体积变换公式(19.18)和(19.19)是公式(19.11)的特殊情况.
4. 设 K 是$\mathbb{R}^n$ 的有界子集. 证明：$K \cup \partial K$ 是列紧的.(提示：证明 $K \cup \partial K$ 在$\mathbb{R}^n$ 的补集是 K 的外部.)
5. 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，它包含有界闭集 K. 证明：存在一个正数 δ，使得 $\boldsymbol{J}$ 是广义矩形且它的直径小于 δ 及它包含 K 中的一个点，则 $\boldsymbol{J}$ 包含在$\mathcal{O}$中.(提示：用反证法.)
6. 假设 $\Psi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集$\mathcal{O}$上的光滑的变量替换. 证明：如果 A 是$\mathcal{O}$的有界闭子集且有若尔当容度0，则它的象 $\Psi(A)$ 也有若尔当容度0. (提示：运用体积比较定理.)
7. (积分的中值性质)设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，$G: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ 的一个光滑的变量替换，$h: G(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ 是连续的，及 $\boldsymbol{J}$ 是包含在$\mathcal{O}$中的一个广义矩形.
   a. 用极值定理，在 $\boldsymbol{J}$ 中选取两点 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，使 $h \circ G: \boldsymbol{J} \to \mathbb{R}$ 在这两点上分别取极小值和极大值. 然后用积分的单调性证明：

$$h(G(\boldsymbol{u})) \leqslant \frac{1}{\mathrm{vol}G(\boldsymbol{J})} \int_{G(J)} h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant h(G(\boldsymbol{v})).$$

b. 应用中值定理于函数 α: $[0, 1]\to\mathbb{R}$，定义 $\alpha(t)=h(G(t\boldsymbol{u}+(1-t)\boldsymbol{v}))$，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$，运用(a)，在 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的线段上找一点 $\boldsymbol{w}$，使得

518

$$\int_{G(J)} h(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = h(G(\boldsymbol{w}))\,\mathrm{vol}\,G(\boldsymbol{J}).$$

c. 在对$\mathcal{O}$中所有的 $\boldsymbol{x}$，$G(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ 的情况下，得到下述结论：

$$\int_J h(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{w})\,\mathrm{vol}\,\boldsymbol{J}.$$

8. 用积分中值性质证明：体积比较定理可由公式(19.11)得出.

9. 假设 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集$\mathcal{O}$上的光滑的变量替换. 设 D 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集且 $D\cup\partial D$ 包含在$\mathcal{O}$内. 运用反函数定理证明 $\Psi(\partial D)=\partial\Psi(D)$——即象的边界是边界的象.

10. 假设 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2$ 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集$\mathcal{O}$上的光滑的变量替换及 K 是$\mathcal{O}$的有界闭子集. 证明：存在正数 c，使得对 K 中任意两点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，有

$$\|\Psi(\boldsymbol{u})-\Psi(\boldsymbol{v})\| \leqslant c\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

(提示：运用中值定理.)

11. 假设 $\Psi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集$\mathcal{O}$上的光滑的变量替换及 K 是$\mathcal{O}$的有界闭子集，证明：存在正数 c，使得对 K 中任意两点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，有

$$\|\Psi(\boldsymbol{u})-\Psi(\boldsymbol{v})\| \geqslant c\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

519

(提示：用反证法，运用非线性稳定性定理.)

第20章 曲线积分和曲面积分

20.1 弧长和曲线积分

光滑路径和分段光滑路径

11.3节我们称一个连续映射 γ: $[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 是参数化路径(parametrized path)，它的参数空间是区间$[a, b]$，我们称这个映射的象是路径．我们强调路径是$\mathbb{R}^n$ 的子集，而参数化路径则是映射，一条路径可以是很多不同的参数化路径的象．

定义 一条参数化路径 γ: $[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 称为**光滑的**(smooth)，如果限制 γ: $(a, b)\to\mathbb{R}^n$ 有连续有界的导数使得 $\gamma'(t)\neq 0$ 对(a, b)中所有的参数 t 成立.

定义 参数化路径 γ: $[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 称为**分段光滑的**(piecewise smooth)，如果存在参数空间$[a, b]$的一划分$P=\{x_0, \cdots, x_m\}$，使得对于介于1和 m 之间的每个下标 i，限制 γ: $[x_{i-1}, x_i]\to\mathbb{R}^n$ 是一条光滑的参数化路径.

光滑的参数化路径的象称为光滑路径，分段光滑参数化的象称为分段光滑路径(piecewise smooth path).

例 20.1 回忆对$\mathbb{R}^n$ 中任意两个不同的点 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$，映射 γ: $[0, 1]\to\mathbb{R}^n$ 定义为

$$\gamma(t) = t\boldsymbol{q} + (1-t)\boldsymbol{p}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

这个映射称为从点 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 的参数化线段．这个参数化线段显然是光滑的参数化路径. ■ [520]

例 20.2 设 Γ 是在平面$\mathbb{R}^2$ 内由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

定义的椭圆，其中 $a>0$ 及 $b>0$，则 Γ 是光滑路径．为了证实这一点，我们要寻找一条光滑的参数化路径以这个椭圆为它的象．定义

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

显然，它是光滑的参数化路径且以 Γ 作为它的象(如图20.1所示). ■

例 20.3 映射 γ: $[0, 4\pi]\to\mathbb{R}^3$ 定义为

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi.$$

它是光滑的参数化路径(如图20.1所示)．这条光滑的参数化路径的象称为螺旋线(helix). ■

例 20.4 假设连续函数 g: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 及 h: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 具有如下性质：对(a, b)中所有的 x，$g(x)<h(x)$，且限制 g: $(a, b)\to\mathbb{R}$ 与 h: $(a, b)\to\mathbb{R}$ 有连续有界导数，定义

$$\Omega = \{(x,y) \mid a < x < b, g(x) < y < h(x)\}.$$

那么 Ω 的边界是分段光滑的参数化路径(如图20.2所示)．为看到这一点，注意到如果 $g(a)<h(a)$ 且 $g(b)<h(b)$，则 Ω 的边界是映射 γ: $[0, 1]\to\mathbb{R}^2$ 的象，其中 [521]

$$\gamma(t)=\begin{cases}(a+4t(b-a),g(a+4t(b-a))) & \text{若}\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}\\ \left(b,g(b)+4\left(t-\frac{1}{4}\right)(h(b)-g(b))\right) & \text{若}\ \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \left(b-4\left(t-\frac{1}{2}\right)(b-a),h\left(b-4\left(t-\frac{1}{2}\right)(b-a)\right)\right) & \text{若}\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}\\ \left(a,h(a)+4\left(t-\frac{3}{4}\right)(g(a)-h(a))\right) & \text{若}\ \frac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

■

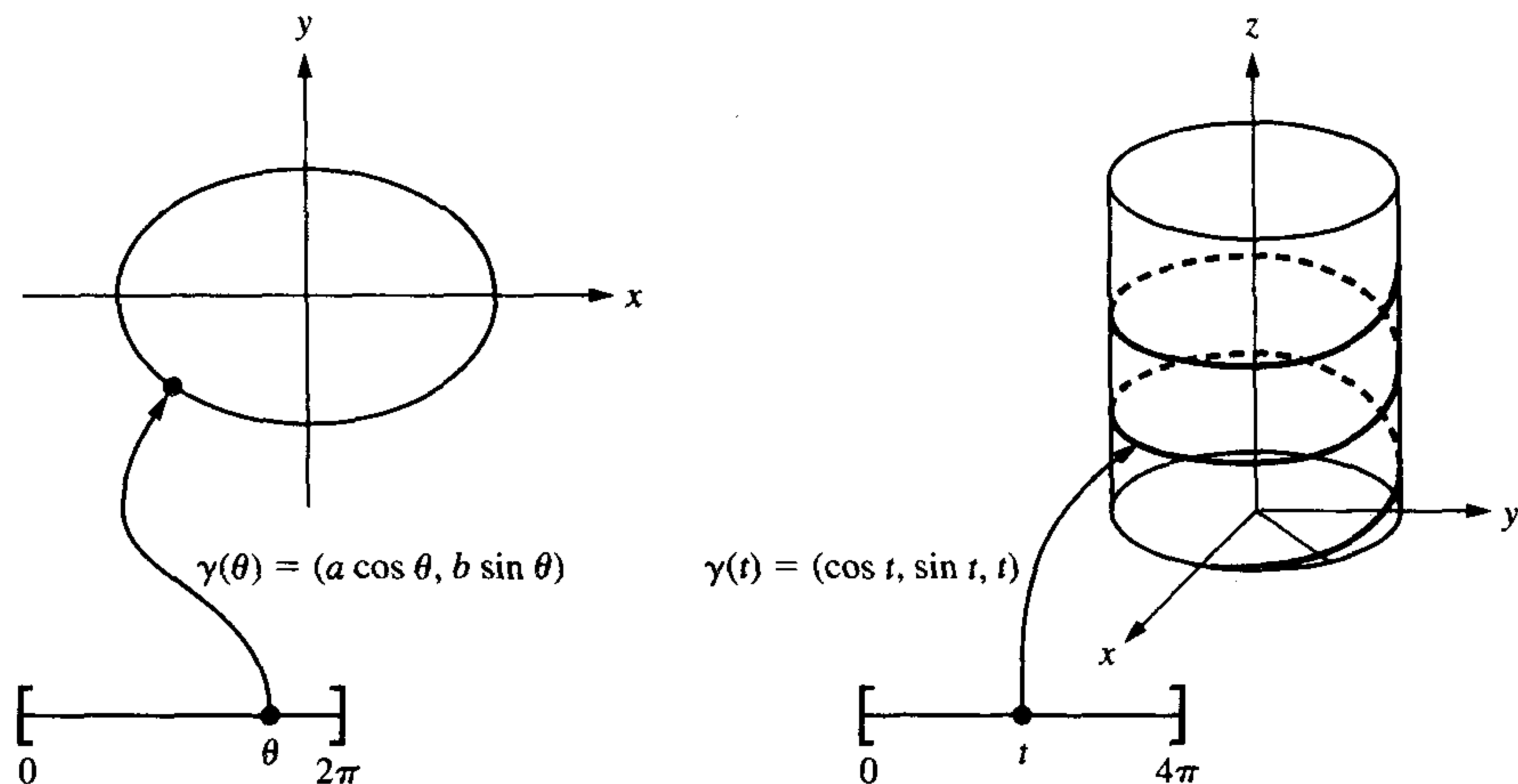


图 20.1 椭圆与螺旋线的参数化

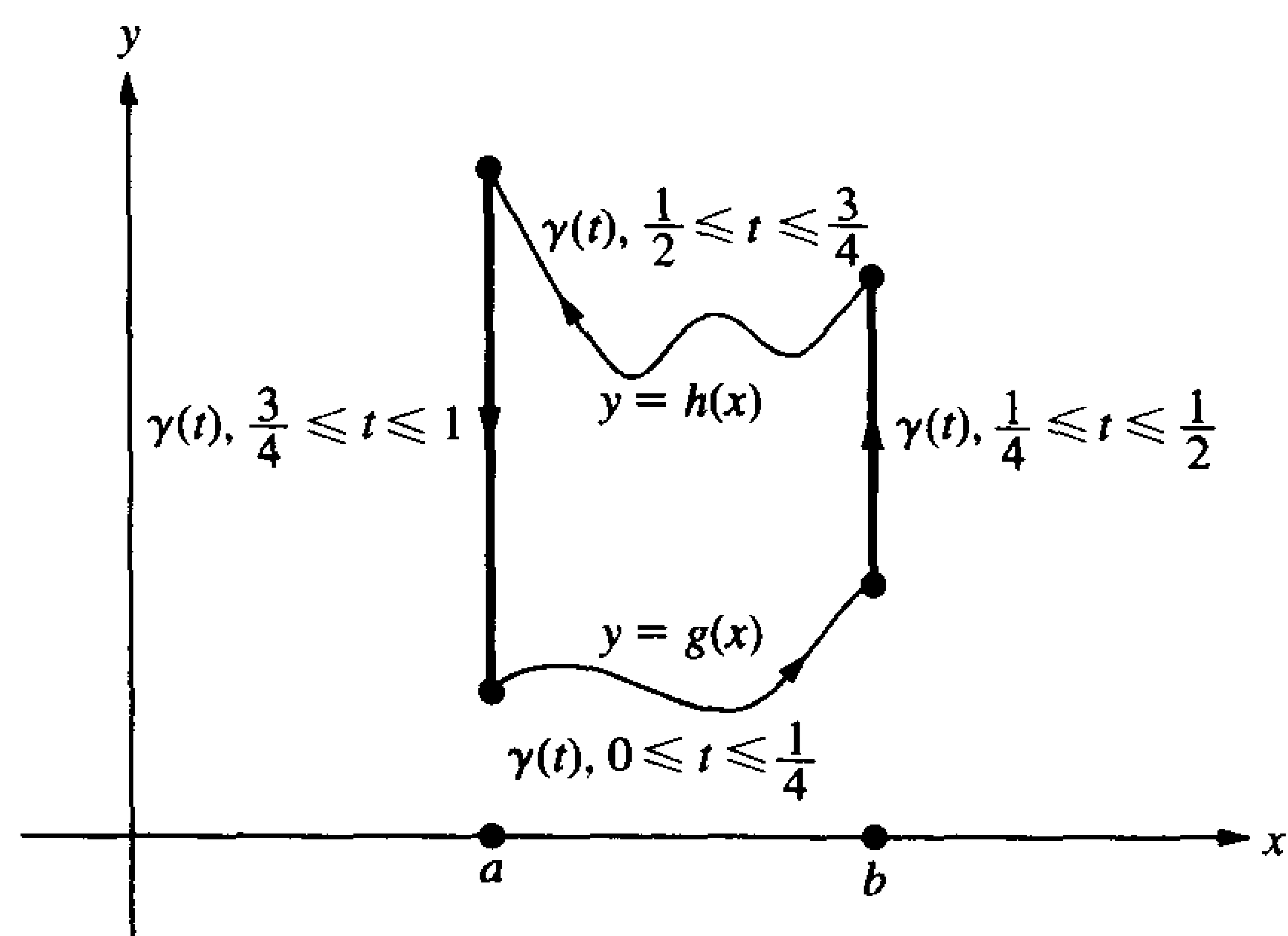


图 20.2 Ω 的边界的一个明显的分段光滑参数化

路径的弧长

我们已经定义了实数区间$[a, b]$的长度是 $b-a$. 而且定义在欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 中连接两个点 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的线段的长度为这两点之间的欧几里得的距离

$$\text{dist}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \equiv \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|.$$

我们希望把这一定义推广到参数化路径的弧长上．为此，必须对参数化路径的类加以限制．下面的弧长定义是由多边形逼近的几何概念所引起的．

定义 参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 称为有**弧长**或者**可求长的**，如果存在一数 ℓ，具有如下性质：对每一正数 ε，存在正数 δ，使得

$$\left|\left[\sum_{i=1}^{m}\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|\right]-\ell\right|<\varepsilon$$

对 $[a,b]$ 的每一个具有 $\text{gap}P<\delta$ 的划分 $P=\{x_0,\cdots,x_m\}$ 成立．我们称 ℓ 为参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长． 522

对于参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 及参数空间 $[a,b]$ 的一个划分 $P=\{x_0,\cdots,x_m\}$，为方便起见，称和

$$\sum_{i=1}^{m}\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|$$

为 γ 的弧长基于划分 P 的多边形逼近．

对于一个可求长的参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$，仅有一个数 ℓ 具有多边形逼近的性质(见习题7)．

我们已经定义了参数化路径的弧长．看起来自然有理由认为，弧长是参数化路径的象所具有的性质而同参数化的方式无关．为了了解确实如此，必须考虑给定路径的不同参数化之间的关系．

定义 两个参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 及 $\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ 称为是等价的，如果存在一个严格递增的参数化路径 $u:[c,d]\to\mathbb{R}$，它的象是 $[a,b]$，且使得

$$\alpha=\gamma\circ u:[c,d]\to\mathbb{R}.$$

命题 20.5 假设参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是可求长的，则每一个与 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 等价的参数化路径也是可求长的且具有与 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 相同的弧长．

证明 令 $u:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是连续且严格递增的函数，具有象 $[a,b]$，则复合 $\alpha\equiv\gamma\circ u:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ 等价于 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$．我们必须证明 $\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ 是可求长的且弧长等于 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长，记为 ℓ．

令 $\varepsilon>0$，则存在 $\delta>0$ 使得如果 $P=\{x_0,\cdots,x_m\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个划分，且 $\text{gap}P<\delta$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|-\ell\right|<\varepsilon. \tag{20.1}$$

因为函数 $u:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是连续的，由定理3.17知，它是一致连续的，从而，存在一个 $\delta'>0$，使得对 $[c,d]$ 中的任意两点 t_1，t_2，只要 $|t_1-t_2|<\delta'$，便有 $|u(t_1)-u(t_2)|<\delta$．因为函数 $u:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是严格递增的，显然，$u:[c,d]\to\mathbb{R}$ 把 $[c,d]$ 的一个划分 P' 映成 $[a,b]$ 的一个划分，并且对 $\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长的基于划分 P' 的多边形逼近等价于 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长的基于划分 P 的多边形逼近．从而由 δ 与 δ' 的选取，如果 $\text{gap}P'<\delta'$，则 $\text{gap}P<\delta$．因此，$\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ 的基于划分 P' 的弧长的多边形逼近与 ℓ 的差至多是 ε． ■ 523

分段光滑路径的弧长

我们将证明分段光滑的参数化路径$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$是可求长的且它的弧长等于$\int_a^b\|\gamma'\|$. 为证明这一点，首先建立下面的逼近引理.

引理 20.6 光滑的参数化路径$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$有如下逼近性质：对满足$a<a'<b'<b$的$[a, b]$的每个子区间$[a', b']$及每个正数$\varepsilon$，存在正数$\delta$，使得当$[c, d]$是$[a', b']$的一个长度小于$\delta$的子区间且$t$是开区间$(c, d)$内的一个参数值时，则

$$\left\|\frac{\gamma(d)-\gamma(c)}{d-c}-\gamma'(t)\right\|<\varepsilon. \tag{20.2}$$

证明 我们把$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$用分量函数表示如下：

$$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\cdots,\gamma_n(t)),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

由光滑的参数化路径的定义知，映射γ': $[a', b']\to\mathbb{R}^n$是连续的. 由于定义在闭有界区间上的连续函数是一致连续的，因此对介于 1 和n之间的每个下标i，函数γ_i': $[a', b']\to\mathbb{R}$是一致连续的.

令$\varepsilon>0$. 定义$\varepsilon'\equiv\varepsilon/\sqrt{n}$. 对介于 1 和$n$之间的每个下标$i$，可选取$\delta_i>0$，使得如果$t_1$与$t_2$是$[a', b']$中的参数值且$|t_1-t_2|<\delta_i$，则$|\gamma_i'(t_2)-\gamma_i'(t_1)|<\varepsilon'$. 定义$\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\delta_i$.

假设$[c, d]$是$[a', b']$的一个长度小于δ的子区间，则对每个下标i，用标量函数的中值定理在开区间(c, d)中选取一点η_i，使得

$$\gamma_i(d)-\gamma_i(c)=\gamma_i'(\eta_i)(d-c).$$

设t是开区间(c, d)中的一个参数值，则对每个下标$i(1\leqslant i\leqslant h)$，$|\eta_i-t|<\delta\leqslant\delta_i$，所以由$\delta_i$选择得，

$$\begin{aligned}&|[\gamma_i(d)-\gamma_i(c)]-\gamma_i'(t)(d-c)|\\&=|\gamma_i'(\eta_i)-\gamma_i'(t)|(d-c)<\varepsilon'(d-c)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}(d-c).\end{aligned}$$

由此推出，

$$\begin{aligned}&\|[\gamma(d)-\gamma(c)]-\gamma'(t)(d-c)\|\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left[|[\gamma_i(d)-\gamma_i(c)]-\gamma_i'(t)(d-c)|\right]^2}<\varepsilon(d-c).\end{aligned}$$

524 这个不等式除以$d-c$，我们得到(20.2). ■

命题 20.7 光滑的参数化路径$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$是可求长的且它的弧长$\ell$由下式给出：

$$\ell=\int_a^b\|\gamma'\|. \tag{20.3}$$

证明 对$a<t<b$，定义函数h: $(a, b)\to\mathbb{R}$为$h(t)=\|\gamma'(t)\|$. 那么由定义知，h在开区间(a, b)上是连续且有界的，因而它在闭区间$[a, b]$上是可积的. 对于介于 1 和n之间的每个下标i，我们选取$M_i>0$，使得对(a, b)中所有的t，$|\gamma_i'(t)|\leqslant M_i$. 定义

$M=\sqrt{M_1^2+\cdots+M_n^2}$. 对映射 γ 的每个分量函数运用中值定理且按引理 20.6 的证明中的论证得出，对$[a, b]$的任一子区间$[c, d]$有

$$\left|\frac{\|\gamma(d)-\gamma(c)\|}{d-c}-\|\gamma'(t)\|\right|<2M,\quad t\in[c,d].$$

这样，由积分的单调性得，对$[a, b]$的每个子区间$[c, d]$

$$\left|\|\gamma(d)-\gamma(c)\|-\int_c^d\|\gamma'\|\right|<2M(d-c).\tag{20.4}$$

令 $\varepsilon>0$，选取$[a, b]$的一个子区间$[a', b']$ $(a<a'<b'<b)$，如果我们定义 $\eta=\max\{a'-a, b-b'\}$，则 $16\eta M<\varepsilon$. 由引理 20.6，置 $\varepsilon'=\varepsilon/2(b'-a')$，我们可选取 $\delta'>0$，使得如果$[c, d]$是$[a', b']$的一个子区间且长度小于 δ'，t 是开区间(c, d)中的一个参数值，则

$$\left\|\frac{\gamma(d)-\gamma(c)}{d-c}-\gamma'(t)\right\|<\varepsilon',$$

由三角不等式推出，对(c, d)中所有的 t,

$$\left|\frac{\|\gamma(d)-\gamma(c)\|}{d-c}-\|\gamma'(t)\|\right|<\varepsilon'.$$

因此由积分的单调性得，

$$\left|\|\gamma(d)-\gamma(c)\|-\int_c^d\|\gamma'\|\right|<\varepsilon'(d-c),\quad \text{如果}[c,d]\subseteq[a',b']\text{及 }d-c<\delta'.\tag{20.5}$$

定义 $\delta=\min\{\delta', \eta\}$，设 $P=\{x_0, \cdots, x_m\}$是$[a, b]$的一个划分，满足 $\text{gap}P<\delta$. 由三角不等式得，

$$\left|\sum_{i=1}^m\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|-\int_a^b\|\gamma'\|\right|\leqslant\sum_{i=1}^m\left|\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|-\int_{x_{i-1}}^{x_i}\|\gamma'\|\right|.\tag{20.6}$$

525

由估计式(20.5)知. 对每个下标 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，若$[x_{i-1}, x_i]\subseteq[a', b']$，则

$$\left|\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|-\int_{x_{i-1}}^{x_i}\|\gamma'\|\right|<\varepsilon'(x_i-x_{i-1}).$$

这样，由包含在$[a', b']$中的区间$[x_{i-1}, x_i]$对不等式(20.6)右端提供的值小于 $\varepsilon'(b'-a')=\frac{\varepsilon}{2}$. 另一方面对于不包含在$[a', b']$中的每个区间$[x_{i-1}, x_i]$，由估计式(20.4)推出

$$\left|\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|-\int_{x_{i-1}}^{x_i}\|\gamma'\|\right|<2M(x_i-x_{i-1}),$$

并且由于这样的区间的长度和至多是 4η，由不包含在$[a', b']$的区间$[x_{i-1}, x_i]$对不等式(20.6)右端提供的值至多是 $8\eta M<\frac{\varepsilon}{2}$. 由这两种估计得出，

$$\left|\sum_{i=1}^m\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\|-\int_a^b\|\gamma'\|\right|<\varepsilon.$$

■

定理 20.8 分段光滑的参数化路径 γ: $[a, b]\to\mathbb{R}^n$ 是可求长的且它的弧长 ℓ 由下式给出：

$$\ell = \int_a^b \| \gamma' \|. \tag{20.7}$$

证明 设 $\varepsilon>0$，必需寻找 $\delta>0$ 使得如果 $P=\{x_0, \cdots, x_m\}$ 是 $[a, b]$ 的一个划分，有 $\text{gap}P<\delta$，则

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \| \gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1}) \| - \int_a^b \| \gamma' \| \right| < \varepsilon.$$

可选择区间 $[a, b]$ 的一个划分 $\{z_0, \cdots, z_k\}$，使得 γ 在这个划分的每一个子区间上的限制是光滑的参数化路径. 由于映射 $\gamma: [a, b]\to\mathbb{R}^n$ 是一致连续的，我们可选择正数 δ'，使得对 $[a, b]$ 中的任意两个参数值 s 和 t，只要 $|s-t|<\delta'$，便有

$$\| \gamma(s) - \gamma(t) \| < \varepsilon/6k.$$

证明中的关键点在于，如果 P 是 $[a, b]$ 的任一划分，有 $\text{gap}P<\delta$，且 P' 是通过插入所有的 z_i 后得到的 P 的加细，则对 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长基于 P 与基于 P' 的多边形逼近的差至多是 $\varepsilon/2$. 为看到这一点，注意包含形如 $\|\gamma(t)-\gamma(s)\|$ 的少于 $3k$ 项的这些逼近式之间的差，其中 s，t 是满足 $|s-t|<\delta'$ 的参数值. 由于每一个这样的项至多是 $\varepsilon/6k$，因此两个多边形逼近式的差至多是 $\varepsilon/2$.

由命题20.7知，对介于1和 k 之间的每个下标 i，光滑参数化路径 $\gamma:[z_{i-1},z_i]\to\mathbb{R}^n$ 是可求长的，因此可选取 $\delta_i>0$，使得如果 P_i 是 $[z_{i-1}, z_i]$ 的满足 $\text{gap}P_i<\delta_i$ 的任意一个划分，则 $\gamma:[z_{i-1},z_i]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长的多边形逼近式与 $\|\gamma'\|$ 在 $[z_{i-1},z_i]$ 上的积分的差至多是 $\varepsilon/2k$. 定义 $\delta=\min\{\delta', \delta_1, \cdots, \delta_k\}$. 设 P 是 $[a, b]$ 的满足 $\text{gap}P<\delta$ 的任意一个划分. 由 δ_i 的选择知，$\gamma: [a, b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长的基于 P' 的多边形逼近式与 $\|\gamma'\|$ 在 $[a, b]$ 上的积分的差至多是 $\varepsilon/2$. 由前面的估计知，$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长的基于 P 的多边形逼近式与 $\|\gamma'\|$ 在 $[a, b]$ 上的积分的差至多是 ε. 从而(20.7)成立. ■

526

例 20.9 对于由

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0\leqslant t\leqslant 4\pi$$

定义的螺旋线，注意

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad 0\leqslant t\leqslant 4\pi.$$

由定理20.8知，这条参数化路径是可求长的，其弧长是

$$\int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}\,dt = 4\sqrt{2}\pi. \quad ■$$

假设参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是可求长的，则对 $[a, b]$ 的一个划分 P 和它的加细 P'，这个弧长的基于 P' 的多边形逼近值大于基于 P 的多边形逼近值，这可由三角不等式的直接得出. 由此不难证明可求长的参数化路径的弧长是这个弧长的多边形逼近值的上确界(见习题8).

非可求长的参数化路径

在光滑参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是可求长的证明里，我们用到了参数化路径的导数 $\gamma':(a,b)\to\mathbb{R}^n$ 是有界的这一事实. 事实上，正如下例所表明的，参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的如下结论是不成立的：如果仅有 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的，它就必然是可求长的. 因为如

果其导数是非有界的，则路径可能是不可求长的.

例 20.10 首先，定义

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{若 } 0<x\leqslant 1\\ 0 & \text{若 } x=0,\end{cases}$$

然后，对 $0\leqslant t\leqslant 1$，定义 $\gamma(t)=(t,f(t))$. 显然，$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 是一条参数化路径且 $\gamma:(0,1)\to\mathbb{R}^2$ 是连续可微的. 但是，路径 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 是不可求长的，如图 20.3 所示. 事实上，注意

527

$$f(1/k)=\begin{cases}1/k & \text{若 } k \text{ 是偶自然数}\\ -1/k & \text{若 } k \text{ 是奇自然数,}\end{cases}$$

所以对每个自然数 k，

$$\left\|\gamma\left(\frac{1}{k}\right)-\gamma\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\|\geqslant\frac{1}{k}.$$

这就得出对每个自然数 n，如果定义划分 $P=\left\{0,\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{2},1\right\}$，则基于 P 的多边形逼近值大于 $\sum\limits_{k=1}^{n}1/k$. 因为调和级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/k$ 的部分和序列是无界的，所以这个多边形逼近值可以任意地大. 因此这条参数化路径 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 是不可求长的.

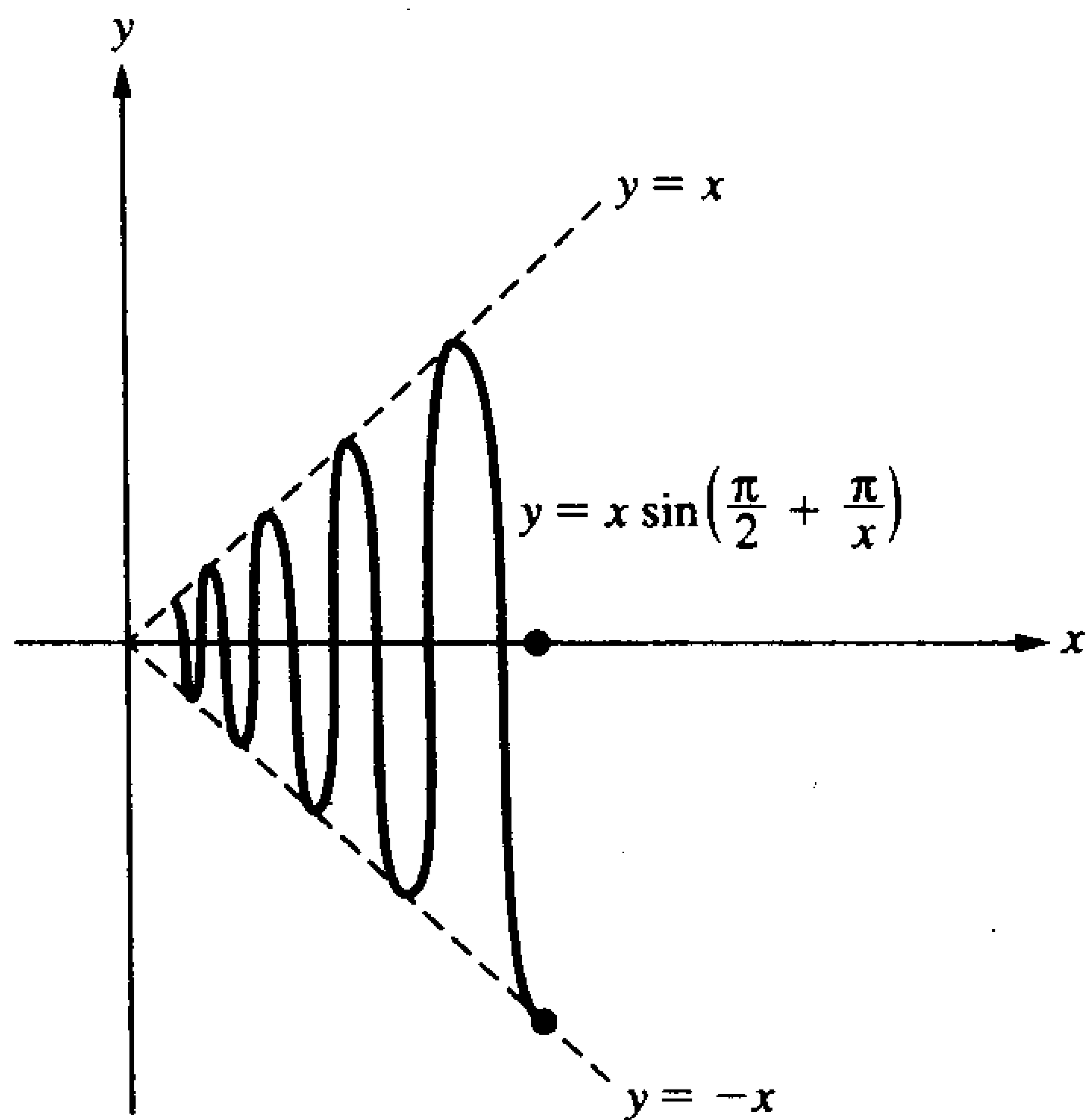


图 20.3 一个不可求长的连续可微参数化路径 ■

弧长参数化

在分段光滑参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的等价参数化中，有一个特殊的参数化，称为**弧长参数化**(parametrization by arclength)，它是十分方便的. 它的定义如下：对 $[a,b]$ 中的每一个参数值 t，定义

$$u(t)\equiv\int_a^t\|\gamma'\|.$$

由于可能除去$(a,\ b)$中有限个数点外，$\gamma'(t)\neq 0$，连续函数$u:[a,b]\to\mathbb{R}$是严格递增的且
528 $u([a,\ b])=[0,\ \ell]$，其中ℓ是$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$的弧长．它的反函数$u^{-1}:[0,\ell]\to[a,b]$也是严格递增且连续的．由$\alpha=\gamma\circ u^{-1}$定义的参数化路径$\alpha:[0,\ell]\to\mathbb{R}^n$是对参数化路径$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$的弧长参数化．它具有如下性质：对$[0,\ \ell]$中的每一个参数值$s$，参数化路径$\alpha:[0,s]\to\mathbb{R}^n$的弧长等于这个参数值$s$．微积分的第二基本定理蕴涵着除去有限个点外，$u'(t)=\|\gamma'(t)\|$，所以运用链式法则得出，弧长参数化$\alpha:[0,\ell]\to\mathbb{R}^n$有如下性质：在$[0,\ \ell]$中的每个参数值$s$处，$\alpha$可导，且$\|\alpha'(s)\|=1$.

例 20.11 考虑由$\gamma(t)=(\cos t,\ \sin t,\ t)(0\leqslant t\leqslant 4\pi)$所确定的螺旋线．对$[0,\ 4\pi]$中的每个$t$，

$$u(t)=\int_0^t\|\gamma'\|=\int_0^t\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}t.$$

这样，螺旋线的弧长参数化α：$[0,\ 4\sqrt{2}\pi]\to\mathbb{R}^3$定义为

$$\alpha(s)=(\cos(s/\sqrt{2}),\sin(s/\sqrt{2}),s/\sqrt{2}),\quad 0\leqslant s\leqslant 4\sqrt{2}\pi.$$ ■

沿着一条路径的积分：曲线积分

现在我们考虑曲线积分的概念．给定一条分段光滑参数化路径$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$，它有图形$\boldsymbol{\Gamma}$及一个连续函数$f:\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$，定义$f:\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$在参数化路径$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$上的曲线积分为

$$\int_{\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n}f\equiv\int_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

我们的第一个结果是用上面没有变换的曲线积分的一个等价的参数化代替一条路径的参数化

定理 20.12 *假定$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$与$\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$是路径$\boldsymbol{\Gamma}$的两个等价的分段光滑的参数化路径，则对任意连续函数$f:\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$，*

$$\int_{\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n}f=\int_{\alpha:[c,d]\to\mathbf{R}^n}f.$$

证明 运用积分关于划分的可加性，只要考虑路径是光滑的情形就足够了．由参数化的等价性定义，存在有一个严格递增的路径$u:[c,d]\to\mathbb{R}$，满足$u([c,\ d])=[a,\ b]$与$\alpha=\gamma\circ u:[c,d]\to\mathbb{R}^n$．对$(c,\ d)$中的每个参数值$t$，必有一个下标$i$，满足$\gamma_i'(u(t))\neq 0$，所以$\gamma_i\circ u=\alpha_i:(c,\ d)\to\mathbb{R}$，由反函数定理及链式法则得出，$u$：$(c,\ d)\to\mathbb{R}$在$t$处可导．从而$\alpha'(t)=\gamma'(u(t))u'(t)$．特别地，对$(c,\ d)$中所有的参数$t$，$u'(t)\neq 0$．由于$u:[c,d]\to\mathbb{R}$是严格递增
529 的，且对于$(c,\ d)$中所有的t，$u'(t)\neq 0$，即$u'(t)>0$．由变量替换定理与链式法则，

$$\begin{aligned}\int_{\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n}f&=\int_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t\\&=\int_{u(c)}^{u(d)}f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t\\&=\int_c^d f(\gamma(u(t)))\ \|\gamma'(u(t))\|\ u'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_c^d f(\alpha(t))\ \|\alpha'(t)\|\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n} f. \qquad \blacksquare$$

对于路径 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的分段光滑参数化 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 及一个连续函数 $f:\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$，如果这条路径的弧长是 ℓ 且 α：$[0,\ \ell]\to\mathbb{R}^n$ 是等价的弧长参数化. 因为除可能的有限多个点外 $\|\alpha(s)\|=1$，所以由定理 20.12 得，

$$\int_{\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n} f = \int_0^{\ell} f(\alpha(s))\,\mathrm{d}s.$$

因此，这个线积分普遍表示为

$$\int_{\Gamma} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

并且明确地 $\boldsymbol{\Gamma}$ 选取路径的一个光滑参数化.

还有一些与定义在路径上的连续函数相关的其他类型的曲线积分. 对于参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$,它有图形 $\boldsymbol{\Gamma}$, 及连续函数 $f:\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$，对介于 1 和 n 之间的下标 i，γ_i：$(a,\ b)\to\mathbb{R}$ 有连续有界的导数，我们定义

$$\int_{\Gamma} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i = \int_{\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

如同在定理 20.12 的证明中论证过的，借助严格递增的光滑函数的复合由一个参数化变换到另一个参数不会改变积分值. 自然地，当 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 中的点分别表示为 $(x,\ y)$ 或 $(x,\ y,\ z)$ 时，我们用熟悉的记号来表示这些积分：例如在 $\mathbb{R}^3$ 中，我们使用

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x,\quad \int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \quad \text{及} \quad \int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

并且对路径 $\boldsymbol{\Gamma}$ 特选一个参数化.

530

例 20.13　考虑例 20.4 中给出的路径 $\boldsymbol{\Gamma}=\partial\Omega$ 的分段光滑参数化 γ：$[0,\ 1]\to\mathbb{R}^2$，对于这个参数化，由曲线积分的定义和一元函数积分的换元公式得，

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x &= \int_{\Gamma_1} y\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} g(a+4t(b-a))4(b-a)\,\mathrm{d}t\\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} h\left(b-4\left(t-\frac{1}{2}\right)(b-a)\right)(-4(b-a))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b [g(t)-h(t)]\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

如图 20.4 所示 .

习题

1. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$，运用公式(20.3)验证从 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 的参数化线段的弧长是 $\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|$.

2. 求定义为

$$\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

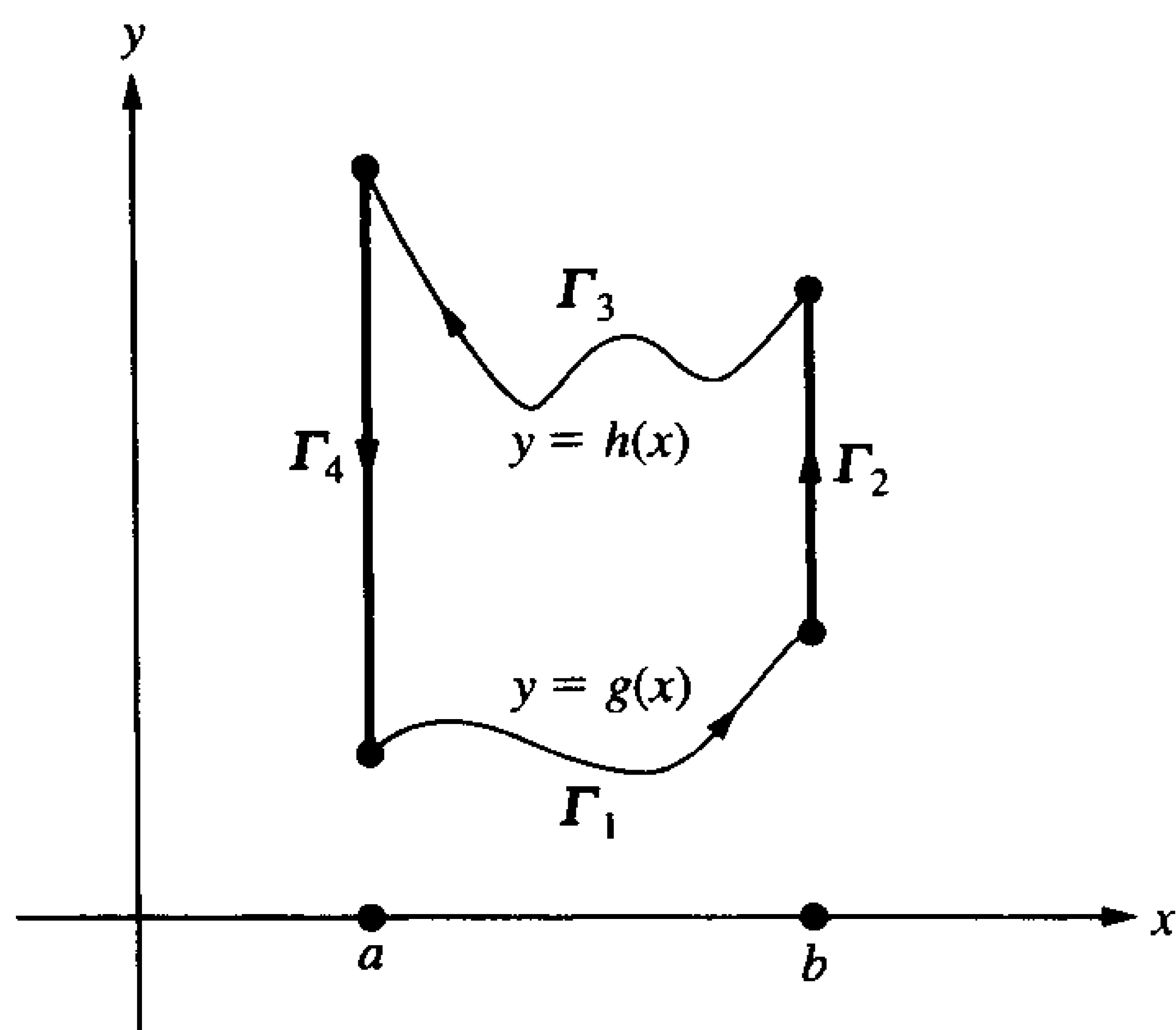


图 20.4 $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} y\mathrm{d}x$

的参数化路径 γ: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ 的弧长.

3. 对定义为

$$\gamma(t) = (t, t^2, 1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

的参数化路径 γ: $[0, 4] \to \mathbb{R}^3$. 求以弧长为参数的等价的光滑参数化.

531

4. 对 $0 < a < b$, 寻找一积分, 它等于椭圆 $\left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ 的弧长. (必须使用数值逼近方法来实际计算这个积分.)

5. 计算

$$\int_{\Gamma} x\sin y\mathrm{d}x + y\cos x\mathrm{d}y,$$

其中 Γ 是参数化线段 γ: $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ 的象定义为

$$\gamma(t) = (t, mt), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

6. 计算

$$\int_{\Gamma} \frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y,$$

其中 Γ 是参数化路径 γ: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ 的象定义为

$$\gamma(t) = (\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

7. 证明: 弧长的定义是无歧义的. 因为如果一条参数化路径是可求长的, 则仅有一数 ℓ 具有定义中的多边形逼近性质.

8. 证明: 可求长的参数化路径的弧长是它的所有多边形逼近的弧长的上确界.

9. 对有象 Γ 的可求长的参数化路径 $\gamma:[a,b] \to \mathbb{R}^n$, 定义 $\alpha:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 为 $\alpha(t) = \gamma(a+b-t)(a \leqslant t \leqslant b)$.

a. 证明: $\alpha:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 也是可求长路径 Γ 的参数化, 且 α 与 γ 有相同的弧长.

b. 对连续函数 f: $\Gamma \to \mathbb{R}$. 证明: $\int_{\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n} f = \int_{\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n} f$.

c. 若 $\gamma:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 是光滑的, $f:\Gamma \to \mathbb{R}$ 是连续的, $1 \leqslant i \leqslant n$, 证明:

$$\int_{\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x_i = -\int_{\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x_i.$$

10. 假设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 及 $\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ 都是参数化路径，每一个都是一对一的且 $\gamma(a)=\alpha(c)$. 证明：这些参数化路径是等价的，当且仅当它们具有同一个象.（提示：对$[c,d]$中的每一个参数值 t，定义 $u(t)=s$ 是唯一一个$[a,b]$中的参数 s，使得 $\alpha(t)=\gamma(s)$.）

11. 对分段光滑参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 及一个连续函数$f:\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的象. 证明：

$$\left|\int_{\Gamma}f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M\ell,$$

其中 M 使得 $|f(\boldsymbol{p})|\leqslant M$ 对 $\boldsymbol{\Gamma}$ 上所有的点成立，ℓ 是 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的弧长.

532

20.2 曲面面积和曲面积分

在 20.1 节，我们定义了参数化路径、路径和曲线积分，本节我们将定义相应的参数化曲面、曲面和曲面积分.

平面区域与参数化曲面

我们称平面$\mathbb{R}^2$ 的子集$\mathcal{R}$为区域(region)，如果它是开的且是若尔当域——即它是开的且有界及它的边界的若尔当容度是0. 由定理 18.17 知，如果$\mathcal{R}$是$\mathbb{R}^2$ 的一个区域且函数 $g:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ 是连续有界的，则它的积分 $\int_{\mathcal{R}}g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是确定的.

定义 设$\mathcal{R}$是$\mathbb{R}^2$ 中的一个区域. 一个连续可微的映射 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 称为有参数空间$\mathcal{R}$的**参数化曲面**(parametrized surface)，如果下面三个性质成立：

(i) 映射 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 的分量函数有有界的一阶偏导数.

(ii) 映射 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 是一对一的.

(iii) 对$\mathcal{R}$中的每个点(u,v)，

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\neq\mathbf{0}.$$

定义 $\mathbb{R}^3$ 中的子集$\mathcal{S}$称为**曲面**(surface)，如果它是一个参数化曲面的象.

对一个参数化曲面 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 和参数空间$\mathcal{R}$中的点(u_0,v_0)，因为$\mathcal{R}$是开的，如果正数 r 充分小，则由式

$$\gamma(t)=\boldsymbol{r}(u_0+t,v_0),\quad t\in(-r,r)$$

定义的参数化路径 $\gamma:(-r,r)\to\mathbb{R}^3$ 确定了曲面$\mathcal{S}$中的一条光滑路径，它在点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$处有由 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$给出的切向量. 类似地，保持变量 u 为常数，我们得到另一条参数化路径，它的象位于曲面$\mathcal{S}$中且通过点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$，有切向量$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$. 这样，因为假设(iii)，如果定义向量 $\boldsymbol{\eta}$ 为

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0),$$

我们断定向量 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零的，且由叉积的性质知，它垂直于切向量$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$与$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$. 因

此，我们称 $\boldsymbol{\eta}$ 或 $\boldsymbol{\eta}$ 的任一非零标量倍是曲面$\mathcal{S}$在点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ 的法向量．这样，对给定的参数化，曲面在每一点处都有法向量且随参数(u, v)连续变化．一个带有法向量的参数化曲面如图 20.5 所示．

533

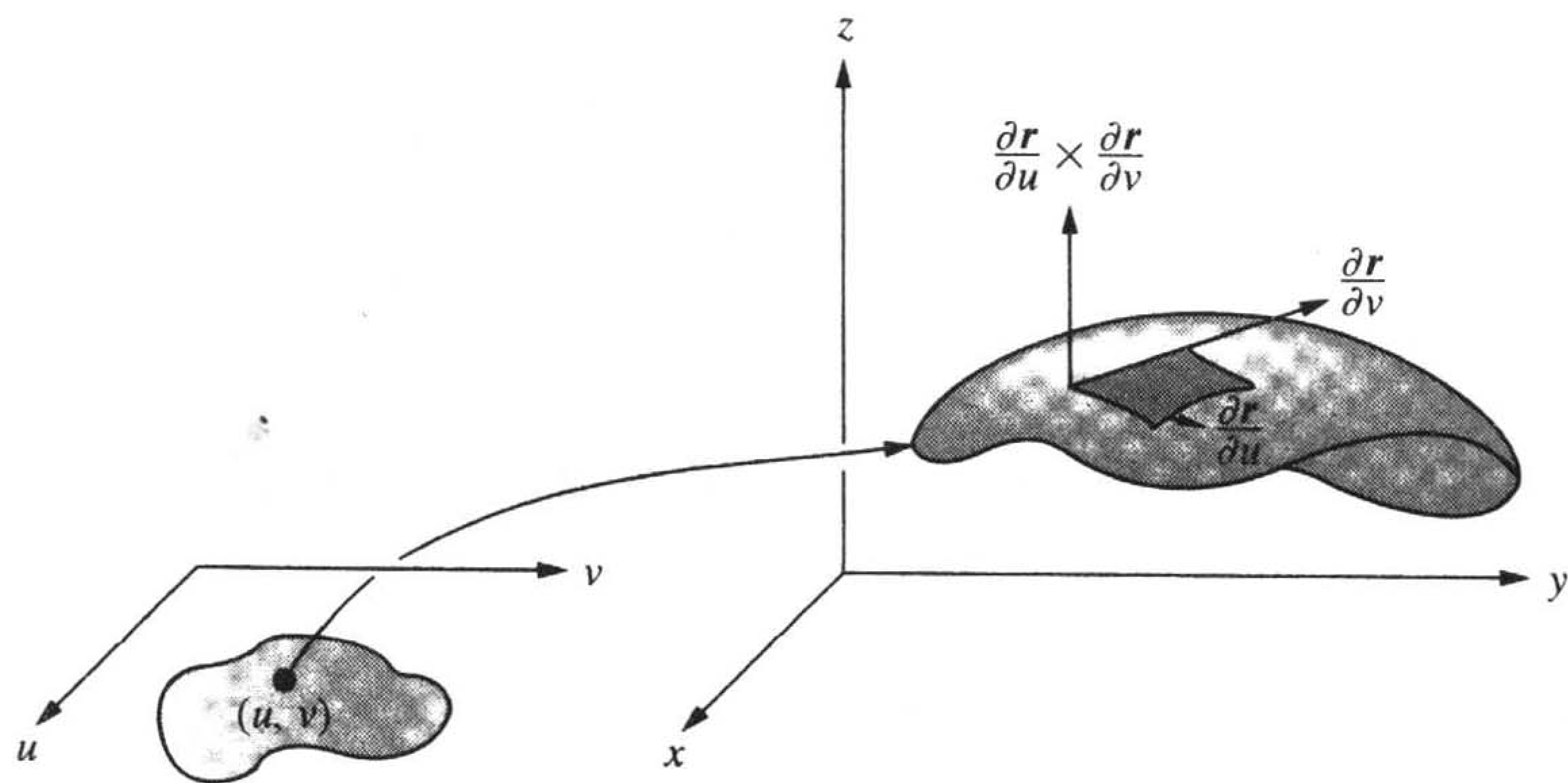


图 20.5 一个带有法向量的参数化曲面

例 20.14 固定正数 a 小于 1，考虑集合

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 < x^2 + y^2 < a^2\},$$

则集合$\mathcal{S}$是曲面．为证实这一点，我们必需找到参数化曲面，它的象等于$\mathcal{S}$．定义$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, 0 < x^2 + y^2 < a^2\}$．并定义 $\boldsymbol{r}$：$\mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), (x,y) \in \mathcal{R},$$

则$\mathcal{R}$肯定是区域，映射 $\boldsymbol{r}: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ 是连续可微的，且偏导数的计算表明这个映射的分量的偏导数是有界的：例如对$\mathcal{R}$中所有的(x, y)，第三个分量对 x 的偏导数

$$\left|\frac{\partial r_3}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

进一步，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1\right) \neq \mathbf{0}.$$

最后，显然，这个映射是一对一的且它的象等于$\mathcal{S}$． ■

例 20.15 在例 20.14 中，如果允许 $a = 1$，则如上所定义的映射 $\boldsymbol{r}: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ 不是一个参数化曲面，因为映射的第三个分量的偏导数不是有界的．但是，这个映射的象$\mathcal{S}$是一曲面．为了证实这一点，必需寻找$\mathcal{S}$的一个更好的参数化．定义$\mathcal{R}' = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < \frac{\pi}{2}\right\}$．

534

然后定义 $\boldsymbol{r}': \mathcal{R}' \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\boldsymbol{r}'(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad (u,v) \in \mathcal{R}'.$$

参数空间$\mathcal{R}'$是平面中的一个区域．显然，这个映射是连续可微的且它的分量有有界偏导数．而且这些分量的几何解释很重要（它们是球面坐标），我们看到这个映射的象是$\mathcal{S}$且映射是一对一的．最后，一个简短计算（我们把它留作习题）表明，对$\mathcal{R}$中每个点(u, v)，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) = (\sin^2 u\cos v, \sin^2 u\sin v, \sin u\cos u) \neq \mathbf{0}. \qquad \blacksquare$$

射影参数化曲面

最简单的参数化曲面是以定义在坐标平面的区域上的函数的图形为象的参数化曲面. 这样的参数曲面称为*射影参数化曲面*(projectionally parametrized surface). 例如, 如果$\mathcal{R}$是平面$\mathbb{R}^2$的一个区域及一个连续可微函数$g:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$有有界偏导数, 则下列三个映射中的每一个都描述了射影参数化曲面: 映射: $\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$定义为

$$\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,g(x,y)), \quad (x,y) \in \mathcal{R},$$
$$\boldsymbol{r}(x,z) = (x,g(x,z),z), \quad (x,z) \in \mathcal{R},$$
$$\boldsymbol{r}(y,z) = (g(y,z),y,z), \quad (y,z) \in \mathcal{R}.$$

考察第一种情况, 经简短的计算表明, 曲面在点$(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$的法向量$\boldsymbol{\eta}$是由下式给定:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}(x_0,y_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}(x_0,y_0) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right).$$

这表明: 我们在14.1节描述的二元函数的图形的曲面法向量的定义与我们这里考虑的法向量的一般定义是一致的.

曲面面积

现在我们希望定义曲面面积. 为此, 首先描述$\mathbb{R}^3$中的向量的内积与叉积的一些性质. 回忆对$\mathbb{R}^3$中的两个向量$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$, 内积$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$和叉积$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$分别定义为

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \equiv u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

和

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \equiv (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

535

内积与叉积为以分析形式描述几何概念提供了一个十分有用的方法, 下面给出内积和叉积的两条性质[⊖].

(i) 设$\boldsymbol{u}$是$\mathbb{R}^3$中的一个非零向量及ℓ为过原点且与$\boldsymbol{u}$平行的直线, 即ℓ是由形如$t\boldsymbol{u}(t\in\mathbb{R})$的点组成. 则对$\mathbb{R}^3$中的任意点$\boldsymbol{q}$, ℓ上最接近$\boldsymbol{q}$的点是$\lambda\boldsymbol{u}$, 其中$\lambda = \dfrac{\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}\rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}$.

(证明是一个计算: 证明对$\mathbb{R}$中所有的t, $\|\boldsymbol{q}-\lambda\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{q}-t\boldsymbol{u}\|^2$.)

(ii) 设向量$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$是线性无关的, 对$\mathbb{R}^3$中的一点$\boldsymbol{p}$, 定义基点为$\boldsymbol{p}$以向量$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$为界的*平行四边形*(parallelogram)是集合

$$S = \{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \mid 0 < t < 1, 0 < s < 1\}.$$

这个平行四边形的*面积*(area)定义为向量$\boldsymbol{v}$的长度乘以点$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}$到过$\boldsymbol{p}$且平行于向量$\boldsymbol{v}$的直线的距离. 由于点间距离是变换的不变量, 且面积与基点$\boldsymbol{p}$的选择无关. 假设$\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$, 则由

⊖ 在附录B中, 有$\mathbb{R}^3$中的两个向量的内积与叉积的几何性质的完整描述.

(i)得

$$\text{area } S = \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{v}\|,$$

其中 $\lambda = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$. 叉积对此给出一个更简单的公式：

$$\text{area } S = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|. \tag{20.8}$$

这个公式可由直接计算证实. 事实上，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{v}\|^2 - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle^2 \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \left\{ \|\boldsymbol{u}\|^2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} \right\} \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \langle \boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \langle \boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{v}\rangle \quad (\text{因为} \langle \boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0) \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{v}\|^2.
\end{aligned}$$

命题 20.16 设 $\boldsymbol{J}$ 是平面上的一个开矩形，且定义参数化曲面 $\boldsymbol{r}: \boldsymbol{J} \to \mathbb{R}^3$ 为

$$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, ax + by + c), \quad (x, y) \in \boldsymbol{J},$$

则曲面 $S = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{J})$ 的面积由下式给出：

536

$$\text{area } S = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \text{area } \boldsymbol{J}. \tag{20.9}$$

证明 假设 $\boldsymbol{J} = (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$. 则 S 的基点 $\boldsymbol{p} = (x_1, y_1, ax_1 + by_1 + c)$ 且以向量 $\boldsymbol{u} = (0, y_2 - y_1, b(y_2 - y_1))$ 及 $\boldsymbol{v} = (x_2 - x_1, 0, a(x_2 - x_1))$ 为界. 由公式(20.8)得，

$$\begin{aligned}
\text{area } S &= \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| \\
&= \|(a(x_2 - x_1)(y_2 - y_1), b(x_2 - x_1)(y_2 - y_1), -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1))\| \\
&= \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \text{area} \boldsymbol{J}.
\end{aligned}$$

■

公式(20.9)启发提出一般曲面面积的定义. 我们从射影参数化曲面的面积定义开始. 设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开矩形且 $g: \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ 是连续可微函数且有有界偏导数. 则由

$$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in \mathcal{R}$$

定义的映射 $\boldsymbol{r}: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ 是参数化曲面. 设 $\boldsymbol{P}$ 是参数空间 $\mathcal{R}$ 的一个划分，$\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 中的一个矩形，在 $\boldsymbol{J}$ 的内部选定一点 $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0)$，设 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})$ 是曲面 S 在点 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})$ 的切平面. 正如在 14.1 节所证明的，由点 (x, y, z) 组成的切平面满足

$$z = g(\boldsymbol{p}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})(y - y_0).$$

根据公式(20.9)，切平面 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})$ 位于矩形 $\boldsymbol{J}$ 上部分的面积 $S(\boldsymbol{J})$ 由式

$$\text{area } S(\boldsymbol{J}) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2} \text{area} \boldsymbol{J}$$

给出．如果对划分 P 的矩形 J 求和，我们得到

$$\sum_{J\in P}\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2}\operatorname{area}(J). \tag{20.10}$$

如果取$\mathcal{R}$的一个划分序列，当划分间隙收敛于 0 时，则和(20.10)是黎曼和，收敛于

$$\int_{\mathcal{R}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这就促使给出了下述射影参数化曲面的曲面面积(surface area)的定义.

定义 假设$\mathcal{R}$是平面$\mathbb{R}^2$ 的一个区域及 $g:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的且有有界的一阶偏导数．我们定义曲面

$$\mathcal{S}=\{(x,y,g(x,y))\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\in\mathcal{R}\}$$

537

的面积是由下式给定：

$$\operatorname{area}\mathcal{S}\equiv\int_{\mathcal{R}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{20.11}$$

曲面面积与曲面积分的一般定义如下：

定义 假设$\mathcal{R}$是平面$\mathbb{R}^2$ 的一个区域，设曲面$\mathcal{S}$是参数化曲面 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 的象，我们定义$\mathcal{S}$的面积为

$$\operatorname{area}\mathcal{S}\equiv\int_{\mathcal{R}}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{20.12}$$

更进一步，对一个有界连续函数 $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$，函数 $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ 在曲面$\mathcal{S}$上的曲面积分(记为 $\int_{\mathcal{S}}f\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$)定义为

$$\int_{\mathcal{S}}f\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\equiv\int_{\mathcal{R}}f(\boldsymbol{r}(u,v))\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{20.13}$$

例 20.17 考虑集合

$$\mathcal{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x>0,y>0,z>0,x^2+y^2+z^2=1\}.$$

我们在例 20.15 已经证明，$\mathcal{S}$是一个由 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 参数化的曲面，其中$\mathcal{R}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid 0<u<\pi/2,\ 0<v<\pi/2\}$及

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u),\quad(u,v)\in\mathcal{R}.$$

偏导数和叉积的简短计算表明对$\mathcal{R}$中的每个(u,v)，

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|=\sin u.$$

这样，由面积的定义及富比尼定理得，

$$\begin{aligned}\operatorname{area}\mathcal{S}&=\int_{\mathcal{R}}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{\mathcal{R}}\sin u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2}\sin u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v\\&=\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

538 由此，我们得到球心为原点半径为1的球面面积是4π. ■

正如我们已经看到的，一个曲面总是有不同的参数化. 我们希望曲面积分的定义，特别曲面面积的定义与曲面的参数化的选择无关. 例如，对一个射影参数化曲面给出的两个曲面面积的定义应该是一致的. 我们现在就建立曲面积分与参数化的无关性.

定理20.18 设$\mathcal{R}$与$\mathcal{R}'$是平面$\mathbb{R}^2$的区域，设$\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$及$\boldsymbol{r}':\mathcal{R}'\to\mathbb{R}^3$是具有同一象$\mathcal{S}$的参数化曲面，假设函数$f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$是连续且有界的，则

$$\int_{\mathcal{R}} f(\boldsymbol{r}(u,v))\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\mathcal{R}'} f(\boldsymbol{r}'(u',v'))\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(u',v')\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(u',v')\right\|\mathrm{d}u'\mathrm{d}v'. \tag{20.14}$$

证明 由参数化曲面的定义知，每一个映射$\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$及$\boldsymbol{r}':\mathcal{R}'\to\mathbb{R}^3$都是一对一的，且由假设，每一个象都是$\mathcal{S}$. 对$\mathcal{R}$中的每一点$(u, v)$，定义$\boldsymbol{g}(u, v)=(u', v')$是$\mathcal{R}'$中的唯一点，在此点处有

$$\boldsymbol{r}'(u',v')=\boldsymbol{r}(u,v). \tag{20.15}$$

这样定义的映射$\boldsymbol{g}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$是一对一的且它的象等于$\mathcal{R}'$. 如果用分量函数写出参数化曲面及映射$\boldsymbol{g}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}'$，则显然公式(20.15)等价于下面的方程组：

$$\begin{aligned} r_1'(g_1(u,v),g_2(u,v)) &= r_1(u,v)\\ r_2'(g_1(u,v),g_2(u,v)) &= r_2(u,v)\\ r_3'(g_1(u,v),g_2(u,v)) &= r_3(u,v).\end{aligned} \tag{20.16}$$

我们断言：映射$\boldsymbol{g}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$是光滑的变量替换. 这意味着它是连续可微的且在每一点上有可逆的导数矩阵. 设(u_0, v_0)是$\mathcal{R}$中的点，由假设知，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u}(\boldsymbol{g}(u_0,v_0))\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial v}(\boldsymbol{g}(u_0,v_0))\neq\boldsymbol{0},$$

不妨假设这个叉积的最后一个分量是非零的. 这样，我们可以在点$g(u_0, v_0)$处运用平面反函数定理于映射(r_1', r_2')：$\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$得出，在$\boldsymbol{g}(u_0, v_0)$处存在一个邻域，使得映射$(r_1', r_2')$：$\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$
539 有连续可微的逆. 从方程组(20.16)的前两个方程得出，存在(u_0, v_0)的一个邻域$\mathcal{N}$使得，

$$(g_1,g_2)=(r'_1,r'_2)^{-1}\circ(r_1,r_2).$$

由于连续可微映射的复合仍是连续可微的，这就得到$\boldsymbol{g}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$是连续可微的. 现在还剩下验证在$\mathcal{R}$中的每一点处$\boldsymbol{g}$：$\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$的导数矩阵是可逆的. 这可以从下面的恒等式得出：对$\mathcal{R}$中的每一点(u, v)，

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(\boldsymbol{g}(u,v))\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial v'}(\boldsymbol{g}(u,v))\right\|\cdot|\det\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}(u,v)|. \tag{20.17}$$

这个等式是链式法则的一个推论. 事实上，方程组(20.16)意味着$\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$是复合$\boldsymbol{r}'\circ\boldsymbol{g}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$. 由链式法则得，对$\mathcal{R}$中所有的$(u, v)$，

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{g}(u,v))\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}(u,v).$$

这是介于两个3×2阶矩阵之间的等式. 按所有2×2阶子矩阵计算这一等式及应用2×2阶行列式的乘积性质(见习题14)，对每个下标$i=1, 2, 3$及$\mathcal{R}$中的每一点(u, v)得出，

$$\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v), \boldsymbol{e}_i \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(u',v') \times \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial v'}(u',v'), \boldsymbol{e}_i \right\rangle \cdot \det \boldsymbol{Dg}(u,v),$$

即

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(u',v') \times \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial v'}(u',v') \right) \cdot \det \boldsymbol{Dg}(u,v). \tag{20.18}$$

等式两边取模，便得等式(20.17).

现在已建立了 $\boldsymbol{g}: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^2$ 是光滑的变量替换，我们可以应用 19.2 节中的变量替换公式(19.11)，计算(20.14)右边的积分. 运用公式(20.17)及变量替换公式，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{R}'} f(\boldsymbol{r}'(u',v')) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(u',v') \times \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial v'}(u',v') \right\| \mathrm{d}u'\mathrm{d}v' \\ &= \int_{\mathcal{R}} f(\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{g}(u,v))) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial u'}(\boldsymbol{g}(u,v)) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial v'}(\boldsymbol{g}(u,v)) \right\| \cdot |\det \boldsymbol{Dg}(u,v)| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathcal{R}} f(\boldsymbol{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

■ 540

习题

1. 设 a、b、c 及 d 是实数且 $c \neq 0$，我们考虑平面

$$ax + by + cz + d = 0.$$

用 $\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, -(au + bv + d)/c)$ 参数此平面并运用公式

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

求这个平面在 (x, y, z) 点处的法向量.

2. 设曲面

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2, |x| + |y| < 4\}.$$

求此曲面上每一点的单位法向量.

3. 对 $a > 0$，$b > 0$，证明：圆柱面

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid 0 < x < a, z > 0, y^2 + z^2 = b^2\}$$

是一曲面，并求出它的曲面面积.

4. 对 $r > 0$ 及 $h > 0$，锥面

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, z^2 = h^2(r^2 - x^2 - y^2)\}.$$

证明它是曲面，并求它的面积.

5. 求如下平面的曲面面积：

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, 2x + y + z = 16\}.$$

6. 证明：

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) \mathrm{d}\sigma = \frac{9}{4}\pi,$$

其中 $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, 3 > z > 0, z^2 = 3(x^2 + y^2)\}$.

7. 计算

$$\iint_{S} (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \mathrm{d}\sigma,$$

其中 S 是锥面 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ 被柱面 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 2x = 0\}$ 所截得的那部分.

8. 对 $0 < a < b$，一曲面有如下形式

$$\{(u\cos v, u\sin v, g(u)) \mid a < u < b, 0 < v < 2\pi\},$$

其中函数 g: $(a, b) \to \mathbb{R}$ 有一个有界连续导数，它称为旋转曲面(surface of revolution)，证明：旋转曲面的面积由下式给出：

541

$$2\pi\int_a^b u\sqrt{1+(g'(u))^2}\,\mathrm{d}u.$$

9. 假设$\mathcal{R}$是平面中的一个凸区域，$g:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$有连续有界偏导数. 证明：曲面$\mathcal{S}=\{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y)\in\mathcal{R}\}$有等于$\mathcal{R}$的面积，当且仅当 $g:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ 是常值.

10. 对$\mathbb{R}^3$ 中的任意两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，证明：

$$\|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\|^2\cdot\|\boldsymbol{B}\|^2 - \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle^2.$$

(提示：从公式(20.8)的验证可得.)

11. 运用公式(20.18)证明：曲面的法向量的定义是与参数化的选择无关.

12. 对参数化曲面 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$，在$\mathcal{R}$中的每一点$(u, v)$处，定义三个实函数 $E:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$、$F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ 及 $G:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ 分别为

$$E(u,v) = \left\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\right\rangle,\quad F(u,v) = \left\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right\rangle \text{ 和 } G(u,v) = \left\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right\rangle.$$

运用习题 10 中的恒等式，重写出曲面$\mathcal{S}$在参数化 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 下的曲面面积公式是

$$\text{area }\mathcal{S} = \int_{\mathcal{R}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

13. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的向量，证明：拉格朗日恒等式

$$\langle\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\rangle = \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\rangle\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}\rangle - \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}\rangle\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\rangle.$$

(提示：首先证明当四个向量是基向量时，这个公式成立，然后，利用叉积和内积的线性性得到一般情况.)

14. 对两个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$，通过具体的计算，证明：

$$\det\boldsymbol{AB} = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}.$$

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 是 3×2 矩阵及 $\boldsymbol{B}$ 是 2×2 矩阵，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，证明：等式

$$\|\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2\|\cdot|\det\boldsymbol{B}| = \|\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2\|.$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{C}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列向量.

16. 对参数化曲面 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 及$\mathcal{R}$中的参数值(u_0, v_0). 证明：存在(u_0, v_0)的一个邻域$\mathcal{N}$，使得 $\boldsymbol{r}(\mathcal{N})$是射影参数化曲面的象.(提示：如同定理 20.18 的证明，运用反函数定理.)

17. 假定函数 h: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，设 $\boldsymbol{p}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的一点，导数向量 $\nabla h(\boldsymbol{p})\neq0$ 且定义 $c=h(\boldsymbol{p})$. 运用隐函数定理证明：在 $\boldsymbol{p}$ 点存在一个邻域$\mathcal{N}$，使得$\mathcal{S}=\{(x, y, z)\in\mathcal{N} \mid h(x, y, z)=c\}$是一曲面.

542

18. 对参数化曲面 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 及连续有界函数$f:S\to\mathbb{R}$，其中 S 是 $\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ 的象. 证明：

$$\left|\int_S f\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant MA,$$

其中对 S 上所有的点 $\boldsymbol{p}$，有 $|f(\boldsymbol{p})|\leqslant M$，$A$ 是 S 的曲面面积.

20.3 格林公式和斯托克斯积分公式

对$\mathbb{R}$ 中的有界闭区间$[a, b]$及在(a, b)有连续有界导数的连续函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 由微积分第一基本定理断言

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a). \tag{20.19}$$

这个公式在多元函数里有重要的推广. 本节我们先把这个公式推广到如下情形：$\mathbb{R}^2$ 中某些区域$\mathcal{R}$来代替开区间(a, b)(见格林公式)及在$\mathbb{R}^3$ 中某些曲面来代替开区间(a, b)(见斯托克斯公式).

一条参数化路径 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 称为简单的(simple)，如果它到区间$[a,b)$的限制是一对一的；称它是闭的(closed)，如果 $\gamma(a)=\gamma(b)$. $\mathbb{R}^2$ 中的有界开子集 Ω，如果 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是一条简单闭的参数化路径的象 $\boldsymbol{\Gamma}$. 这样的 Ω 将成为我们所关注的.

例 20.19 假设函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 及 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，且对(a,b)中所有的 x，有$g(x)<h(x)$. 定义

$$\Omega=\{(x,y)\mid a<x<b,g(x)<y<h(x)\}\quad 及\quad \gamma=\partial\Omega.$$

这个集合是我们在例 20.8 中所考虑的. 在 $g(a)<h(a)$及 $g(b)<h(b)$这种情况下，由例 20.4 给出的 γ 的参数化是简单的、闭的参数化路径. 而在一端有等号时，我们可忽略相应于这端的路径，再次得到边界的简单的、闭的参数化. 由明显的几何理由，边界的简单的、闭的参数化等价于$\partial\Omega$的逆时针的参数化(counterclockwise parametrization)$\boldsymbol{\Gamma}$. ■

例 20.20 假设函数 $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ 和 $h:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是连续的且对(c,d)中所有的 y，有$g(y)<h(y)$. 定义

$$\Omega=\{(x,y)\mid g(y)<x<h(y),c<y<d\}\quad 及\quad \gamma=\partial\Omega.$$

543

这里再一次得到 Ω 是$\mathbb{R}^2$ 中的有界开子集，它的边界可以参数化成为简单的、闭的参数化路径. 事实上，当 $g(c)<h(c)$及 $g(d)<h(d)$时，下面定义这样一个参数化：

$$\gamma(t)=\begin{cases}(g(d+4t(c-d)),d+4t(c-d)) & 若\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}\\ \left(g(c)+4\left(t-\frac{1}{4}\right)(h(c)-g(c)),c\right) & 若\ \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \left(h\left(c-4\left(t-\frac{1}{2}\right)(c-d)\right),c-4\left(t-\frac{1}{2}\right)(c-d)\right) & 若\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}\\ \left(h(d)+4\left(t-\frac{3}{4}\right)(g(d)-h(d)),d\right) & 若\ \frac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

边界的参数化如图 20.6 所示.

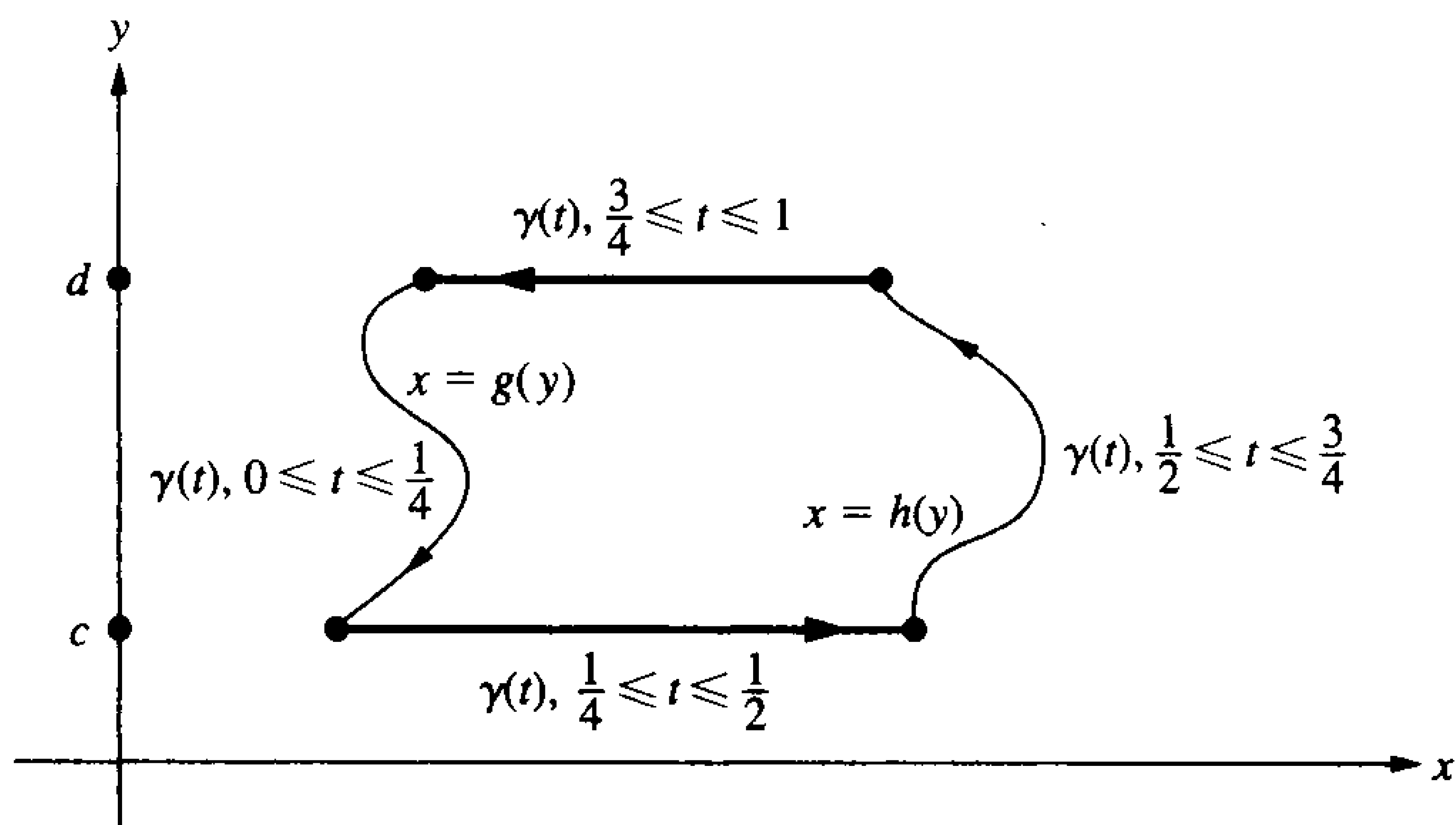


图 20.6 $\partial\Omega$ 的一个具体的参数化

再次由于明显几何理由，这个参数化或等价于它的简单的、闭的参数化，称为$\partial\Omega$ 的逆时

针参数化 $\boldsymbol{\Gamma}$. ■

命题 20.21 假设函数 g: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 与 h: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是连续的，且对 (a, b) 中所有的 x，有 $g(x)<h(x)$，定义

$$\Omega = \{(x,y) \mid a < x < b, g(x) < y < h(x)\} \quad 及 \quad \boldsymbol{\Gamma} = \partial\Omega.$$

设函数 N: $\Omega\cup\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$ 是连续的，使得 $\dfrac{\partial N}{\partial y}$: $\Omega\to\mathbb{R}$ 存在且连续有界. 则

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\Gamma} N(x,y)\,\mathrm{d}x, \tag{20.20}$$

这里右边的积分是沿着路径 $\boldsymbol{\Gamma}$ 逆时针方向参数化计算的.

544

证明 证明的中心是运用富比尼定理，因而可以应用微积分的第一基本定理. 首先为方便起见，用 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}_1\cup\boldsymbol{\Gamma}_2\cup\boldsymbol{\Gamma}_3\cup\boldsymbol{\Gamma}_4$ 来表达 $\boldsymbol{\Gamma}$，其中 $\boldsymbol{\Gamma}_1=\{(x, g(x)) \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$\boldsymbol{\Gamma}_2=\{(b, y) \mid g(b)\leqslant y\leqslant h(b)\}$，$\boldsymbol{\Gamma}_3=\{(x, h(x)) \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，及 $\boldsymbol{\Gamma}_4=\{(a, y) \mid g(a)\leqslant y\leqslant h(a)\}$. 运用富比尼定理、微积分第一基本定理及曲线积分的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial N}{\partial y}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b\left[\int_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial N}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b\{N(x,h(x)) - N(x,g(x))\}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b N(x,h(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b N(x,g(x))\,\mathrm{d}x\\
&= -\left\{\int_a^b N(x,g(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b N(x,h(x))\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\left\{\int_{\Gamma_1} N\mathrm{d}x + 0 + \int_{\Gamma_3} N\mathrm{d}x + 0\right\}\\
&= -\left\{\int_{\Gamma_1} N\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} N\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} N\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_4} N\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\int_{\Gamma} N\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

■

命题 20.22 假设函数 g: $[c, d]\to\mathbb{R}$ 与 h: $[c, d]\to\mathbb{R}$ 是连续的，且对 (c, d) 中所有的 y，有 $g(y)<h(y)$. 定义

$$\Omega = \{(x,y) \mid g(y) < x < h(y), c < y < d\} \quad 及 \quad \boldsymbol{\Gamma} = \partial\Omega.$$

设函数 M: $\Omega\cup\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，使得 $\partial M/\partial x$: $\Omega\to\mathbb{R}$ 存在且是连续有界的，则

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} M(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{20.21}$$

这里右边的积分是沿着路径 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的逆时针方向参数化计算的.

证明 如同命题 20.21 的证明，我们将运用富比尼定理以便可以应用微积分第一基本定理. 把 $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示为 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}_1\cup\boldsymbol{\Gamma}_2\cup\boldsymbol{\Gamma}_3\cup\boldsymbol{\Gamma}_4$，其中 $\boldsymbol{\Gamma}_1=\{(g(y), y) \mid c\leqslant y\leqslant d\}$，$\boldsymbol{\Gamma}_2=\{(x, c) \mid g(c)\leqslant x\leqslant h(c)\}$，$\boldsymbol{\Gamma}_3=\{(h(y), y) \mid c\leqslant y\leqslant d\}$，及 $\boldsymbol{\Gamma}_4=\{(x, d) \mid g(c)\leqslant x\leqslant h(d)\}$. 运用富

545

比尼定理、微积分第一基本定理以及曲线积分的定义，我们有

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial M}{\partial x}(x,y) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left\{ \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial M}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y$$
$$= \int_c^d \{ M(h(y),y) - M(g(y),y) \} \mathrm{d}y$$
$$= \int_c^d M(h(y),y)\,\mathrm{d}y - \int_c^d M(g(y),y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\Gamma_3} M\mathrm{d}y + 0 + \int_{\Gamma_1} M\mathrm{d}y + 0$$
$$= \int_{\Gamma_1} M\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} M\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_3} M\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_4} M\mathrm{d}y$$
$$= \int_\Gamma M\mathrm{d}y.$$ ■

定义 平面$\mathbb{R}^2$上的区域Ω称为**格林域**(Green's domain)，如果它的边界$\Gamma=\partial\Omega$是简单的、闭的分段光滑参数化路径$\gamma:I\to\mathbb{R}^2$的象，且下述性质成立：假设两个函数$M:\Omega\cup\Gamma\to\mathbb{R}$和$N:\Omega\cup\Gamma\to\mathbb{R}$是连续的，且它们的限制$M:\Omega\to\mathbb{R}$及$N:\Omega\to\mathbb{R}$是连续可微的且有有界的偏导数. 则**格林公式**(Green's Formula)成立：

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial M}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial y}(x,y) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma [M(x,y)\,\mathrm{d}y + N(x,y)\,\mathrm{d}x], \tag{20.22}$$

这里右边的积分是沿着$\gamma:I\to\mathbb{R}^2$计算的. 这样的参数化称为**格林参数化**(Green's parametrization).

首先取$M(x,\ y)$恒等于0，然后取$N(x,\ y)$恒等于0，我们看到：一个域是格林域，仅需分别验证公式

$$\iint_\Omega \frac{\partial N}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_\Gamma N(x,y)\,\mathrm{d}x$$

及

$$\iint_\Omega \frac{\partial M}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma M(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

命题20.21和命题20.22提供了证明某些区域是格林域的一种方法，即对它们的边界用一个合适的参数化.

546

例20.23 定义$\Omega=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$. 它的边界$\Gamma$是以原点为中心，半径为1的圆. 显然$\Omega$是命题20.21和命题20.22都可应用的域，所以对由$\gamma(\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta)(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$定义的参数化$\gamma$：$[0,\ 2\pi]\to\mathbb{R}^2$，它是格林域. 从而对两个连续函数$M:\Omega\cup\Gamma\to\mathbb{R}$和$N:\Omega\cup\Gamma\to\mathbb{R}$，及它们的限制$M:\Omega\to\mathbb{R}$与$N:\Omega\to\mathbb{R}$是连续可微的且有有界的偏导数，我们有

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \left[\frac{\partial M}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial y}(x,y) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} [M(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta - N(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]\,\mathrm{d}\theta.$$ ■

例20.24 定义$\Omega=\{(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\mid 0<\theta<3\pi/2,\ 0<r<1\}$，则$\Omega$是关于逆时针参数化的格林域，虽然对这个集合命题20.21或命题20.22都不能直接应用. 然而，令

$$\Omega_+ = \{(x,y)\in\Omega \mid x>0\} \quad 及 \quad \Omega_- = \{(x,y)\in\Omega \mid x<0\}.$$

我们看到Ω_+与Ω_-都是格林域，因为命题20.21及命题20.22都可以应用于这些集上. 把格林公式应用于这些集合，我们便得到对Ω的格林公式，因为曲线积分沿着公共边界的贡献随着

关于各自的逆时针参数化正好抵消. 如图 20.7 所示.

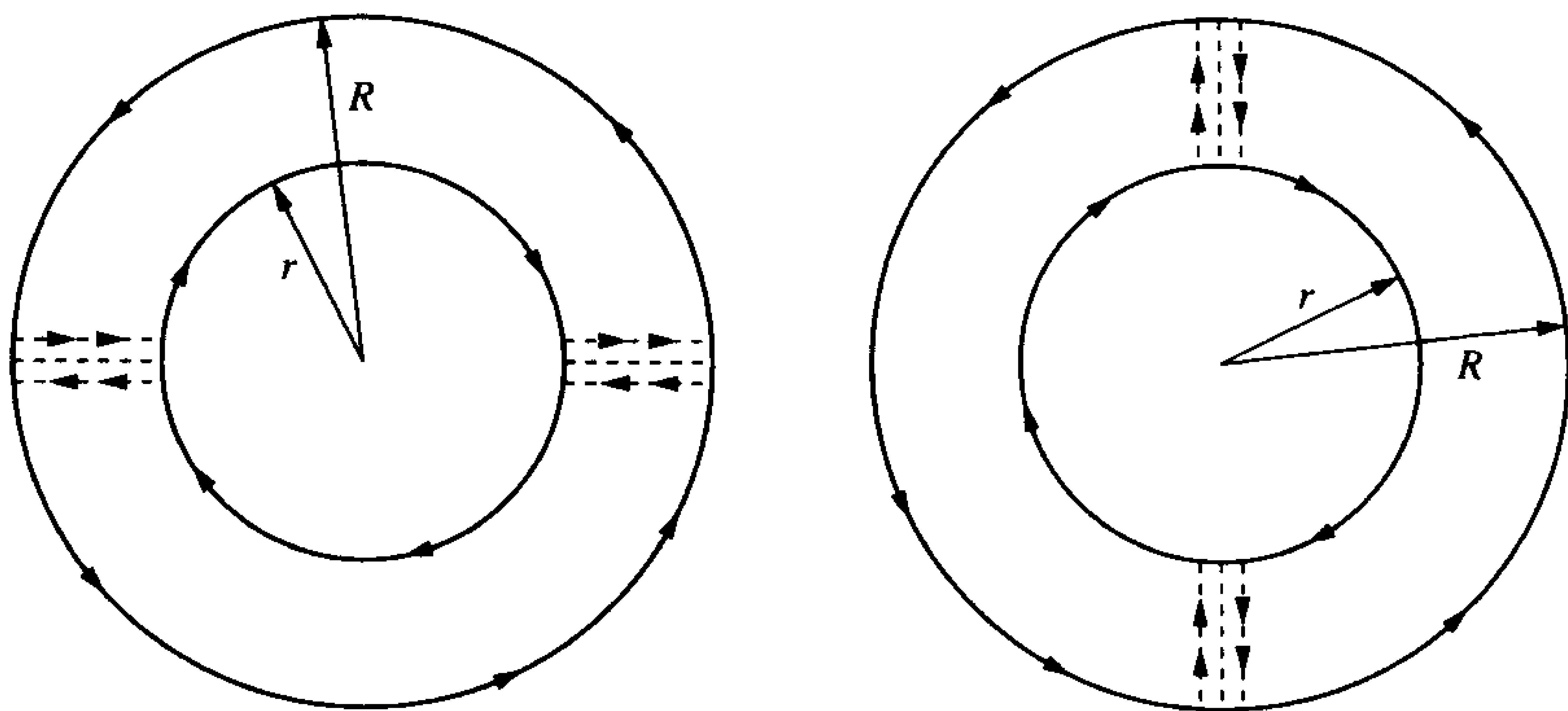


图 20.7 被切过的环形是格林域 ■

例 20.25 对 $0<r<R$, 考虑圆环域 $\Omega=\{(x,y)\mid r^2<x^2+y^2<R^2\}$, 这个圆环的边界是两个圆的并集. 假设两个函数 $M:\Omega\cup\partial\Omega\to\mathbb{R}$ 与 $N:\Omega\cup\partial\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续的, 它们的限制 $M:\Omega\to\mathbb{R}$ 与 $N:\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续可微的且有有界偏导数, 则

547

$$\iint_{r^2<x^2+y^2<R^2}\left[\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial y}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x^2+y^2=R^2}[M(x,y)\mathrm{d}y+N(x,y)\mathrm{d}x]-\int_{x^2+y^2=r^2}[M(x,y)\mathrm{d}y+N(x,y)\mathrm{d}x], \tag{20.23}$$

这里积分都是关于逆时针参数化计算的. 为证明这一公式, 只要在先设 $M(x,y)$ 恒为 0. 然后再设 $N(x,y)$ 恒为 0 情况下证实此公式就够了. 在 $M(x,y)$ 恒为 0 时, 用 x 轴把圆环域划分成两个域 Ω_+ 与 Ω_-, 对每一个都可运用命题 20.21. 应用命题 20.21 到每一个域并求和得积分等式. 由于每个曲线积分的逆时针参数化的选择, 曲线积分中位于 x 轴上的部分, 恰好抵消, 我们得到当 $M(x,y)$ 恒为 0 时的公式. 类似地计算 $N(x,y)$ 恒为 0 这一情况, 但这次用 y 轴去切割圆环域, 且用命题 20.22 建立$N(x,y)$ 恒为 0 时的上述公式. ■

对一个边界为 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的格林域 Ω, 取 $M(x,y)\equiv x$, $N(x,y)\equiv -y$, 我们得到 Ω 的面积公式如下:

$$\text{area}\Omega=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}[x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x], \tag{20.24}$$

这里曲线积分是关于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的格林参数化计算的.

例 20.26 椭圆域 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1\}$ 是格林域, 因为它是$\mathbb{R}^2$ 的一个有界开子集且命题 20.21 与命题 20.22 可应用. 由上面的面积公式得,

$$\text{area}\Omega=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos\theta(b\cos\theta)-b\sin\theta(-a\sin\theta)]\mathrm{d}\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi ab. \quad ■$$

上面所展现的这些与边界的参数化相关的格林域的例子, 都是构筑于命题 20.21 与命题 20.22 所描述的域. 事实上, 对$\mathbb{R}^2$ 中的有界开子集并结合着它的边界的参数化成为格林域有着更普通一般的条件: 设 Ω 是$\mathbb{R}^2$ 的一个有界开子集, 它的边界是简单的、闭的且分段光滑参数

化路径 γ: $[a, b]\to\mathbb{R}^2$ 的象且有 [548]

$$\int_{\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2}[x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x] > 0, \tag{20.25}$$

则具有这个参数化的 Ω 是格林域. 直观上看这个结果是对的，当把 Ω 分成“片”，而使得在片上命题 20.21 或命题 20.22 可以应用，注意到曲线积分沿着具有公共边界的路径，两片正好相互抵消. 这是以十分不同的事实来提供一个严格的证明，一个完全精确的证明涉及相当多的技术细节. 这里我们将不证明一般的结果. 面积公式(20.24)正是为了使关于参数化的假设(20.25)成立. 事实上，(20.25)是取作为一条简单的、闭的分段光滑参数化路径 γ: $[a, b]\to\mathbb{R}^2$ 是逆时针参数化的分析定义.

假设 Ω 是格林域，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是边界，并且有一个相关的弧长格林参数化 $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$. 固定一个参数值 s，在该处 γ 可导. 定义 $\boldsymbol{\eta}(s)=(\gamma_2'(s), -\gamma_1'(s))$. 考察到有

$$\|\gamma'(s)\| = 1, \quad \|\boldsymbol{\eta}(s)\| = 1 \quad 及 \quad \langle\gamma'(s),\boldsymbol{\eta}(s)\rangle = 0,$$

所以向量 $\boldsymbol{N}\equiv\boldsymbol{\eta}(s)$ 是单位向量，它垂直于单位切向量 $\boldsymbol{T}\equiv\gamma'(s)$. 法向量的方向是取决于参数化 γ 的. 正如我们在特殊例子中所看到的，它的几何意义是它为“外向”法线. 为方便起见，我们把这个法向量的参数化作为 Ω 的边界的格林参数化. 对一个函数 w: $\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，这里$\mathcal{N}$是点 $\gamma(s)\equiv\boldsymbol{p}$ 的一个邻域，回忆在 13.3 节我们建立的方向导数引理，它提供了函数 w 在点 $\boldsymbol{p}$ 沿着方向 $\boldsymbol{q}$ 的方向导数公式：

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}) \equiv \lim_{t\to 0}\frac{w(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})-w(\boldsymbol{p})}{t} = \langle\nabla w(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{q}\rangle.$$

从而我们有下面的关于方向 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的方向导数公式，分别称为函数 w: $\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 处切向和法向导数：

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{T}}(\boldsymbol{p}) = \langle\nabla w(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{T}\rangle \quad 和 \quad \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{N}}(\boldsymbol{p}) = \langle\nabla w(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{N}\rangle.$$

习惯上把法向导数记为$\dfrac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\eta}}$，因此，特别地，

$$\frac{\partial x}{\partial\boldsymbol{\eta}} = \gamma_2' \quad 及 \quad \frac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\eta}} = -\gamma_1'.$$

微积分第一基本定理和乘积的导数公式给出了关于一元函数的分部积分公式. 我们现在用格林公式及乘积导数公式给出一个关于二元函数的分部积分公式. [549]

推论 20.27(分部积分法) 设 Ω 是以 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为边界的格林域. 假设函数 $a(x, y)$、$b(x, y)$、$u(x, y)$和 $v(x, y)$在含有 $\Omega\cup\boldsymbol{\Gamma}$ 的开集$\mathcal{O}$上有连续有界偏导数，则

$$\iint_\Omega\left[a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma\left[au\frac{\partial x}{\partial\boldsymbol{\eta}}+bv\frac{\partial y}{\partial\boldsymbol{\eta}}\right]\mathrm{d}s - \iint_\Omega\left[\frac{\partial a}{\partial x}u+\frac{\partial b}{\partial y}v\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中法向参数化与 Ω 边界的格林参数化相关.

证明 定义

$$M(x,y) = a(x,y)u(x,y) \quad 及 \quad N(x,y) = -b(x,y)v(x,y), \quad (x,y)\in\mathcal{O}.$$

由格林公式得，

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial(au)}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial(bv)}{\partial y}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\Gamma}[a(x,y)u(x,y)\mathrm{d}y-b(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x].$$

用乘积的导数规则，左边的部分可写成

$$\iint_{\Omega}\left[a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial a}{\partial x}u+\frac{\partial b}{\partial y}v\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而右边根据曲线积分的定义与所选的法向参数化，有

$$\gamma_2'=\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\eta}}\quad 与\quad -\gamma_1'=\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

所以有

$$\int_{\gamma}[a(x,y)u(x,y)\mathrm{d}y-b(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x]$$
$$=\int_0^{\ell}[a(\gamma(s))u(\gamma(s))\gamma_2'(s)-b(\gamma(s))v(\gamma(s))\gamma_1'(s)]\mathrm{d}s$$
$$=\int_{\gamma}\left[au\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\eta}}+bv\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right]\mathrm{d}s.$$

从这些式子得到分部积分公式. ■

现在我们把格林公式中的曲面$\mathcal{S}=\{(x,\ y,\ 0)\mid(x,\ y)\in\Omega\}$从$\mathbb{R}^2$中的格林域提升为$\mathbb{R}^3$中的在格林域上可参化的曲面. 这一推广称为斯托克斯公式(Stokes's Formula). 为了给出斯托克斯公式中的积分的几何描述，引进向量场(rector field)概念是有用的，它是以一种几何方式考虑把$\mathbb{R}^3$的子集映成$\mathbb{R}^3$的映射. 对$\mathbb{R}^3$的一个子集D及一个映射$\boldsymbol{F}:D\to\mathbb{R}^3$，对$D$中的每个点$\boldsymbol{p}$，我们能指派$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$是一个向量，它与从$\boldsymbol{p}$到$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$的有向线段相关. 进一步，如果$\boldsymbol{u}:D\to\mathbb{R}^3$是另一个向量场且对$D$中所有的$\boldsymbol{p}$有$\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p})\|=1$，则对$D$中的每个点$\boldsymbol{p}$，由内积的几何描述得，$\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{p})\rangle$是向量$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$在方向$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p})$上的分量. 形如$\boldsymbol{p}\to\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{p})\rangle$的函数的曲线积分及曲面积分是格林公式推广到$\mathbb{R}^3$中的曲面上的本质成分.

550

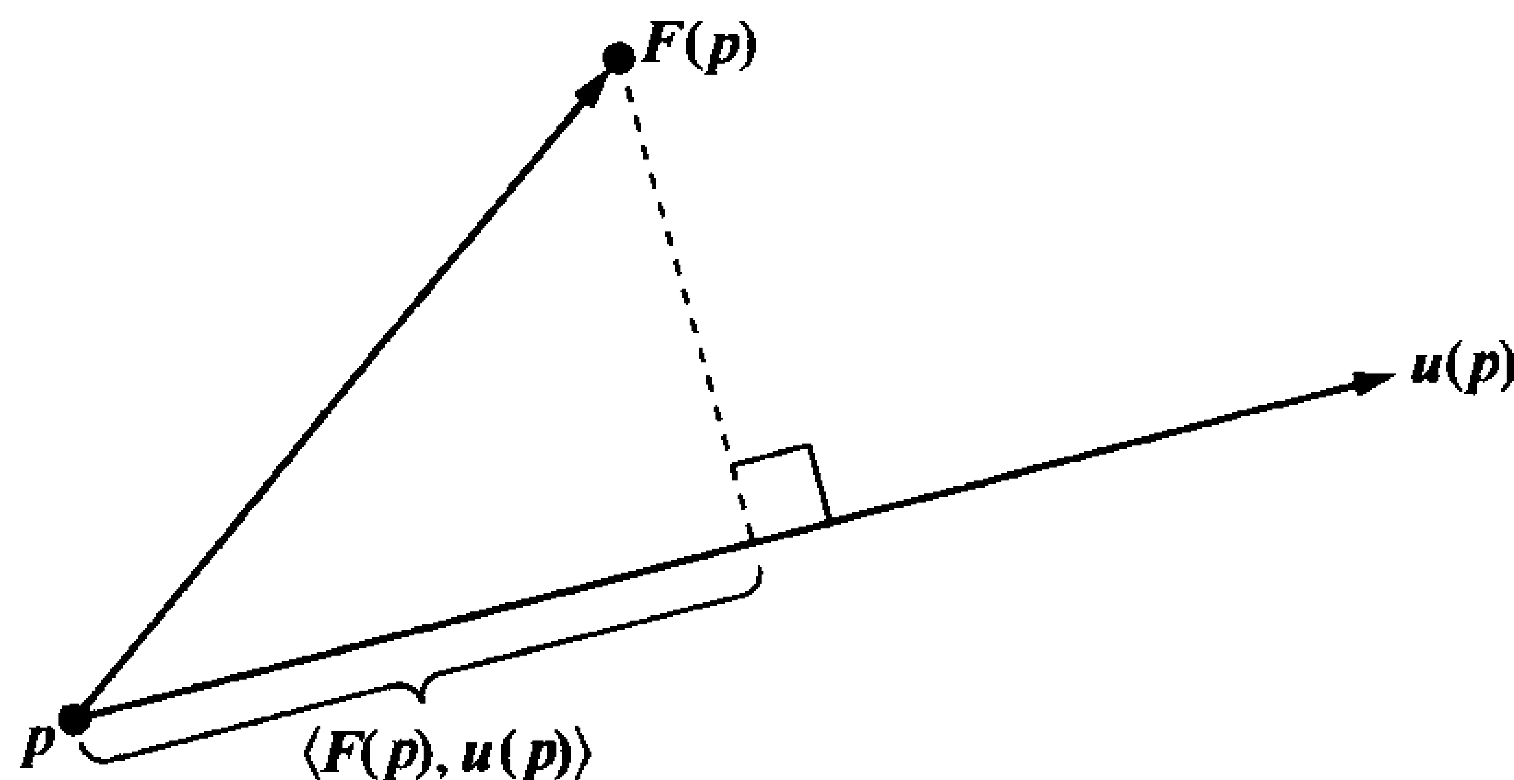


图 20.8 $\boldsymbol{F}$ 在沿着 $\boldsymbol{p}$ 的投影

定义 对以$\boldsymbol{\Gamma}$为象的分段光滑参数化路径γ: $[a,\ b]\to\mathbb{R}^3$及连续有界映射$\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{\Gamma}\to\mathbb{R}^3$，定义

$$\int_{\Gamma}\langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s \equiv \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t. \tag{20.26}$$

观察到如果对$(a,\ b)$中的每一个参数值t(可能除有限个参数值外)，我们定义

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

则$\boldsymbol{T}(t)$是路径$\boldsymbol{\Gamma}$在点$\gamma(t)$处的单位切向量，且

$$\int_a^b \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)),\boldsymbol{T}(t)\rangle \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

因此这个曲线积分是$\boldsymbol{F}$的切向分量的曲线积分，这里切线方向是由路径的参数化的选择决定的、公式(20.26)的右边的积分的符号依赖于参数化的选择. [551]

定义 对有象$\mathcal{S}$的参数化曲面$\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$，及连续映射$\boldsymbol{G}:\mathcal{S}\to\mathbb{R}^3$，定义

$$\iint_{\mathcal{S}}\langle \boldsymbol{G},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\sigma \equiv \iint_{\mathcal{R}}\left\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{20.27}$$

观察到如果对$\mathcal{R}$中的每一参数值$(u,\ v)$，定义

$$\boldsymbol{\eta}(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}/\partial u(u,v)\times\partial \boldsymbol{r}/\partial v(u,v)}{\|\partial \boldsymbol{r}/\partial u(u,v)\times\partial \boldsymbol{r}/\partial v(u,v)\|},$$

则$\boldsymbol{\eta}(u,\ v)$是曲面$\mathcal{S}$在点$\boldsymbol{r}(u,\ v)$的单位法向量，及

$$\iint_{\mathcal{S}}\langle \boldsymbol{G},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathcal{R}}\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}(u,v)),\boldsymbol{\eta}(u,v)\rangle\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以积分(20.27)是向量场$\boldsymbol{G}$在曲面$\mathcal{S}$的法方向的分量的曲面积分. 再次，在这种情况下，(20.27)的右边的积分符号也依赖于参数化的选择.

定义 设$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^3$的开子集且假设映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$是连续可微的. 一个相伴映射称为$\boldsymbol{F}$的**旋度**(curl)且记为$\mathrm{curl}\boldsymbol{F}$：$\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$，定义如下：如果对$\mathcal{O}$中所有的$(x,\ y,\ z)$，我们用分量把$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$表示为

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)),$$

则对$\mathcal{O}$中所有的$(x,\ y,\ z)$，

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F}(x,y,z) \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

映射的旋度为什么是有意义的这一点并不明显. 下面将看到旋度是提升格林公式出平面的一个本质成分[⊖].

例 20.28 假设映射$M:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$与$N:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是连续可微的，对$\mathbb{R}^3$中所有的$(x,\ y,\ z)$定义，

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (N(x,y),M(x,y),0).$$

则从定义直接得，对$\mathbb{R}^3$中所有的$(x,\ y,\ z)$，

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(0,0,\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial y}(x,y)\right).$$ ■ [552]

⊖ 在物理学与工程学的研究中，旋度也是在许多不同的背景中有特殊物理意义的重要算子，例如，最值得注意的物理学命题中的 Maxwell 方程，就是电场和磁场向量的旋度间关系的断言所组成的.

直接从旋度定义及求导的线性性得到，旋度运算是线性的，即对$\mathbb{R}^3$中的开子集$\mathcal{U}$，两个连续可微映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$与$\boldsymbol{H}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$，及任意两个数$\alpha$与$\beta$，我们有

$$\mathrm{curl}[\alpha\boldsymbol{F}+\beta\boldsymbol{H}]=\alpha\mathrm{curl}\boldsymbol{F}+\beta\mathrm{curl}\boldsymbol{H}.$$

把格林公式提升到$\mathbb{R}^3$中的曲面依赖于格林公式本身及下面的恒等式.

引理 20.29(斯托克斯恒等式) 对$\mathbb{R}^2$中的一个开子集$\mathcal{O}$，假设映射$\boldsymbol{r}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$的分量有连续的二阶偏导数. 设$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^3$中的一个开子集，它包含$\boldsymbol{r}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$的象，且假设映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$是连续可微的. 则对$\mathcal{O}$中的每一点$(u,v)$，有

$$\left\langle \mathrm{curl}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\rangle$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left[\left\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\rangle\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[\left\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\right\rangle\right].$$

证明 首先考虑到斯托克斯恒等式的左右两边都是线性依赖于向量场$\boldsymbol{F}$的. 这样，要证实此等式，只要考虑映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$的两个分量函数为0时出现的三种情况就够了. 我们将在对$\mathcal{U}$中所有的(x,y,z)，

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(g(x,y,z),0,0)\tag{20.28}$$

这样的情况下证实此等式.

直接计算形如(20.28)的$\boldsymbol{F}$表明，对$\mathcal{O}$中所有的(u,v)，

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))=\left(0,\frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{r}(u,v)),-\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{r}(u,v))\right).$$

因此，用分量形式写出$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)$，并与上述向量作内积，则斯托克斯等式的左端变成

$$\frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{r}(u,v))\left[\frac{\partial r_3}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_3}{\partial v}\right]-\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{r}(u,v))\left[\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v}-\frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}\right].\tag{20.29}$$

现在计算斯托克斯等式的右端. 因为$r_1(u,v)$的二阶混合偏导数相等，所以右端是

553

$$\frac{\partial}{\partial u}[g(\boldsymbol{r}(u,v))]\frac{\partial r_1}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial}{\partial v}[g(\boldsymbol{r}(u,v))]\frac{\partial r_1}{\partial u}(u,v).\tag{20.30}$$

这样，为证明斯托克斯恒等式，我们需证明(20.29)等于(20.30). 为此，用链式法则可得到，

$$\frac{\partial}{\partial u}[g(\boldsymbol{r}(u,v))]=\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial r_1}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial r_2}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial r_3}{\partial u}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial v}[g(\boldsymbol{r}(u,v))]=\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial r_1}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial r_2}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial z}(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial r_3}{\partial v}.$$

将上面两式代入(20.30)，这就得出(20.29)等于(20.30). 因此证实了斯托克斯等式. ■

引理 20.30 对平面$\mathbb{R}^2$的一个开子集$\mathcal{O}$，假设映射$\boldsymbol{r}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$是连续可微的. 设$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^3$的一个开子集，它包含$\boldsymbol{r}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$的象，并假设映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$也是连续可微的. 设$\boldsymbol{\beta}:I\to\mathbb{R}^2$是分段光滑参数化路径，它的象$\mathcal{C}$位于$\mathcal{O}$内，考虑由参数化复合$\gamma=\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{\beta}:I\to\mathbb{R}^3$定义的曲线$\boldsymbol{\Gamma}$(如图20.9所示)，则

$$\int_{\Gamma}\langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s = \int_{C}\left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\right\rangle \mathrm{d}u + \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\rangle \mathrm{d}v. \quad (20.31)$$

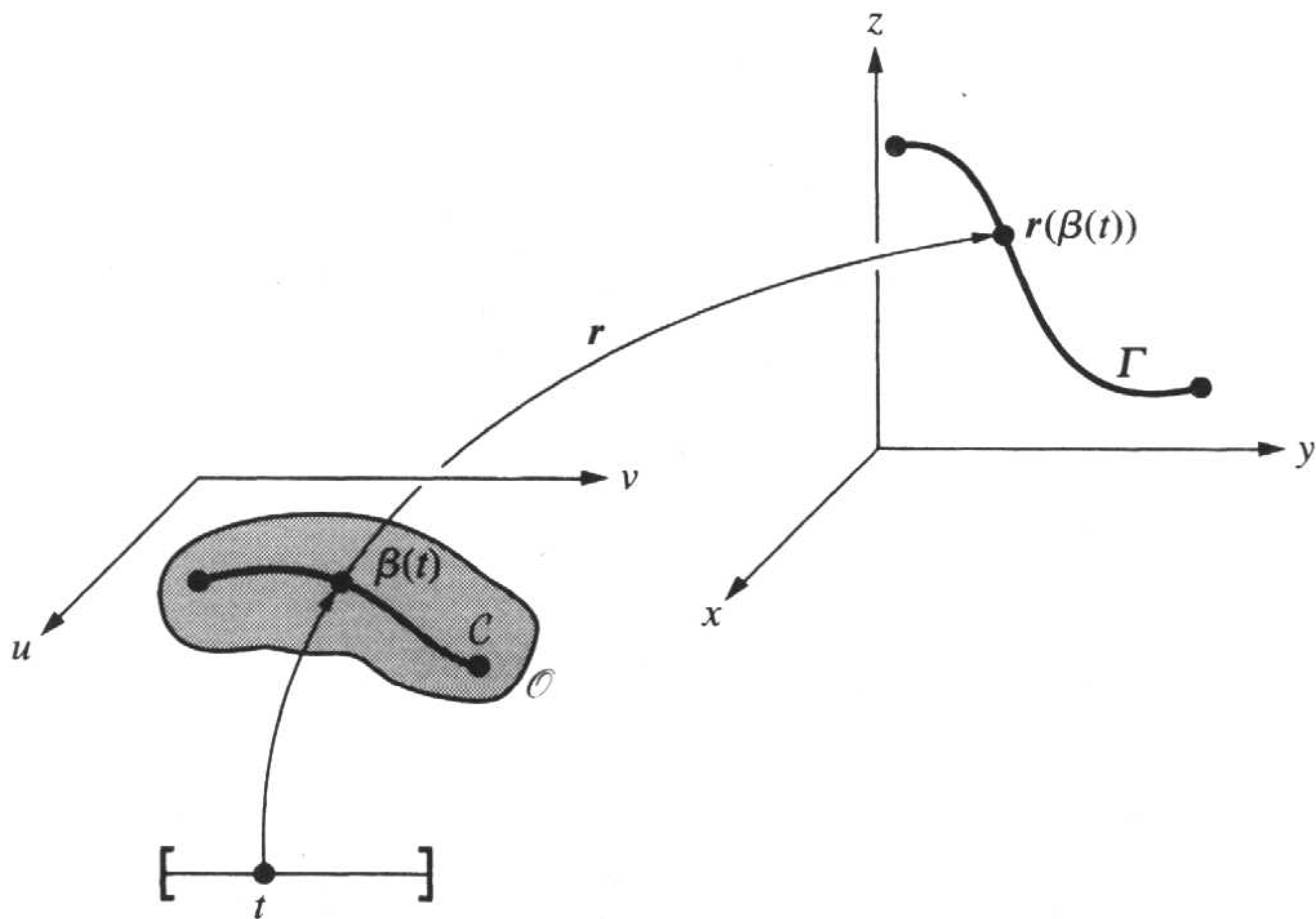


图 20.9 参数化的复合

证明 由链式法则得，

554

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\beta}(t))) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(\boldsymbol{\beta}(t))\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(\boldsymbol{\beta}(t))\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}t}(t).$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}\langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s &\equiv \int_{I}\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)),\boldsymbol{\gamma}'(t)\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_{I}\left[\left\langle (\boldsymbol{F}\circ \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\beta}(t)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(\boldsymbol{\beta}(t))\right\rangle \frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}t}(t) + \left\langle (\boldsymbol{F}\circ \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\beta}(t)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(\boldsymbol{\beta}(t))\right\rangle \frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}t}(t)\right]\mathrm{d}t \\ &\equiv \int_{C}\left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\right\rangle \mathrm{d}u + \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\rangle \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

■

定理 20.31（斯托克斯公式） 对平面$\mathbb{R}^2$的开子集$\mathcal{O}$，假设映射$\boldsymbol{r}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$的分量函数有连续二阶偏导数. 设$\mathcal{U}$是$\mathbb{R}^3$的开子集，它包含$\boldsymbol{r}:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^3$的象，并假定映射$\boldsymbol{F}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^3$是连续可微的. 假设$\mathcal{R}$是一个格林域，使得$\mathcal{R}$和它的边界都包含在$\mathcal{O}$内，设$\mathcal{S}$是曲面且是参数化：$\boldsymbol{r}:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$的象，设$\boldsymbol{\Gamma}$是由复合$\boldsymbol{r}$及$\mathcal{R}$的边界的格林参数化所定义的参数化路径的象，如图 20.10 所示. 那么

$$\iint_{S}\langle \mathrm{curl}\boldsymbol{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\Gamma}\langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s.$$

证明 由曲面积分的定义知，

555

$$\iint_{S}\langle \mathrm{curl}\boldsymbol{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathcal{R}}\left\langle \mathrm{curl}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)),\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)\right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

而且由斯托克斯恒等式得，

$$\iint_{S}\langle \mathrm{curl}\boldsymbol{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathcal{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\left\langle \boldsymbol{F}\circ \boldsymbol{r},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\rangle\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\left\langle \boldsymbol{F}\circ \boldsymbol{r},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right\rangle\right]\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

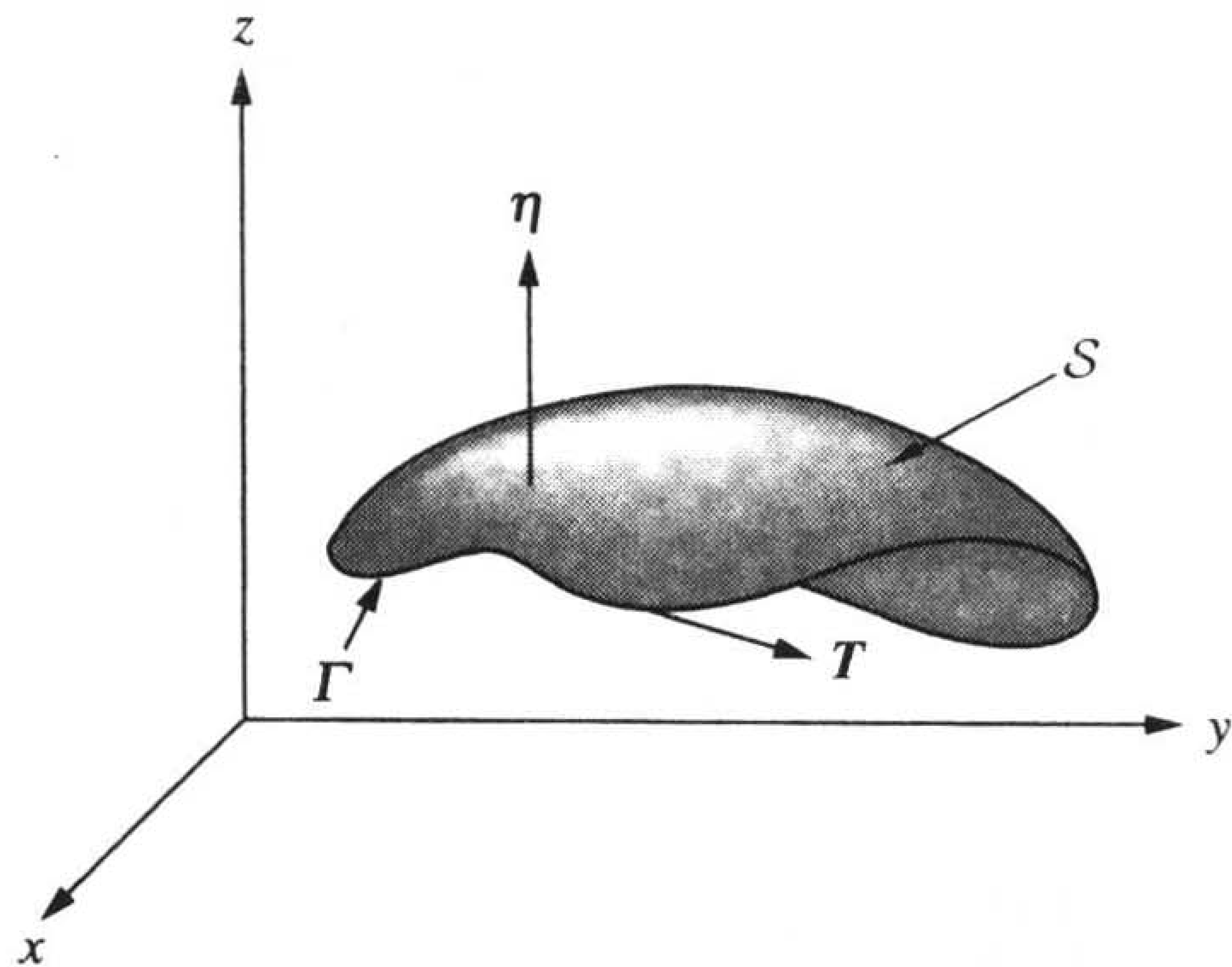


图 20.10 斯托克斯公式

从而应用格林公式于右边的积分

$$\iint_S \langle \operatorname{curl}\boldsymbol{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\sigma = \int_C \left\langle \boldsymbol{F}\circ \boldsymbol{r},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right\rangle \mathrm{d}u + \left\langle \boldsymbol{F}\circ \boldsymbol{r},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\rangle \mathrm{d}v,$$

这里$\mathcal{C}$是$\mathcal{R}$的边界路径. 最后，应用积分公式(20.31)于右边得，

$$\iint_S \langle \operatorname{curl}\boldsymbol{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s.$$ ■

用向量场的语言，斯托克斯公式断言：如果适当地选择参数化，则沿着向量场的旋度在法线上分量的曲面积分等于沿着向量场切线上分量的曲面边界的积分.

习题

1. 设 $M=x^2-y^2$，$N=2xy$ 及 Ω 是以(0, 0)，(2, 0)及(1, 1)为顶点的三角形. 在这种情况下验证格林公式.

2. 设 $M=x^2-xy^3$，$N=y^2-2xy$ 且 Ω 是以(0, 0)和(2, 2)为对角点的正方形. 在这种情况下验证格林公式.

3. 用面积公式(20.24)求由直线 $x+y=4$ 与坐标轴为界的三角形的面积.

4. 对例 20.20 所定义的集合 Ω，在 $g(c)=h(c)$ 与/或 $g(d)=h(d)$ 情况下寻找它的边界的简单的、闭的参数化.

5. 取 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的点，证明：

$$\operatorname{curl}[(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\times((x,y,z)-\boldsymbol{q})]=2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}).$$

6. 对映射 $\boldsymbol{F}(x, y, z)=(3y, -xz, yz^2)$，验证斯托克斯公式，这里$\mathcal{S}$是抛物面 $2z=x^2+y^2$ 以平面 $z=2$ 为界的曲面.

7. 验证斯托克斯公式，这里 $\boldsymbol{F}(x, y, z)=(z, x, y)$，$\mathcal{S}$是中心在原点、半径为 1 的上半球面.

8. 计算

556

$$\iint_S \langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

这里 $\boldsymbol{F}(x, y, z)=(xz, yz, z^2)$，$S$ 是中心在原点、半径为 1 的上半球面.

9. 对连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，它在开区间(a, b)有连续有界导数，定义 $\Omega=\{(x, y)\mid a<x<b, 0<y<1\}$及对 Ω 中的(x, y)，定义 $M(x, y)=f(x)$，$N(x, y)=0$. 证明：格林公式归约为公式 $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$.

10. 说明格林公式是斯托克斯公式的一种特殊情况.

11. 假设 Ω 是格林域，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是 Ω 的边界. $u(x, y)$与 $v(x, y)$在含有 $\Omega\cup\boldsymbol{\Gamma}$ 的开集上二次连续可微，证明：

$$\int_{\Gamma}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right]=\iint_{\Omega}\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

12. 对连续可微的向量场 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 及 $\boldsymbol{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. 证明：

$$\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}]=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\times\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\times\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x}.$$

13. 假设 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 及 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是连续可微的，证明：

$$\mathrm{curl}(f\boldsymbol{F})=f\mathrm{curl}\boldsymbol{F}+\nabla f\times\boldsymbol{F}.$$

14. 对函数 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，如有连续的二阶偏导数，证明：

$$\mathrm{curl}\ \nabla f=\mathbf{0}.$$

15. 对连续可微的向量场 $\boldsymbol{E}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 及 $\boldsymbol{H}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，证明

$$\nabla(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\langle\boldsymbol{E},\mathrm{curl}\boldsymbol{H}\rangle-\langle\boldsymbol{H},\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\rangle.$$

16. 在推论 20.27 中所描述的分部积分公式的有关假定下，假设在含有 $\Omega\cup\boldsymbol{\Gamma}$ 的开集上，u 与 v 有连续二阶偏导数. 运用分部积分公式获得格林第一恒等式：

$$\iint_{\mathcal{R}}\langle\nabla u,\nabla v\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\eta}}\mathrm{d}s-\iint_{\mathcal{R}}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由减法可得格林第二恒等式：

$$\iint_{\mathcal{R}}[u\Delta v-v\Delta u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma}\left[u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\eta}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\eta}}\right]\mathrm{d}s.$$

557

（回忆 Δw 称为 w 的拉普拉斯算子，定义为

$$\Delta w(x,y)\equiv\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y).)$$

17. 运用习题 16 的格林第一恒等式证明：如果函数 $u(x,y)$ 在一个包含 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的开集中有连续二阶偏导数，且满足

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=0 & x^2+y^2<1\\ u(x,y)=0 & x^2+y^2=1.\end{cases}$$

则 $u(x,y)$ 必恒等于 0，这是满足上述性质的仅有的函数.

558

附录 A 域公理和正性公理的推论

在"预备知识"部分，我们叙述了实数的域公理和正性公理，并做了关于这些公理的初等结论的各种断言. 在本附录里，我们将证实其中的一些断言.

A.1 域公理及其推论

为方便起见，我们将重述域公理. 对每一对实数 a 与 b，一个实数称为 a 与 b 的和并记为 $a+b$，一个实数称为 a 与 b 的积并记为 ab. 这些运算满足以下公理集合：

加法的交换性：对所有实数 a 与 b，

$$a+b=b+a.$$

加法的结合性：对所有实数 a，b 及 c，

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

加法单位元：存在一实数，用 0 表示，对所有实数 a，满足

$$0+a=a.$$

加法逆元：对每个实数 a，存在一实数 b，

$$a+b=0.$$

乘法的交换性：对所有实数 a 与 b，

$$ab=ba.$$

乘法的结合性：对所有实数 a，b 及 c，

$$(ab)c=a(bc).$$

乘法单位元：存在一实数，用 1 表示，对所有实数 a，满足

$$1a=a.$$

乘法逆元：对每个实数 $a(\neq 0)$，存在一实数 b，

$$ab=1.$$

分配性质：对所有实数 a，b 及 c，

$$a(b+c)=ab+ac.$$

非平凡性假设：

$$1\neq 0.$$

首先，注意加法单位元公理断言的实数仅有一个. 事实上，如果 $0'$ 也具有此性质，即对所有实数 a，有

$$0'+a=a,$$

则特别地有

$$0'+0=0.$$

但由加法的交换性以及定义 0 是加法单位元，可得

$$0'+0=0+0'=0'.$$

这样 $0=0'$，所以只有唯一的加法单位元.

命题 A.1 对每个实数 a，

$$a0 = 0a = 0.$$

证明 观察到

$$0 + 0 = 0.$$

这样，由分配公理，

$$0a + 0a = 0a.$$

如果在上式两端加上 $0a$ 的加法逆元，并利用加法的结合性，可得 $0a=0$，又根据乘法的交换性得 $a0=0$. ■

命题 A.2 对每一对实数 a 和 b，如果

$$ab = 0,$$

则 $a=0$ 或 $b=0$. 560

证明 如果 $a=0$，证明就完成了. 因此，假设 $a\neq 0$. 我们需证 $b=0$. 由于 $a\neq 0$，根据乘法逆元公理，可取数 d 使得 $da=1$. 由于 $ab=0$，由命题 1 知

$$d(ab) = d0 = 0.$$

另一方面，由乘法的交换性和结合性以及定义 1 是乘法单位元，得到

$$d(ab) = (da)b = 1b = b.$$

所以 $b=0$. ■

加法逆元公理断言，对每个数 a，存在数 b，使得 $a+b=0$. 事实上，只存在一个这样的数，称之为 a 的*加法逆元*. 为看到为什么仅有一个这样的数，假设 b'也满足 $a+b'=0$. 则

$$\begin{aligned}
b' &= 0 + b' \\
&= (a + b) + b' && \text{由 } b \text{ 的选择} \\
&= (b + a) + b' && \text{由加法的交换性} \\
&= b + (a + b') && \text{由加法的结合性} \\
&= b + 0 && \text{由 } b' \text{ 的选择} \\
&= 0 + b && \text{由加法的交换性} \\
&= b && \text{由 0 的定义.}
\end{aligned}$$

这样 $b=b'$. 自然，a 的加法逆元记为 $-a$. 加法逆元具有以下熟知的性质.

命题 A.3 对所有实数 a 与 b，

(i) $-(-a)=a$.

(ii) $-a=(-1)a$.

(iii) $-ab=(-a)b$.

(iv) $ab=(-a)(-b)$.

(v) $1=(-1)(-1)$.

证明 由 $-(-a)$是唯一的数，它与 $-a$ 相加得 0，而 a 也有此性质，故(i)成立.

为证(ii)，我们需证

561

$$a + (-1)a = 0.$$

但因1是乘法的单位元，故

$$\begin{aligned} a + (-1)a &= 1a + (-1)a \\ &= (1 + (-1))a & \text{由分配性} \\ &= 0a & \text{因 } -1 \text{ 是 } 1 \text{ 的加法逆元} \\ &= 0 & \text{由命题 A.1.} \end{aligned}$$

为证(iii)，观察到

$$\begin{aligned} -ab &= (-1)ab & \text{由(ii)} \\ &= ((-1)a)b & \text{由乘法的结合性} \\ &= (-a)b & \text{再次由(ii).} \end{aligned}$$

为证(iv)，观察到

$$\begin{aligned} ab &= -(-ab) & \text{由(i)} \\ &= -((-a)b) & \text{由(iii)} \\ &= -(b(-a)) & \text{由乘法的交换性} \\ &= (-b)(-a) & \text{由(iii)} \\ &= (-a)(-b) & \text{由乘法的交换性.} \end{aligned}$$

最后，当令 $a=b=1$ 时，(v)可由(iv)得出. ■

对数 a 与 b，定义差 $a-b$ 为

$$a - b \equiv a + (-b).$$

运用前述命题，不难证明：对任意数 $a-b$ 及 c，

$$a(b-c) = ab - ac \quad \text{及} \quad -(b-c) = -b + c.$$

现在我们来检查乘法公理的一些推论. 正如我们刚才加法中证明单位元是唯一的那样，类似于可证乘法单位元是唯一的. 类似证明加法逆元是唯一的可证对任一非零数 a，它的乘法逆元是唯一的. a 的乘法逆元记为 a^{-1}，乘法逆元有如下性质

命题 A.4 对任意非零实数 a 与 b，

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

562

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

证明 为证明(i)，考虑到 $(a^{-1})^{-1}$ 是满足如下性质的唯一数：当乘以 a^{-1} 时，应得其积是1. 但数 a 也有这个性质

为证明(ii)，我们需证明

$$(-a)(-a^{-1}) = 1.$$

但是，由命题 A.3 的(iv)，我们有

$$(-a)(-a^{-1}) = (a)(a^{-1}) = 1.$$

最后，为证明(iii)，我们需证明

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1.$$

然而，由乘法的交换性及结合性得，

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1.$$ ■

对任意两个数 a 与 b 且 $b \neq 0$，我们定义

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

直接从除法的定义和分配性得，对任意数 a，b 及 c，且 $c \neq 0$，

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

A.2 正性公理及其推论

在实数中，有一个关于序的自然概念，即大于(greater than)、小于(less than)等. 一种简便的方法是把这些性质编成为正数集所满足的特定公理

设$\mathcal{P}$是实数集合，它称为*正数集*(positive number)，如果它满足以下两个性质：

P1 若 a 与 b 是正的，则 ab 与 $a+b$ 也是正的.

P2 对任一实数 a，下述三种方案中确有一个是真的：

$$a \text{ 是正的}, \quad -a \text{ 是正的}, \quad a=0.$$

正性公理导致以自然的方式来定义实数的序：对实数 a 及 b，定义 $a>b$ 意味着 $a-b$ 是正的，而 $a \geqslant b$ 意味着 $a>b$ 或 $a=b$. 因而我们定义 $a<b$ 意味着 $b>a$、及 $a \leqslant b$ 意味着 $b \geqslant a$. 563

命题 A.5 *对每个实数 $a \neq 0$、$a^2>0$. 特别地，$1>0$.*

证明 由于 $a \neq 0$，于是由第二正性公理知，a 或 $-a$ 是正的. 若 a 是正的，则由于正数之积是正的，故 a^2 是正的. 类似地，若 $-a$ 是正的，则 $(-a)(-a)$ 是正的，但由命题 A.3 中的 (iv) 知，$(-a)(-a)=a^2$ 是正的。从而在这种情况下，a^2 仍是正的. 特别地，由于非平凡性公理 $1 \neq 0$，于是 $1=1 \cdot 1$ 是正的. ■

命题 A.6 *对每个正数 a，则它的乘法逆元 a^{-1} 也是正的.*

证明 由于 $a \cdot a^{-1}=1 \neq 0$，于是由命题 A.2 知，$a^{-1} \neq 0$，再由第一正性公理知，a^{-1} 或 $-a^{-1}$ 是正的. 但不可能有 $-a^{-1}$ 是正的，因为如果这样，则有 $a \cdot (-a^{-1}) = -1$ 是正的，这将与命题 A.5 的结果相矛盾. 因此 a^{-1} 是正的. ■

命题 A.7 *若 $a>b$，则*

$$\text{当 } c>0 \text{ 时}, \quad \text{有 } ac>bc$$

及

$$\text{当 } c<0 \text{ 时}, \quad \text{有 } ac<bc.$$

证明 数 a-b 是正的. 若 c 是正的，则积 $(a-b)c=ac-bc$ 也是正的，即 $ac>bc$. 另一方面，若 $c<0$，则 $-c$ 是正的，所以 $(a-b)(-c)$ 也是正的，但是 $(a-b)(-c)=bc-ac$，所以 $ac<bc$. ■

习题

1. 对任意数 a，b 及 c，证明：

$$a(b-c)=ab-ac \quad 及 \quad -(b-c)=-b+c.$$

2. 证明：乘法单位元是唯一的.

3. 证明：每一个数 $a\neq 0$ 有唯一的乘法逆元.

4. 证明：对任意数 a 及 b，且 $b\neq 0$，

564

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}.$$

附录B 线性代数

在多元函数以及介于欧几里得空间之间的映射的微分法与积分法的分析中，我们主要关心的是那些函数或映射是非线性的情况. 可是支持对这些非线性函数或非线性映射的研究的基础，是对线性函数及线性映射的了解. 关于线性函数及线性映射的研究的知识主体称为线性代数(Linear algebra). 两个向量的向量和、一个数与一个向量的乘积以及两个向量的内积等概念已经在第10章讨论了. 线性映射与矩阵之间的对应已在15.1节建立了，在同一节我们还定义和描述了方阵的各种行列式性质.

完整地讨论线性代数超出了本书的范围. 在这个附录中，我们首先定义线性代数中某些一般性的概念，叙述一些一般的结果. 然后，我们对所述结果在$\mathbb{R}^3$这一重要的特殊情况下给予证明. 所提供的证明，除简单外，还允许我们采用更多的几何观点，这种观点来自$\mathbb{R}^3$中的两个向量的内积与叉积的几何性质.

在欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中，给定k个向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$，一个形式为

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k,$$

的向量称为$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$的线性组合，其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$是数.

定义 $\mathbb{R}^n$中的k个向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$称为**线性相关**(linearly dependent)，如果存在一组不全为零的数$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

如果向量组$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$不是线性相关的，就称它们为**线性无关**(linearly independent).

容易看到$\mathbb{R}^n$中的k个向量组$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$是线性相关的，当且仅当这些向量中的一个是余下$k-1$个向量的线性组合. 而且，如果$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$是线性无关的，而向量$\boldsymbol{v}$是$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$的线性组合，则存在唯一组数$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$，使得

565

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k.$$

定义 $\mathbb{R}^n$中的k个向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$**生成**(span)$\mathbb{R}^n$，如果$\mathbb{R}^n$中的每一个向量$\boldsymbol{v}$是$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$的线性组合.

定义 $\mathbb{R}^n$中的k个向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$是$\mathbb{R}^n$的**基**(basis)，如果对$\mathbb{R}^n$中的每个向量$\boldsymbol{v}$，存在唯一数组$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$，使得

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k.$$

线性无关的定义可重述为如下断言：$\mathbb{R}^n$中的k个向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$是线性无关的，如果仅有当$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$时，有

$$\boldsymbol{0} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k.$$

这就得出如果$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$是$\mathbb{R}^n$的一组基，则它们是线性无关的. 反过来不一定成立. 但是，有如下重要定理.

定理 B.1 对$\mathbb{R}^n$中的n个向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$，下面三个断言是等价的：

(i) 向量$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$是$\mathbb{R}_n$的基.

(ii) 向量 $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_n$ 生成$\mathbb{R}^n$.

(iii) 向量 $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的.

借助 $n\times n$ 线性方程组可以给出上面定理的一个解释. 回忆一个 $n\times n$ 矩阵是由实数组成的 n 行与 n 列的矩形阵列. 如果 $n\times n$ 矩阵记为 $\boldsymbol{A}$, 则可写成

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}],$$

其中对每一对下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 与 $j(1\leqslant j\leqslant n)$, a_{ij}表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 列交汇处的数. 对$\mathbb{R}^n$ 中的每一点 $\boldsymbol{x}$, 用 $\boldsymbol{Ax}$ 表示$\mathbb{R}^n$ 中这样的点: 对每一下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$, $\boldsymbol{Ax}$ 的第 i 个分量等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{x}$ 的内积, 即

$$\boldsymbol{Ax} \equiv \boldsymbol{y},$$

其中 $y_i\equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(1\leqslant i\leqslant n)$. 现在对每一下标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$, 定义

566

$$\boldsymbol{v}_i = (a_{1i},\cdots,a_{ni}),$$

即 $\boldsymbol{v}_i$ 对应于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列. 那么根据 $\boldsymbol{Ax}$ 的定义立即得出, 对$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$,

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}, \text{当且仅当 } x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{y}.$$

这一等价性允许我们重述定理 B.1 如下.

定理 B.2 对 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $n\times n$ 线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}. \tag{B.1}$$

下述三个断言是等价的:

(i) 对$\mathbb{R}^n$ 中的每个 $\boldsymbol{y}$, 方程组(B.1)有唯一解 $\boldsymbol{x}$.

(ii) 对$\mathbb{R}^n$ 中的每个 $\boldsymbol{y}$, 方程组(B.1)有一个解 $\boldsymbol{x}$.

(iii) 对 $\boldsymbol{y}=0$, 方程组(B.1)仅有的解是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

最后, 定理 B.1(因此也有定理 B.2)可用线性映射来解释. 线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 与 $n\times n$ 矩阵间的对应关系在 15.1 节已经进行了完整描述, 这里不再赘述. 应该注意, 对一个线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 有与它相伴的 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得对$\mathbb{R}^n$ 中所有的 $\boldsymbol{x}$, 有

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}.$$

因为 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$ 当且仅当 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$, 我们看到映射是一对一的, 当且仅当只要 $\boldsymbol{Ax}=0$ 就有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 这是为了看出定理 B.2 等价于下面三个定理所需注意到的结果.

定理 B.3 对一个线性映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 下述三个断言是等价的:

(i) 映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一对一的且有等于$\mathbb{R}^n$ 的象, 即它是可逆的.

(ii) 映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的象等于$\mathbb{R}^n$.

(iii) 映射 $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一对一的.

虽然现在我们已有了定理 B.1、B.2 与 B.3 的等价性, 但我们并没有对它们中任一个作证明. 而且, 我们也没有任何明确的准则来判定$\mathbb{R}^n$ 中的 n 个向量是$\mathbb{R}^n$ 的一组基, 或等价地, 用来判定一个从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的线性映射是可逆的. 有一个称为*行列式*的数, 它可以与$\mathbb{R}^n$ 中向量的有序 n 元组相联系, 这有序 n 元组的向量是$\mathbb{R}^n$ 的基当且仅当对应的行列式不为零. 等价地, 行列式可能与表示一个从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的线性映射相联系, 或行列式不为零当且仅当此映射是可逆的.

当这个行列式不为零时，它的值可以解释为体积的度量. [567]

正如我们曾提到的，我们将不对上述断言在一般的欧几里得空间$\mathbb{R}^n$里给予证明，而是在特殊但又十分重要的情况$\mathbb{R}^3$中提供证明的所有细节.

并非所有创建的欧几里得空间都是相等的. 当然，$\mathbb{R}^1$是特殊的，由于它是实数集合，它曾在预备知识与第1章里用域公理、正性公理以及完备性公理描述过. 平面$\mathbb{R}^2$也是特殊的，这是由于这里有一个称为*复数积*(complex produet)或复数乘法的乘积概念，即这个积使$\mathbb{R}^2$中的一对点同$\mathbb{R}^2$的另一点相关联，称为一对点的复数积. 以通常的加法，及以复数积代替乘法，域公理是满足的(见习题6与7). 这是有深远意义的结果，也是复分析(complex analysis)的基础. 然而这超出了本书的范围[⊖]. 这里我们将通过引进一个称为叉积的结构来研究$\mathbb{R}^3$中的几何与代数. 内积使$\mathbb{R}^3$中的一对向量同一个数相关联，与此形成对比，叉积使$\mathbb{R}^3$中的任一对有序向量对同$\mathbb{R}^3$中的另一个向量相关联. 同时运用内积与叉积，我们获得有用的几何与代数的结果，它们有直观的几何解释.

对$\mathbb{R}^3$中给定的一点$\boldsymbol{p}$及一非零向量$\boldsymbol{v}$，经过点$\boldsymbol{p}$平行于$\boldsymbol{v}$的直线ℓ是由$\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$这样的点的集合定义的，其中$t$是任一数. 对$\mathbb{R}^3$中的另一点$\boldsymbol{u}$，在直线$\ell$上寻找一点，使其与$\boldsymbol{u}$最接近，这通常是非常有用的. 从$\boldsymbol{u}$到这一点的距离称为$\boldsymbol{u}$*到直线*$\ell$*的距离*. 我们现在提供一个公式，它揭示内积的几何意义.

由$\mathbb{R}^3$中的两个向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$的内积有线性性及对称性得，对$\mathbb{R}^3$中的两个向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$.

$$\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle + 2\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle,$$

所以我们有下述结果.

毕达哥拉斯恒等式

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2, \quad \text{当且仅当}\ \boldsymbol{u}\ \text{与}\ \boldsymbol{v}\ \text{正交}.$$

定理 B.4 *对$\mathbb{R}^3$中的一个非零向量$\boldsymbol{v}$，设ℓ为过原点且平行于$\boldsymbol{v}$的直线. 对$\mathbb{R}^3$中的一点$\boldsymbol{u}$，令$\lambda=\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle/\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$. 那么*

(i)向量$\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{v}$正交.

(ii)$\lambda\boldsymbol{v}$是直线ℓ上与$\boldsymbol{u}$最接近的点，所以从$\boldsymbol{u}$到ℓ的距离是$\|\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\|$.

证明 由内积的线性性及λ的定义得，

$$\langle \boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle - \lambda\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0,$$

所以(i)成立. 为证明(ii)，必需证明：对$\mathbb{R}$中所有的t,

$$\|\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}\| \geqslant \|\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\|. \tag{B.2}$$

[568]

我们记$\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}+(\lambda-t)\boldsymbol{v}$. 由(i)知，$\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}$正交于$\boldsymbol{v}$，因而它也正交于$(\lambda-t)\boldsymbol{v}$. 于是由毕达哥拉斯恒等式得

$$\|\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}\|^2 = \|(\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v})+(\lambda-t)\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\|^2 + \|(\lambda-t)\boldsymbol{v}\|^2 \geqslant \|\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\|^2,$$

所以不等式(B.2)成立. ■

定义 对$\mathbb{R}^3$中的两个向量$\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$，$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$，$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的向量积，记为$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$，是$\mathbb{R}^3$中的向量，定义为

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1).$$

⊖ 可参考 R. V. Churchill 与 T. A. Ward 合著的《Complex Variables and Applications》第5版(New York: McGraw-Hill, 1990).

从上面的公式很难看出向量积的几何意义. 为了讨论它的几何意义，我们首先给出积的某些代数性质.

命题 B.5 对$\mathbb{R}^3$中的向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$,

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u},\quad(\text{反对称律})$$

及如果 α 与 β 是任意数，

$$[\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{w}]\times\boldsymbol{v}=\alpha[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]+\beta[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}].\quad(\text{线性性})$$

证明 这些等式的证明在于检查. 由定义知，

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$$

及

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=(v_2u_3-v_3u_2,v_3u_1-v_1u_3,v_1u_2-v_2u_1),$$

所以 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$. 类似地，我们可证实线性性. ■

定义 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ 及 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，对$\mathbb{R}^3$中的每个点 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$,

$$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

所以显然 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 是$\mathbb{R}^3$的一组基. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 称为$\mathbb{R}^3$的标准基(standard basis). 注意，对 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 这组基，我们有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\quad\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}.$$ ■

569

下述定理解释了两个向量的叉积的长度的意义.

定理 B.6 对$\mathbb{R}^3$中的两个向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，且 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$，令 $\lambda=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle/\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle$，则

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{v}\|\cdot\|\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\|,\tag{B.3}$$

即 $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|$ 的长度是向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度乘以 $\boldsymbol{u}$ 到过原点且平行于向量 $\boldsymbol{v}$ 的直线的距离.

证明 由定理 B.4 中的(i)，向量 $\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}$ 正交于 $\boldsymbol{v}$，因此也正交于 $\lambda\boldsymbol{v}$. 为证明(B.3)，计算左边部分的平方

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2&=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2\\&=(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2\\&=\|\boldsymbol{u}\|^2\cdot\|\boldsymbol{v}\|^2-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle^2\\&=\|\boldsymbol{v}\|^2\left\{\|\boldsymbol{u}\|^2-\frac{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\right\}\\&=\|\boldsymbol{v}\|^2\langle\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle\qquad\text{由 }\lambda\text{ 的定义}\\&=\|\boldsymbol{v}\|^2\langle\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\rangle\qquad\text{因为}\langle\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v}\rangle=0\\&=\|\boldsymbol{v}\|^2\cdot\|\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}\|^2.\end{aligned}$$

因而(B.3)成立. 定理叙述中的最后注解是从定理 B.4 中的(ii)得出的. ■

定理 B.7 对$\mathbb{R}^3$中的两个向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$，下述断言是等价的:

(i) 向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是线性相关的.

(ii) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

证明 首先假定 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是线性相关的. 则其中一个向量是另一个向量的标量倍，例如 $\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{u}$. 由叉积的反对称性知，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 再运用叉积的线性性得，

$$u \times v = u \times \alpha u = \alpha(u \times u) = \alpha 0 = 0.$$

反之，假设 $u \times v = 0$. 如果 $v = 0$，则 u 与 v 是线性相关的，因为 $v = 0 \cdot u$，如果 $v \neq 0$，则由(B.3)式知，$\| u - \lambda v \| = 0$ 进而有 $u = \lambda v$，因此 u 与 v 线性相关. ■

下面的定理部分地展现了叉积的方向上的意义. 570

定理 B.8 设 u 与 v 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，则

(i)叉积 $u \times v$ 同时正交于 u 及 v.

(ii)此外，在 u 及 v 线性无关的情况下，若 w 是 $\mathbb{R}^3$ 中同时正交于 u 与 v 的任意向量. 则 w 是 $u \times v$ 的标量倍，即存在数 γ，使得 $w = \gamma(u \times v)$.

证明 为证(i)，只需证明

$$\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0.$$

由叉积的定义得，

$$\begin{aligned}\langle u \times v, u \rangle &= (u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

类似地，$\langle u \times v,\ v \rangle = 0$.

为证(ii)，假设 u 与 v 是线性无关的，并设 w 同时与 u 和 v 正交. 即有如下的假设：

$$\begin{aligned}u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 &= 0 \\ v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 &= 0.\end{aligned} \tag{B.4}$$

我们通过将第一个方程乘以 v_1，第二个方程乘以 $-u_1$，再把两个方程相加，从(B.4)中消去 w_1. 类似地，消去 w_2，w_3. 新的方程组如下：

$$\begin{aligned}w_2(u_2v_1 - u_1v_2) + w_3(u_3v_1 - u_1v_3) &= 0 \\ w_1(u_1v_2 - u_2v_1) + w_3(u_3v_2 - u_2v_3) &= 0 \\ w_1(u_1v_3 - u_3v_1) + w_2(u_2v_3 - u_3v_2) &= 0.\end{aligned} \tag{B.5}$$

由于假设 u，v 线性无关，故由定理 B.7 知，$u \times v \neq 0$，不妨假设 $u \times v$ 的最后一个分量不为 0，即 $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$，定义 $\gamma = \dfrac{w_3}{u_1v_2 - u_2v_1}$，则由定义知，$w_3 = \gamma(u_1v_2 - u_2v_1)$. 从(B.5)的第一个方程可得，$w_2 = \gamma(u_3v_1 - u_1v_3)$；由(B.5)的第二个方程得，$w_1 = \gamma(u_2v_3 - u_3v_2)$. 结果有

$$w_1 = \gamma(u_2v_3 - u_3v_2), \quad w_2 = \gamma(u_3v_1 - u_1v_3), \text{及 } w_3 = \gamma(u_1v_2 - u_2v_1),$$

即 $w = \gamma(u \times v)$. ■

定理 B.9 设 u 与 v 是 $\mathbb{R}^3$ 中的线性无关向量，则 u，v 及 $u \times v$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

证明 因为 u 与 v 是线性无关的，所以 $u \neq 0$ 及 $v \neq 0$. 定义 $\lambda = \langle u,\ v \rangle / \langle v,\ v \rangle$，然后定义 $u' = u - \lambda v$. 由定理 B.4 中的(i)断言：u'正交于 v，而且，因为 u 与 v 是线性无关的，所以 $u' \neq 0$. 571

选取 p 为 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，定义 $\alpha' = \langle p,\ u' \rangle / \langle u',\ u' \rangle$，　$\beta' = \langle p,\ v \rangle / \langle v,\ v \rangle$. 由内积的线性性及 u'与 v 的正交性得，

$$\langle p - (\alpha' u' + \beta' v), u' \rangle = 0, \langle p - (\alpha' u' + \beta' v), v \rangle = 0,$$

即 $p - (\alpha' u' + \beta' v)$ 同时正交于 u'与 v. 因为 u'及 v 是非零且正交的，它们是线性无关的. 由定

理 B.8 中的(ii)知，存在 γ'，使得 $\boldsymbol{p}-(\alpha'\boldsymbol{u}+\beta'\boldsymbol{v})=\gamma'(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v})$，即

$$\boldsymbol{p}=\alpha'\boldsymbol{u}'+\beta'\boldsymbol{v}+\gamma'(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v}).$$

把 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}-\lambda\boldsymbol{v}'$代入上述表达式，由于 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，重新整理各系数记为 α，β，γ 得，

$$\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \tag{B.6}$$

下面验证数 α，β，γ 是唯一的. 我们可假设不然而导出矛盾. 事实上，如果有两组不同的数，使得(B.6)成立，则由减法知，存在三个数，不妨设为 α，β，γ 且不全为零，满足

$$\boldsymbol{0}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}).$$

两边与 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 作内积得，

$$0=\gamma\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2.$$

由于 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是线性无关的，于是由定理 B.7 知，$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|\neq 0$，从而 $\gamma=0$，则

$$\boldsymbol{0}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},$$

α，β 至少有一个非零，这与 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是线性无关的相予盾. ■

目前我们已建立了叉积的性质. 现在我们可以给出定理 B.1(因而定理 B.2 及 B.3)在 $n=3$ 时的一个证明.

定理 B.10 对$\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，下述三个断言是等价的：

(i)向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(ii)向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 生成$\mathbb{R}^3$.

(iii)向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是线性无关的.

证明 由基的定义知，(i)蕴涵(ii). 现在假设(ii)成立. 我们用予盾法证明(iii)成立. 即 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是线性无关的. 事实上，如果 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 线性相关，则其中一个向量是另外两个向量的线性组合. 这蕴涵着这两个向量可生成$\mathbb{R}^3$. 假设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 生生$\mathbb{R}^3$. 如果 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，则由定理 B.7 知，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 线性相关，这就蕴涵着$\mathbb{R}^3$ 由其中的一个向量所生成，比如 $\boldsymbol{u}$. 但这是不可能的，因为我们容易在$\mathbb{R}^3$ 中找到一个非零向量，它正交于 $\boldsymbol{u}$，显然，这样的向量不是 $\boldsymbol{u}$ 的标量倍，因此得出 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 但这更不可能，因为非零向量 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合正交. 所以 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是线性无关的.

572

现在假设(iii)成立. 由于 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是线性无关的. 向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 也是线性无关的. 由定理 B.9 知，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基. 所以有 α，β，γ 三个实数，使得

$$\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),$$

由于 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 线性无关，故知 γ 是非零的，从而

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{\gamma}(\boldsymbol{w}-\alpha\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{v}).$$

现设 $\boldsymbol{p}$ 为$\mathbb{R}^3$ 中的任一向量，由于 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 构成$\mathbb{R}^3$ 的一组基，故有三个实数 α'，β'，γ'，使得

$$\boldsymbol{p}=\alpha'\boldsymbol{u}+\beta'\boldsymbol{v}+\gamma'(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}).$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\alpha'\boldsymbol{u}+\beta'\boldsymbol{v}+\frac{\gamma'}{\gamma'}(\boldsymbol{w}-\alpha\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{v})\\&=\left(\alpha'-\frac{\gamma'}{\gamma}\alpha\right)\boldsymbol{u}+\left(\beta'-\frac{\gamma'}{\gamma}\beta\right)\boldsymbol{v}+\frac{\gamma'}{\gamma}\boldsymbol{w},\end{aligned}$$

因此p可写成u，v，w的线性组合．而且这个表示是唯一的，因为如果

$$p=\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=\lambda'_1 u+\lambda'_2 v+\lambda'_3 w,$$

则我们有

$$0=(\lambda_1-\lambda'_1)u+(\lambda_2-\lambda'_2)v+(\lambda_3-\lambda'_3)w,$$

并由于u，v，w是线性无关的得，

$$\lambda_1=\lambda'_1,\quad \lambda_2=\lambda'_2,\quad \lambda_3=\lambda'_3.$$

因此向量u，v，w是$\mathbb{R}^3$的一组基． ■

给出一个准则来判定$\mathbb{R}^3$中的三个向量是$\mathbb{R}^3$的一组基是有用的．现在我们来证明$\mathbb{R}^3$中的三个向量u，v，w是$\mathbb{R}^3$的一组基当且仅当

$$\langle u,v\times w\rangle\neq 0.$$

数$\langle u,v\times w\rangle$称为有序三重向量组$u$、$v$、$w$的三重积(triple product)．三重积依赖于三个向量的次序，这由下述命题加以描述． 573

命题 B.11 对$\mathbb{R}^3$中的向量u，v及w，

$$\langle u,v\times w\rangle=\langle w,u\times v\rangle=\langle v,w\times u\rangle \tag{B.7}$$

$$\langle u,v\times w\rangle=-\langle v,u\times w\rangle=-\langle w,v\times u\rangle.$$

证明 这个命题的证明就是检验．事实上，由内积及叉积的定义得，

$$\langle u,v\times w\rangle=u_1(v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w_1-v_1w_3)+u_3(v_1w_2-v_2w_1),$$

$$\langle w,u\times v\rangle=w_1(u_2v_3-u_3v_2)+w_2(u_3v_1-u_1v_3)+w_3(u_1v_2-u_2v_1).$$

可以看到这两个等式的右边是相等的．类似地，可得$\langle w,u\times v\rangle=\langle v,w\times u\rangle$．这样(B.7)的第一行已证实．从叉积的反对称性及(B.7)的第一行得出(B.7)的第二行的等式．即三重积中的向量的次序当有两个向量交换位置时，三重积将改变符号． ■

定理 B.12 对$\mathbb{R}^3$中的向量u，v及w，下述两个断言是等价的：

(i)$\langle u,v\times w\rangle\neq 0$.

(ii)u，v及w形成$\mathbb{R}^3$的一组基．

而且，当上述断言中之一(因而全部)成立时，$\mathbb{R}^3$中的每一个向量p可表示成

$$p=\alpha u+\beta v+\gamma w,$$

其中系统α，β，γ由下述公式给出：

$$\alpha=\frac{\langle p,v\times w\rangle}{\langle u,v\times w\rangle},\quad \beta=\frac{\langle u,p\times w\rangle}{\langle u,v\times w\rangle},\quad \gamma=\frac{\langle u,v\times p\rangle}{\langle u,v\times w\rangle}. \tag{B.8}$$

证明 首先假设(i)成立．则$\langle u,v\times w\rangle=\langle w,u\times v\rangle\neq 0$，因此$u\times v\neq \mathbf{0}$．由定理B.9知，向量$u$，$v$及$u\times v$是$\mathbb{R}^3$的一组基．从而，存在数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，使得

$$w=\alpha u+\beta v+\gamma(u\times v). \tag{B.9}$$

将此式两边与$u\times v$作内积，我们有

$$\langle w,u\times v\rangle=\gamma\|u\times v\|^2.$$

从而$\gamma\neq 0$，因为$\langle u,v\times w\rangle\neq 0$．将方程(B.9)除以$\gamma$，我们看到$u\times v$是$u$，$v$及$w$的线性组合．因为$\mathbb{R}^3$中的每个向量都可以由$u$，$v$，$u\times v$的线性组合表示，从而$\mathbb{R}^3$中每个向量都是$u$，$v$，$w$的线性组合，下面必需证明$\mathbb{R}^3$中的每个向量可以唯一地表示成由$u$，$v$及$w$的线性组合． 574

设 $\boldsymbol{p}$ 为$\mathbb{R}^3$ 中的任一向量，假设有数 α，β，γ，使得

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}. \tag{B.10}$$

我们分别将(B.10)式两端与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$，然后与 $\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}$，最后与 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 作内积，运用这些三重积中，若有两个向量相等，则三重积为 0 的事实，我们有

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\rangle &= \alpha\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\rangle\\ \langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\rangle &= \beta\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\rangle\\ \langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\rangle &= \gamma\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\rangle.\end{aligned}$$

从这里，对三重积运用重整序性质(B.7)，便可得(B.8). 这样，我们证明了 α，β 及 γ 的唯一性，同时对系数 α，β 及 γ 建立公式(B.8).

下面证(ii)蕴涵(i). 事实上，假设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基. 注意到 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是线性无关的，因为否则的话，可以用两种不同的方式把零向量表示为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 的线性组合. 因此由定理 B.7 知，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. 更进一步，由定理 B.9 知，向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基，特别地，存在数 α，β，γ，使得

$$\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}). \tag{B.11}$$

由假设知 $\gamma\neq 0$，因为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基. 对(B.11)式取与 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的内积得，

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\rangle = \langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\rangle = \gamma\,\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2 \neq 0. \qquad \blacksquare$$

定理 B.12 对 3×3 线性方程组有一个有趣的解释，对 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，考虑 3×3 线性方程组

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3,\end{aligned} \tag{B.12}$$

其中三重数组(y_1，y_2，y_3)是给定的，我们要寻找三重数组(x_1，x_2，x_3)使之满足上述方程组. 如果我们定义三个向量为：

$$\boldsymbol{u} = (a_{11},a_{21},a_{31}),\quad \boldsymbol{v} = (a_{12},a_{22},a_{32}),\quad \boldsymbol{w} = (a_{13},a_{23},a_{33}),$$

并且注意到对给定的向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$，上述线性方程组等价于

$$x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}. \tag{B.13}$$

现在直接从三重向量组是空间$\mathbb{R}^3$ 的一组基的定义出发，我们看到 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基，[575] 这等价于对每一个三重数组(y_1，y_2，y_3)，方程组(B.12)存在唯一的解(x_1，x_2，x_3). 然而定理 B.12 提供了一个 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基的充分且必要条件，即$\langle\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\rangle\neq 0$. 因为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 是分别对应于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一列，第二列及第三列. 我们定义 3×3 的实数矩阵的行列式(determinant)如下：

定义 对 3×3 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

定义 $\boldsymbol{A}$ 的行列式(记为 det A)为下式：

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

定理 B.13 对由 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 确定的线性方程组(B.12)，下述两个断言等价：

(i) $\det\boldsymbol{A}\neq0$.

(ii) 对三重数组(y_1, y_2, y_3)，方程组有唯一的解(x_1, x_2, x_3).

而且，当这两个断言中之一(因而全部)成立时，对给定的(y_1, y_2, y_3)，方程组(B.12)的唯一解是

$$x_1 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad x_2 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{bmatrix},\quad x_3 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{31} & a_{23} & y_3 \end{bmatrix},$$

其中 $D = \det\boldsymbol{A}$.

证明 像上面那样，我们定义 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 为

$$\boldsymbol{u} = (a_{11}, a_{21}, a_{31}),\quad \boldsymbol{v} = (a_{12}, a_{22}, a_{32}),\quad \boldsymbol{w} = (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

对给定的向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$，线性方程组等价于

$$x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}.$$

由定义知，$\det\boldsymbol{A} = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\rangle$. 这样本定理可由定理 B.12 得出. ■

从叉积的反对称性得，3×3 矩阵的行列式交换两列要改变符号. 从内积与叉积的线性性得，如果两列固定，则行列式线性地依赖于余下的列. [576]

现在我们已经了解三重积不为零的意义，现在来描述三重积的大小(magnitude)关于确定体积计算的意义. 对$\mathbb{R}^3$ 中的一点 $\boldsymbol{p}$ 及两个线性无关向量 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，过点 $\boldsymbol{p}$ 且以向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为边的平行四边形(parallelogram)是集合$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,\ 0\leqslant\beta\leqslant1\}$. $\mathcal{S}$的面积是向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度乘以点 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}$ 到直线的距离，此直线过 $\boldsymbol{p}$ 点且平行于 $\boldsymbol{v}$. 由定理 B.4 及 B.6 得，

$$\text{area}\ \mathcal{S} = \|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|. \tag{B.14}$$

对$\mathbb{R}^3$ 中的一点 $\boldsymbol{p}$ 及非零向量 $\boldsymbol{\eta}$，过点 $\boldsymbol{p}$ 法向量是 $\boldsymbol{\eta}$ 的平面定义为点集$\mathcal{P}$，它是由点 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{w}$ 组成，满足 $\boldsymbol{w}$ 正交于 $\boldsymbol{\eta}$. 给定平面$\mathcal{P}$中的两点 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{v}$，且 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是线性无关的，从定理 B.8 的(ii)知，存在标量 γ，使得 $\boldsymbol{\eta} = \gamma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$. 三重向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基，因此 $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \mid \alpha, \beta\in\mathbb{R}\}$. 点 $\boldsymbol{q}$ 到平面$\mathcal{P}$的距离定义为从 q 到$\mathcal{P}$中与 $\boldsymbol{q}$ 最接近的点的距离.

命题 B.14 对$\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\eta}$，其长度为 1，设$\mathcal{P}$为过原点且以 $\boldsymbol{\eta}$ 为法向量的平面. 则对$\mathbb{R}^3$ 中的任意一点 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}$ 到$\mathcal{P}$的距离等于 $|\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle|$.

证明 由假设$\langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\rangle = 1$ 及内积的线性性得，

$$\langle\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\rangle = 0,$$

即 $\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}$ 正交于 $\boldsymbol{\eta}$，因此 $\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}$ 位于$\mathcal{P}$内. 点 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}$ 之间的距离是

$$\|\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}\| = |\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle|\ \|\boldsymbol{\eta}\| = |\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle|.$$

这样，为证此命题，必须证明：对$\mathcal{P}$中的任一点 $\boldsymbol{u}$，

$$\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u}\| \geqslant |\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle|.$$

然而，对$\mathcal{P}$中的任一点 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\eta - \boldsymbol{u}) + \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}$. 因为向量 $\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{u}$ 与 $\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}$ 是正交的，故由毕达哥拉斯恒等式得，

$$\|p-u\|^2=\|p-\langle p,\eta\rangle\eta-u\|^2+\|\langle p,\eta\rangle\eta\|^2\geq\|\langle p,\eta\rangle\eta\|^2=|\langle p,\eta\rangle|^2,$$

所以 $\|p-u\|\geq|\langle p,\eta\rangle|$. ■

现在假设 u, v 及 w 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 基点为 p 以 u, v 及 w 为界的平行六面体(parallelepiped)定义为点集 $\mathcal{V}=\{p+\alpha u+\beta v+\gamma w\mid 0\leq\alpha\leq 1, 0\leq\beta\leq 1, 0\leq\gamma\leq 1\}$, $\mathcal{V}$的体积定义为基点为 p 以向量 u, v 为边界的平行四边形的面积乘以 $p+w$ 到平面的距离, 这个平面是过 p, $p+u$ 及 $p+v$ 的平面, 注意到此平面的过点 P 的法向量是 $u\times v$.

577

定理 B.15 令 u, v 及 w 为$\mathbb{R}^3$ 的一组基, 设$\mathcal{V}$是基点为原点, 并以 u, v 及 w 为界的平行六面体. 则$\mathcal{V}$的体积由下式给出:

$$\operatorname{vol}\mathcal{V}=|\langle u,v\times w\rangle|. \tag{B.15}$$

证明 过原点及向量 u 及 v 的平面的法向量是 $u\times v$, 从而 $\eta=u\times v/\|u\times v\|$ 是平面的单位法向量. 注意到

$$\langle w,\eta\rangle=\left\langle w,\frac{u\times v}{\|u\times v\|}\right\rangle=\frac{\langle w,u\times v\rangle}{\|u\times v\|},$$

所以由命题 B.14 知, 点 w 到平面$\mathcal{P}$的距离等于

$$|\langle w,\eta\rangle|=\frac{|\langle w,u\times v\rangle|}{\|u\times v\|}.$$

另一方面, 由定理 B.6 知, 基点为原点以 u, v 为界的平行四边形的面积是 $\|u\times v\|$. 从而根据体积的定义得,

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\mathcal{V}&=\frac{|\langle w,u\times v\rangle|}{\|u\times v\|}\cdot\|u\times v\|\\&=|\langle w,u\times v\rangle|=|\langle u,v\times w\rangle|.\end{aligned}$$

■

推论 B.16 设$\mathcal{V}$是基点为原点由标准基向量 e_1, e_2, e_3 所生成的平行六面体. 则对与 3×3 矩阵 A 相伴的可逆线性映射 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 其象 $T(\mathcal{V})$ 的体积由下式给出:

$$\operatorname{vol}T(\mathcal{V})=|\det A|\operatorname{vol}\mathcal{V}. \tag{B.16}$$

证明 定义 $u=T(e_1)$, $v=T(e_2)$, 及 $w=T(e_3)$. 如果(α, β, γ)在$\mathcal{V}$中, 则

$$T(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha u+\beta v+\gamma w.$$

因此, $T(\mathcal{V})$是以 u, v 及 w 为边界的平面六面体. 从而

$$\operatorname{vol}T(\mathcal{V})=|\langle u,v\times w\rangle|. \tag{B.17}$$

另一方面, 由矩阵 A 与线性映射 T: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 的方式得, u, v 及 w 分别对应于 A 的第一列, 第二列及第三列, 并由行列式的定义得,

$$\det A=\langle u,v\times w\rangle. \tag{B.18}$$

578

又因为 $\operatorname{vol}\mathcal{V}=1$, 所以体积公式(B.16)可由(B.17)和(B.18)得出. ■

向量 u, v, w 的有序三重组的三重积$\langle u, v\times w\rangle$是非零的, 当且仅当它们是$\mathbb{R}^3$ 的一组基. 当这个三重积非零时, 定理 B.15 描述了三重积的绝对值的意义. 自然地要问一下, 三重积的值的符号的意义. 向量 u, v, w 的有序三重组称为是正方向的(positively oriented), 如果$\langle u, v\times w\rangle>0$. 注意到标准有序基底 i, j, k 是正方向的, 因为$\langle i, j\times k\rangle=1$. 而且, 正向的几何意义在于, 如果 u, v, w 的有序三重组是正向的, 则这组基可以由下面的连续变形得到

标准有序基：存在三个参数化路径 α：$[0, 1]\to\mathbb{R}^3$，β：$[0, 1]\to\mathbb{R}^3$ 及 γ：$[0, 1]\to\mathbb{R}^3$，使得

$$\alpha(0) = \boldsymbol{u}, \quad \beta(0) = \boldsymbol{v}, \quad \gamma(0) = \boldsymbol{w}$$

$$\alpha(1) = \boldsymbol{i}, \quad \beta(1) = \boldsymbol{j}, \quad \gamma(1) = \boldsymbol{k},$$

而对$[0, 1]$中的每个参数值 t，向量 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\gamma(t)$是$\mathbb{R}^3$ 的一组基.

注意，如果向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是线性无关的，则向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的有序三重组是正方向的，因为

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\rangle = \langle \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\rangle > 0.$$

有序基 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 是正方向的，这在初等课程中非形式地描述为右手法则.

对任意 $n\times n$ 矩阵也可以定义它的行列式，它有着与 3×3 情况下相同的代数意义. 在15.1节我们借助归纳提供了一个定义. 我们看到在 3×3 矩阵情况下，这一定义与我们在这里给出的定义是一致的[⊖].

习题

1. 求$\mathbb{R}^3$ 过原点且平行于向量$(1, 0, 2)$的直线方程，并求出点$(0, 2, 4)$到这条直线的距离.

2. 证明：集合$\{\boldsymbol{u}=(x, y, z) \mid 2x+3y-z=0\}$是过原点且法向量为 $\boldsymbol{\eta}=(2, 3, -1)$的平面，求点$(1, 1, 0)$到这个平面的距离.

3. 证明：向量 $\boldsymbol{u}=(1, 0, 1/2)$，$\boldsymbol{v}=(0, 2, 1)$，$\boldsymbol{w}=(-4, 0, 0)$的三重组是$\mathbb{R}^3$ 的一组基. 使用公式(B.8)用这组基表示点$(1, 0, 0)$. 同样用这组基表示出点$(0, 1, 0)$.

4. 对$\mathbb{R}^3$ 中的非零向量 $\boldsymbol{u}$，求出一个非零向量 $\boldsymbol{v}$，使之与 $\boldsymbol{u}$ 正交，然后再求一非零向量 $\boldsymbol{w}$，使得 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基.

5. 求基点在原点且以$(1, 0, 2)$及$(0, 0, 1)$为界的平行四边形的面积.

579

6. 对平面$\mathbb{R}^2$ 中的两点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，定义复乘积(记为$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$)为下式：

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) \equiv (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

定义两点的和为通常的和.

a. 证明：$(1, 0)(x, y)=(x, y)$对$\mathbb{R}^2$ 中的每一点(x, y)成立，即$(1, 0)$是乘法单位元.

b. $(0, 0)+(x, y)=(x, y)$对$\mathbb{R}^2$ 中的每一点(x, y)成立，即$(0, 0)$是加法单位元.

c. 最后，证明：在通常加法及复乘积为乘积情况下，域公理是满足的.

7. 把$\mathbb{R}^2$ 中的两点(x_1, y_1)及(x_2, y_2)用极坐标形式表示为$(x_1, y_1)=(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$，$(x_2, y_2)=(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$，运用正弦与余弦的加法公式证明：由习题6所定义的复乘积可以写成

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2), r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

a. 运用这个公式给出复乘积的几何解释.

b. 对$(x_1, y_1)\neq(0, 0)$的复乘法的逆给出一种几何解释.

8. 设$\mathbb{R}^3$ 中的非零向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是正交的，证明：$\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是线性无关的.

9. 证明：不存在向量 $\boldsymbol{u}$，使之具有 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的任一向量.

10. 给定$\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{v}$，问在什么条件下存在一向量 $\boldsymbol{w}$，使 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$?

11. 假设三重向量组 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基. 对任意实数 α，β. 证明：基点在原点以 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 为边界的平行六面体的体积与基点在原点以 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 为边界的平行六面体的体积相同. 从几何角度解释这一结果.

⊖ 关于线性代数，初级内容可参考 David C. Lay 的《Linear Algebra and Its Applications》(Boston: Addison Wesley, 2002)，更高级内容可参考 Peter D. Lax 的《Linear Algebra》(New York: John Wiley, 1996).

580

12. 证明：方程组

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2$$

对每一对数对(y_1, y_2)有唯一的解(x_1, x_2)，当且仅当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

（提示：证明上述方程组等价于

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 0x_3 = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0x_3 = y_2$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = y_3.）$$

索引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致．

D

E

F

J

L

M

N

O

P

Q

R

S